

前 言

本书是结构力学课程的一本教学参考书。我们在多年教学实践中把学生学习中出现的一些有代表性的疑难问题和容易混淆、容易出错的问题，以及在因材施教与教学研究过程中探讨的一些较为深入的问题，经过整理与提高编写成此书，共 126 道答疑题。解疑方式有基本概念与原理的阐述、解题基本方法与技巧的讨论、对易出错或混淆之处加以指导等。

本书符合工科多学时结构力学课程基本要求，编写顺序与多数教材基本一致，分为：绪论与几何组成分析、静定结构受力分析、虚功原理与位移计算、力法、位移法、渐近法、超静定结构特性、影响线及应用、结构矩阵分析、结构动力计算等十章，各章之间也有部分内容互相穿插渗透。

本书可供工科大专院校土建类、水利类、道桥类学生及研究生作为参考读物，也可供结构力学教师及工程技术人员参考。

本书承西安建筑科技大学王荫长教授审阅，审阅人提出了很多宝贵的修改意见，特此致谢。在编写过程中得到清华大学结构力学教研室老师们的大力支持，在此一并致谢。

由于水平所限，书中错漏之处难免，恳请指正。

编 者

1993 年 10 月于清华大学

目 录

前言

第一章 结构计算简图与几何组成分析	1
1-1 两端铰支座的水平梁与简支梁在竖向荷载作用下受力相同吗?	1
1-2 为什么说杆系结构的分类是按计算简图划分的?	3
1-3 如何正确理解静力荷载?	3
1-4 利用三角形组成规律分析体系的几何组成时应注意什么问题?	4
1-5 如何解释三刚片六链杆的几何不变体系?	5
1-6 在几何组成分析中,装置能重复利用吗?	6
1-7 在几何组成分析中,瞬铰在无穷远时如何下结论?	7
1-8 体系内部作构造等效变换时会改变其几何组成特性吗?	7
1-9 瞬变体系的特点是什么?	9
1-10 瞬变体系为何不能用作结构?	9
1-11 如何区别瞬变体系和常变体系?	10
1-12 当体系不能用三角形规律进行几何组成分析时怎么办?	11
1-13 对体系如何进行运动分析?	13
1-14 确定计算自由度 W 时应注意些什么?	15
第二章 静定结构受力分析	17
2-1 如何理解用分段叠加法作弯矩图?	17
2-2 在竖向荷载下斜梁内力有什么特点?	18
2-3 求静定结构反力和内力时,外力偶可以随意移动吗?	19
2-4 如何快速作出静定刚架的弯矩图?	20
2-5 仅仅已知静定梁的弯矩图,能否求得与其相应的荷载?	24
2-6 如何利用对称性进行静定结构内力分析?	26
2-7 求静定平面桁架各杆轴力时能不解联立方程吗?	29
2-8 在荷载作用下曲杆内力图有何特点?	31
2-9 任意荷载下拱型结构都存在合理轴线吗?	35
2-10 静定组合结构在受力上有何优点?	38
2-11 什么叫做复杂桁架? 如何求解其内力?	40
2-12 如何选择静定桁架的合理外形与腹杆布置?	43
2-13 如何证明静定结构约束力解答唯一性原理?	46
第三章 虚功原理及结构位移计算	47
3-1 利用刚体系虚位移原理求静定结构约束力的优缺点何在? 计算虚位移有哪些方法?	47

3-2	利用刚体系虚位移原理能否同时计算多个约束力?	50
3-3	怎样利用刚体系虚位移原理建立静定梁和刚架的弯矩方程?	51
3-4	如何解释支座位移时静定刚架只作刚体位移?	52
3-5	为什么说荷载作用下的位移计算公式 $\Delta = \sum \int \frac{MM_p}{EI} ds$ + $\sum \int \frac{NN_p}{EA} ds$ + $\sum \int \frac{kQQ_p}{GA} ds$ 对曲杆来说是近似的?	53
3-6	如何计算静定结构在荷载作用下某点的全量线位移?	56
3-7	计算平面刚架的位移时, 忽略剪切变形和轴向变形的误差有多大?	57
3-8	用图乘法求位移时, 哪些情况容易出错?	59
3-9	增加各杆刚度就一定减小位移吗?	62
3-10	有应力就有应变, 有应变就有应力, 这种说法对吗?	63
3-11	功的互等定理中, 体系的两种状态应具备什么条件?	64
3-12	在位移互等定理中, 为什么线位移与角位移可以互等? 位移系数的 量纲与单位是什么?	65
3-13	在变形体虚功原理中, 两个状态的变形体是否必须为同一体系?	66
3-14	如何计算非弹性材料的静定结构在荷载作用下的位移?	67
第四章	力法	70
4-1	力法中的基本体系与基本结构有无区别?	70
4-2	在力法中为什么可以采用切断链杆后的体系作为基本体系?	71
4-3	对力法的基本结构有何要求?	72
4-4	在力法计算中可否利用超静定结构作为基本结构?	73
4-5	在超静定桁架和组合结构中, 切开或撤去多余链杆的基本体系, 两者 的力法方程有何异同?	74
4-6	应用力法时, 对超静定结构作了什么假定?	75
4-7	用力法计算超静定结构的解是唯一的吗?	76
4-8	满足力法方程能使基本体系与原结构在所有截面的对应位移都 相同吗?	78
4-9	超静定结构发生支座位移时, 选择不同基本体系, 力法方程有何不同?	80
4-10	在力法计算中利用组合未知力有何优点? 组合未知力能否任意选择?	81
4-11	求力法方程中的系数与自由项时, 单位未知力与荷载可否加于不同的 基本结构?	84
4-12	用变形条件校核超静定结构内力计算结果时应注意什么?	87
4-13	支座位移产生的自内力如何校核?	89
4-14	温度变化引起的自内力如何校核?	90
4-15	利用对称性简化力法计算时能否采用半边结构?	92
4-16	在力法计算中, 什么情况下可用刚度的相对值? 为什么?	94
4-17	非弹性体系的超静定结构能否用力法求解?	98
第五章	位移法	100

5-1	位移法如何体现结构力学应满足的三方面条件(平衡条件、几何条件与物理条件)?	100
5-2	弯曲杆件刚度方程中的刚度矩阵在什么情况下存在逆阵?	101
5-3	铰结端角位移和滑动支承端线位移为什么不作为位移法的基本未知量?	103
5-4	固端力表中三类杆件的固端力之间有何关系?	105
5-5	弹性支座处杆端位移是否应作为位移法基本未知量?	107
5-6	用“铰化法”确定结点独立线位移时应注意些什么?	110
5-7	什么情况下独立结点线位移可以不作为位移法基本未知量?	111
5-8	非结点处的截面位移可作为位移法的基本未知量吗?	114
5-9	位移法可否求解静定结构?	115
5-10	位移法的两种计算方法的基本方程是否相同? 它们的关系是什么?	116
5-11	在一般情形下, 如何用位移法计算在求结构自振频率时所用的结构刚度系数?	118
5-12	具有刚性杆件的结构用位移法求解时应注意些什么?	120
5-13	位移法与力法混合应用和联合应用有何区别?	121
第六章	渐近法	124
6-1	力矩分配法和位移法有何异同?	124
6-2	力矩分配法的计算过程收敛于真实解吗?	125
6-3	怎样估算力矩分配法的计算误差?	130
6-4	在力矩分配法中结点力偶荷载和约束力矩的正负号怎样规定?	133
6-5	用力矩分配法计算时如何处理结点力偶荷载?	134
6-6	用力矩分配法求出杆端弯矩后, 怎样求结点角位移?	137
6-7	力矩分配法的计算结果怎样用变形协调条件进行校核?	138
6-8	具有弹性支座的连续梁和 unilateral 刚架能否用力矩分配法计算?	142
第七章	超静定结构的特性	148
7-1	超静定结构在荷载作用下的内力分布随各部分刚度比值变化的规律是什么?	148
7-2	在荷载作用下, 当超静定结构各部分刚度比值变化时, 内力分布是否必定随之变化?	150
7-3	刚架计算中什么情况下需要考虑轴向变形的影响? 决定轴向变形影响大小的主要因素是什么?	152
7-4	刚架计算中什么情况下需要考虑剪切变形的影响? 决定剪切变形影响大小的主要因素是什么?	156
7-5	荷载作用下超静定梁和刚架的变形图怎样绘制?	164
7-6	当支座位移时, 超静定梁和刚架的变形图怎样绘制?	167
7-7	温度变化时, 超静定梁和刚架的变形图如何绘制?	168
第八章	影响线及其应用	174

8-1	如何绘制移动的单位力偶作用下静定结构内力的影响线?	174
8-2	如何用机动法求静定刚架内力的影响线?	175
8-3	机动法绘制间接荷载作用下的影响线应注意什么?	177
8-4	如何求静定结构位移影响线?	179
8-5	静定结构的位移影响线和超静定结构内力影响线都是由曲线组成的吗?	180
8-6	在求剪力 Q 的荷载临界位置时如何使用判别式?	182
8-7	如何求桁架的荷载最不利位置?	183
8-8	移动荷载含有均布荷载时如何确定荷载最不利位置?	186
8-9	当左右微动荷载组而 $\sum R_i \tan \alpha_i$ 均为正值(或负值)时,荷载应怎样移动才能得到临界位置?	189
8-10	移动荷载含有均布荷载时如何确定简支梁绝对最大弯矩?	190
8-11	如何求静定多跨梁的绝对最大弯矩?	193
8-12	简支梁绝对最大弯矩与跨中截面的最大弯矩相差多少?	195
第九章	结构矩阵分析	196
9-1	在结构矩阵分析中什么叫柔度法、刚度法和直接刚度法?	196
9-2	矩阵位移法是如何确定基本未知量的?	197
9-3	在矩阵分析中如何处理铰结点?	198
9-4	“对号入座”集成法的实质是什么?	202
9-5	弹性支座和支座移动如何处理?	205
9-6	如何处理斜支杆支座和斜杆?	211
9-7	不经过单元坐标变换,可用矩阵位移法解题吗?	213
9-8	矩阵分析中,温度变化如何处理?	218
9-9	不同阶的各种类型单元刚度矩阵能否在一起使用?	222
9-10	力法采用矩阵分析如何进行?	225
9-11	如何利用矩阵分析方法计算位移?	228
第十章	结构动力计算	233
10-1	体系的运动自由度和振动自由度有何异同点?	233
10-2	在动力计算中不引入惯性力的概念行吗?	234
10-3	求自振频率时,什么情况下采用刚度法? 什么情况下采用柔度法?	236
10-4	动荷载作用点不在集中质体上的单自由度体系动力计算如何进行?	237
10-5	什么叫做动力系数? 单自由度体系位移动力系数和内力动力系数是否相同?	240
10-6	柔度法与刚度法所建立的自由振动微分方程是相通的吗?	243
10-7	求自振频率与主振型和坐标选取有关吗?	246
10-8	求自振频率和主振型能否利用对称性?	248
10-9	主振型正交性的意义是什么?	250
10-10	频率相等的两个主振型互相正交吗?	251

10-11	什么叫做正则坐标？什么叫做振型叠加法？	252
10-12	如何用矩阵位移法分析多自由度体系的固有振动？	254
10-13	迭代法计算结果是否都收敛于第一主振型？	256
10-14	动荷载作用点不在多自由度体系的集中质体上时，动力计算如何进行？	258
10-15	主振型叠加法能否用于静力计算？	260
10-16	怎样用主振型叠加法求解简谐荷载作用下的强迫振动？	263
10-17	何谓伴生自由振动？	264

www.shuigong.com

第一章 结构计算简图与几何组成分析

1-1 两端铰支座的水平梁与简支梁在竖向荷载作用下受力相同吗？

对弯矩和剪力来说，两者差别很小，主要差别是前者存在轴力，即有水平支座反力，后者无轴力。

图 1-1-1(a) 示一工字钢梁，支承在混凝土墩上，受竖向荷载 P 作用。钢板梁垫锚固在墩内且与梁焊接在一起。就支座简化来说，它可以按图 (b) 的两端铰支座梁考虑，即支座 A 和 B 可提供支座反力 X_A, Y_A, X_B 和 Y_B (这里不考虑梁高的影响，即不讨论梁下侧水平反力简化到轴线时引起的附加力矩)。这是一次超静定结构，而实用上一般简化为图 (c) 的简支梁。两者受力的差别为：图 (b) 所示梁有水平支座反力 $X_A = X_B$ ，图 (c) 梁没有；图 (b) 梁有轴力 $N = X_A$ ，弯矩为 $M = M^0 - Ny$ ， M^0 为图 (c) 梁的弯矩， y 为图 (b) 梁的挠度；两者剪力 Q 相同。当不计梁弯曲引起弦长的改变 [即设图 (c) 中 $\Delta_B = 0$] 时，两者受力状况相同。

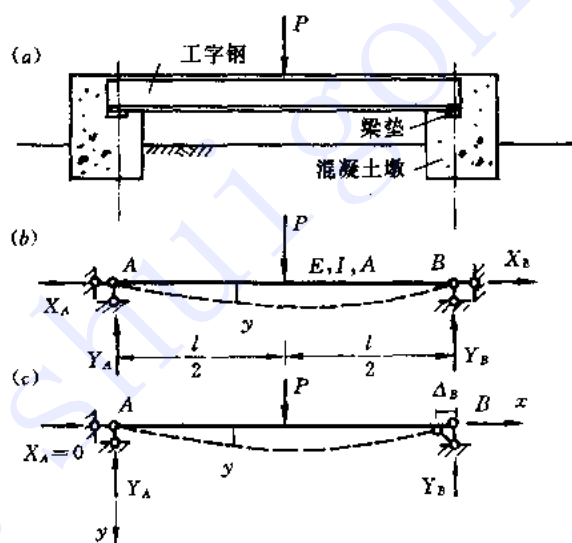


图 1-1-1

下面研究图 (b) 中 $X_A = X_B$ 究竟有多大。若 B 点无水平支杆，则在力 P 作用下由于梁弯曲而使弦长缩短 Δ_B 。所以当有水平支杆限制其缩短时提供的水平反力为

$$X_B = \frac{EA}{l} \cdot \Delta_B$$

为了求 Δ_B ，从梁中取出微段 CD ，如图 1-1-2 所示，弯曲前微段 CD 的原长为 dx ，由图可知，微段两 endpoint 水平位移的差值 $d\Delta$ 为

$$d\Delta = CD - C'D'' = dx - \sqrt{ds^2 - dy^2} = dx \left[1 - \sqrt{1 - y'^2} \right]$$

由二项式公式，有

$$(1 - y'^2)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}y'^2$$

则
$$d\Delta = \frac{1}{2}(y')^2 dx$$

因此
$$\Delta_B = \int_0^l d\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l (y')^2 dx$$

对于图 1-1-1(c)，有

$$\Delta_B = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} (y')^2 dx$$

而
$$y = \frac{P}{12EI} \left(\frac{3}{4}l^2x - x^3 \right), \quad y' = \frac{P}{EI} \left(\frac{l^2}{16} - \frac{x^2}{4} \right)$$

则
$$\Delta_B = \frac{P^2 l^5}{960(EI)^2}, \quad X_B = \frac{P^2 l^4 A}{960EI^2}$$

设 $P = 10 \text{ kN}$, $l = 6\text{m}$, 梁为 No22 a 工字钢, $I = 3400\text{cm}^4$, $A = 42\text{cm}^2$, $E = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$, 则

$$X_B = 2336\text{N} \quad \Delta_B = 1.59 \times 10^{-3}\text{m}$$

简支梁最大挠度和弯矩为

$$y_{\max}^0 = 0.63 \times 10^{-2}\text{m}, \quad M_{\max}^0 = \frac{Pl}{4} = 15 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}$$

设图 1-1-1(b) 最大挠度 $y_{\max} = y_{\max}^0$, 则由 X_B 产生的跨中弯矩为

$$-X_B \cdot y_{\max} = -14.1 \text{N} \cdot \text{m}$$

从上述计算可以看出, 对于图 1-1-1(b), 即使 A, B 支座绝对刚性(受水平力后无任何水平位移)其最大弯矩仅比图 1-1-1(c) 小约 $\frac{1}{1000}$, 况且支座总有弹性变形, 会减小 X_B 值。因此, 类似于图 1-1-1(a) 的梁, 如图 1-1-3 所示, 当对梁进行受力分析时, 总是简化成简支梁计算。

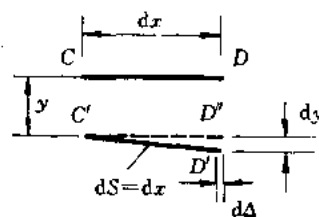


图 1-1-2

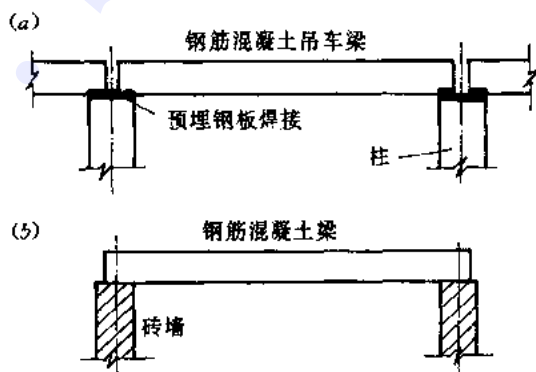


图 1-1-3

1-2 为什么说杆系结构的分类是按计算简图划分的？

杆系结构的分类实际是依计算简图分类命名的。这是因为同一外形的结构，由于结点构造不同，杆件截面尺寸不同，使得各杆受力性能不同，或对计算精度要求不同等因素所引起的差别均可由计算简图反映出来。例如对图 1-2-1(a)所示的钢筋混凝土结构，它属于哪种结构呢？要具体分析：1. 如杆件截面均较大且节点构造又能满足刚性结点特征时，计算图就可简化成图(b)，则此结构就称刚架。2. 当各杆截面尺寸均较小，节点构造满足铰结点特性时，计算图就取图(c)，此时就称为桁架。3. 当弦杆截面尺寸较大，腹杆截面尺寸小且腹杆与弦杆连接不能满足刚性要求时，就可取图(d)为计算简图而称为组合结构。

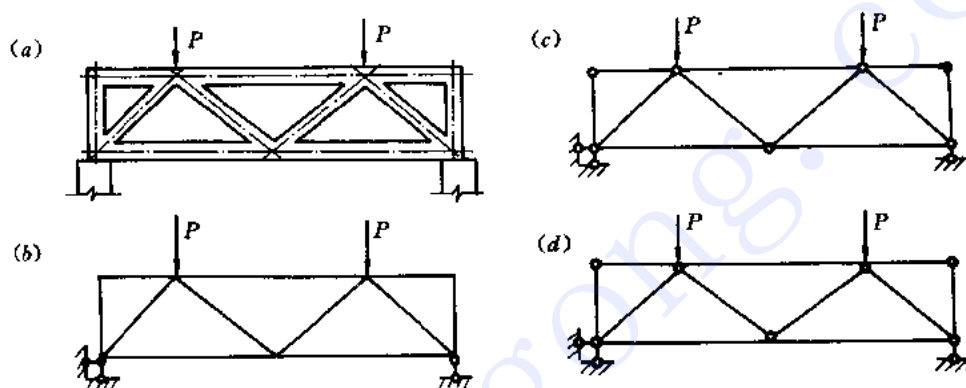


图 1-2-1

结构分类又可按计算特性分为静定结构和超静定结构。正如不能笼统说图 1-2-1(a)所示结构是刚架或是桁架或是组合结构一样，也不能笼统说它是静定结构或是超静定结构，仍须按所取计算简图来划分，如图(b)和图(d)是超静定结构，图(c)是静定结构。

应该说，如图 1-2-1(a)所示的结构，若结点构造满足刚结点条件(其杆端能抵抗弯矩且能保证交于同一结点的各杆端位移相同)，不管其截面尺寸大小按图(b)计算比按图(c)计算更接近实际些，不过计算量要增加很多。

1-3 如何正确理解静力荷载？

作用在结构上的荷载按其性质可分为静力荷载和动力荷载。它们的区别在于在荷载作用下使结构的质体是否产生加速度(产生假想的惯性力)及其对结构影响的程度。静力荷载是指逐渐增加的，不致使结构产生显著的冲击和振动，因而可略去惯性力影响的荷载。

一个力作用在结构上，是作为静力还是作为动力考虑，取决于它随时间的变化规律(加载曲线)、加载速度的快慢。如图 1-3-1(a)所示荷载 $P(t)$ ，当其加载曲线为图(b)且加载时间 $t_1 > \frac{T}{4}$ (T 为结构自振周期)时，可视为静力荷载；若 $t_1 < \frac{T}{4}$ ，一般应视为动力荷载。

如加载曲线如图(c)(突加荷载)或图(d)〔短时荷载, $t_1 \leq \frac{T}{2}$ 〕时,则应视为动力荷载(详见结构动力计算)。

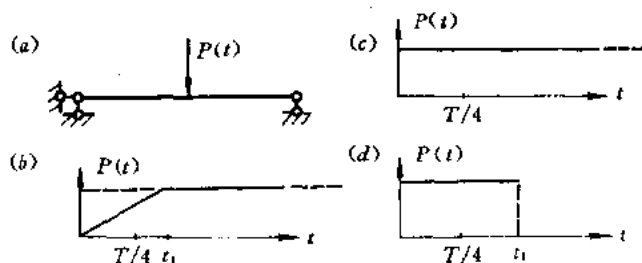


图 1-3-1

荷载按其作用于结构上时间的久暂又可分为恒载和活载两类。恒载是指永远作用在结构上的荷载,如结构自重、结构上固定设备的自重等,这类荷载属于静力荷载;活载是指暂时作用在结构上的荷载,如风力、雪重、人群、移动荷载(如汽车、火车、移动的吊车)和地震荷载等,其中有些活载属于静力荷载,如雪载、人流,而有些活载则属于动力荷载,如开动着的机器荷载、风载、地震荷载;移动荷载当移动速度较慢时所引起的振动和惯性力可以忽略,可按静力荷载考虑,而当移动速度较快时(如高速火车、汽车)引起的振动和惯性力不能忽略,应按动力荷载考虑。

1-4 利用三角形组成规律分析体系的几何组成时应注意什么问题?

进行几何组成分析时,有时会遇到麻烦,甚至束手无策,有时分析容易发生错误。这里关键在于如何正确选择刚片(被约束对象,对空间体系为刚体)和约束。为此,要注意如下几个问题。

1. 平面体系几何组成的基本规律可分为一个刚片与一个铰点连接、两刚片之间连接和三刚片之间连接三种方式。分析一个体系时可从这三种方式去考虑。但应注意有的体系任选其中一种方式均能得出结果,有的则不能(如图 1-7-1 所示体系),而三刚片之间连接规律则是通用的。

2. 刚片是指内部几何不变部分。它可以是一根杆,也可以是一个几何不变且没有(或有多余约束)的构造单元。了解这一点就能正确和灵活地选择刚片,否则会出错。如有人对图 1-4-1(a)所示的瞬变体系作如下分析:刚片 I 用链杆 1、2 连接 A,再用链杆 3、4 连接 B,再用链杆 5、6 连接 C,最后用链杆 7、8 连接 D,故此体系为有一多余约束(链杆 9)的几何不变体系。这一结论是错误的。错在此处所谓“刚片 I”本身是内部可变的,如图(b)所示。

3. 联结是指两刚片之间有直接相连的约束。我们用的只有两类,一是铰结点(包括瞬铰),一是链杆(包括等效代换的链杆)。使用联结要注意两点:一是直接相连两刚片,一是作为链杆本身是几何不变的。如图 1-4-2 所示体系。一种错误的分析为:刚片 I、II 用链杆

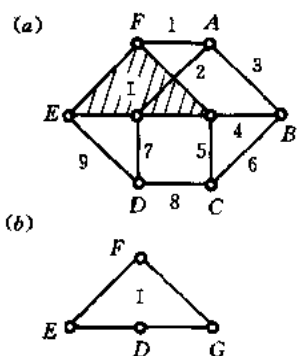


图 1-4-1

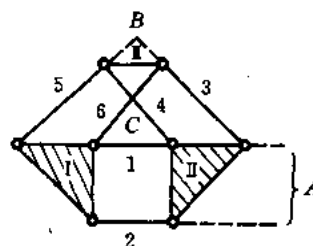


图 1-4-2

1、2(无穷远处瞬铰 A)连接,刚片 I、II 用瞬铰 B 连接,刚片 I、II 用瞬铰 C 连接,因 BC 连线与瞬铰 A 不同方位,故铰 $A、B、C$ 不在一条直线上,体系是几何不变的。这种结论是错误的。因为链杆 3 连接刚片 I 和 II,链杆 5 连接刚片 I 和 II,它们没有同时连接相同两刚片,因此不能组成瞬铰 B 。同理所谓“瞬铰 C ”也不存在。实际上该体系是瞬变体系(理由见 1-7)。

又如对图 1-4-3 作如下分析:刚片 I、II 用铰 A 连接;刚片 I、II 用铰 B 连接;刚片 II、III 用链杆 I 和代换链杆 4(瞬铰 C)连接,因 $A、B、C$ 在一条直线上,故为瞬变体系,这一结论也是错误的。错在等效链杆 4(代换链杆 2、3)是内部几何可变的,且链杆 5 的作用没有体现。该体系实际上是几何不变的(提示:将链杆 $BA、BF、AF$ 看作约束,而将链杆 5 看作刚片,就可分析出正确结果)。

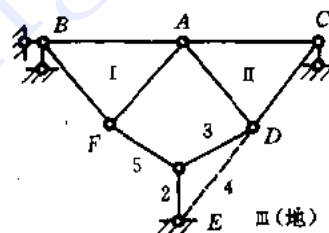


图 1-4-3

1-5 如何解释三刚片六链杆的几何不变体系?

图 1-5-1(c) 示平面内三刚片用六链杆连接的体系,它符合简单的几何组成规律,即三角形规律:平面内三刚片用简单铰(包括瞬铰)两两连接,且三个铰不在一条直线上,构成内部几何不变且无多余约束的体系,此时相对运动自由度等于零。现在从运动分析角度解

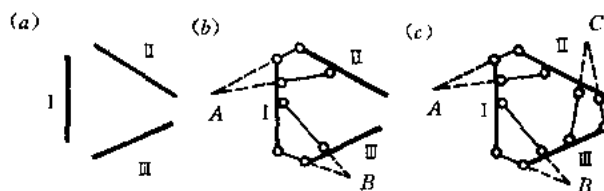


图 1-5-1

释如下。图 1-5-1(a) 为在同一平面内的三个独立刚片,在二维空间它们有九个运动自由度,或说三刚片之间有六个相对运动自由度。设刚片 I 和 II 用瞬铰 A 连接,刚片 I 和 III 用

瞬铰 B 连接如图 (b) 所示, 这时体系还有五个自由度或两个相对自由度, 即相对于刚片 I 来说, 刚片 II 可绕瞬心 A 转动, 刚片 III 可绕瞬心 B 转动。若刚片 I 与 III 再用瞬铰 C 连接, 如图 (c) 所示, 当瞬心 C 看成扩大了刚片 I 上一点, 在此瞬时, 它相对刚片 I 只能绕 A 转动, 当瞬心 C 看成扩大了刚片 III 上一点, 它相对刚片 I 只能绕 B 转动, 若 A, B, C 不同在一条直线上, 则这种运动是不可能的。这就说明了图 (c) 是一个内部几何不变且无多余约束的体系。它是三角形几何组成规律的最一般情况。理解了它, 理解其它情况 (如三刚片彼此用两个瞬铰一个实铰连接) 也就不难了。

1-6 在几何组成分析中, 装置能重复利用吗?

能减少体系一个自由度的装置相当于一个约束。一个装置相当于多少个约束, 取决于该装置的性质及它与约束对象连接的方式。连接两杆的简单铰相当于两个约束; 连接 n ($n > 2$) 杆的复杂铰相当于 $n-1$ 个简单铰, 即相当于 $2(n-1)$ 个约束。连接两个铰的简单链杆, 相当于一个约束; 连接 n ($n > 2$) 个铰的复杂链杆, 相当于 $2n-3$ 根简单链杆。

在几何组成分析中, 常用作约束的装置是铰结点和链杆。简单铰结点和简单链杆不能重复利用。复杂铰结点和复杂链杆可以重复利用, 但重复利用的次数不能超过其相当的简单铰结点数和简单链杆数。

例如图 1-6-1 所示体系可以这样分析: 刚片 I、II、III 用 A, B, C 三铰连接, 形成刚片 III'; 刚片 III'、IV、V 用 A, C, D 三铰连接, 形成刚片 V'; 刚片 V'、VI、VII 用 A, D, E 三铰连接。故此体系是内部几何不变体系, 且无多余约束。

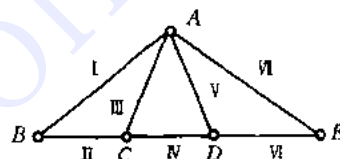


图 1-6-1

此结论显然是正确的, 但这里铰 A 重复用了三次, 铰 C 和 D 各重复用了两次。

又如图 1-6-2 所示体系可以这样分析: 刚片 I、II 用链杆 1 和 DE 连接 (瞬铰 A); 刚

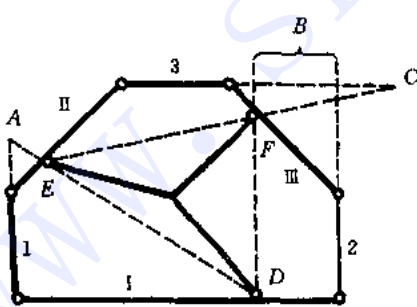


图 1-6-2

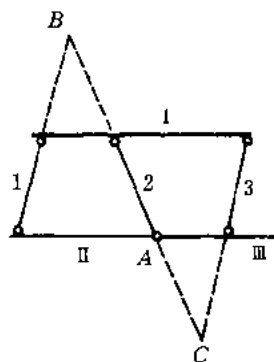


图 1-6-3

片 I、III 用链杆 2 和 DF 连接 (瞬铰 B , 在无穷远处); 刚片 I、III 用链杆 3 和 EF 连接 (瞬铰 C)。

A, B, C 不在一条直线上, 故此体系为内部几何不变且无多余约束。可以用运动分析 (见 1-13) 证明此结论是正确的。虽然这里链杆 DEF 重复用了三次, 但它联结三个铰 ($D,$

$E、F$), 相当于 $2 \times 3 - 3 = 3$ 根简单链杆。

简单链杆不能重复利用。如图 1-6-3 所示三刚片体系, 若将链杆 2 利用两次, 则可得下面结论: 刚片 I、II、III 分别由铰 A 和虚铰 B、C 两两相连, 而三铰共线, 故为瞬变体系。这一结论显然是错误的。

1-7 在几何组成分析中, 瞬铰在无穷远时如何下结论?

在几何组成的基本规则中, 均可归结为分析三刚片用三个铰(含瞬铰)两两彼此连接的方式。这些铰有的在无穷远处, 有的在有限远处, 它们是否共线, 有如下三点结论:

1. 三个不同方位的无穷远处的瞬铰(A、B、C)共线, 例如图 1-7-1(a)所示。因为无穷远处所有点都在一条广义直线上。

2. 两个瞬铰(A、B)同方位(两个平行杆形成的瞬铰, 其杆的方位即为瞬铰方位), 则与另一铰 C 共线, 如图 1-7-1(b)所示。

3. 一个瞬铰(A)的方位与其它两铰(B、C)的联线的方位相同, 则此三铰共线, 如图 1-7-1(c)所示。

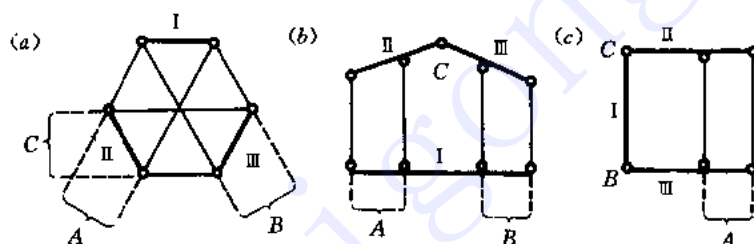


图 1-7-1

对于图 1-7-1(a), 可以按图 1-7-2 进行分析: 刚片 I、II 用瞬铰 A 连接, 刚片 I、III 用瞬铰 B 连接, 刚片 II、III 用瞬铰 C 连接, 因 A、B、C 共线, 故为瞬变体系(可再参看 1-11 的运动分析)。

对于图 1-7-1(b), 设刚片 I 不动, 刚片 II 和 III 相对刚片 I 可作微小水平移动而不破坏铰 C 的约束, 故亦为瞬变体系。此时, 组成瞬铰 A、B 的四根链杆彼此平行, 则 A、B 在无穷远处合为一点, 此点与铰 C 当然共线。

用 1-7-1(c)显然为常变体系。

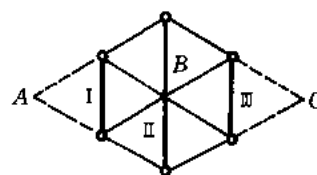


图 1-7-2

1-8 体系内部作构造等效变换时会改变其几何组成特性吗?

体系内部某局部几何不变部分变换成对外联系作用相同的另一形式的几何不变部分(这种变换称为构造等效变换)时, 不改变体系的几何组成特性(即指其不变、常变或瞬变)。

例如图 1-8-1(a)所示体系, 设 A、B、F 不共线, E、D、F 也不共线。可以用零载法判断

其为几何不变体系，但也可利用构造变换后的体系来判断。如把图(a)中内部几何不变部分 ABC 换成图(b)所示的铰结三角形 ABC 进行几何组成分析：刚片 I、II 用链杆 1、2 形成的瞬铰 G 连接，I、III 用链杆 3、4 形成的瞬铰 E 连接，II、III 用链杆 5、6 形成的瞬铰 F 连接，因 G 、 E 、 F 不在一条直线上，故为几何不变体系。

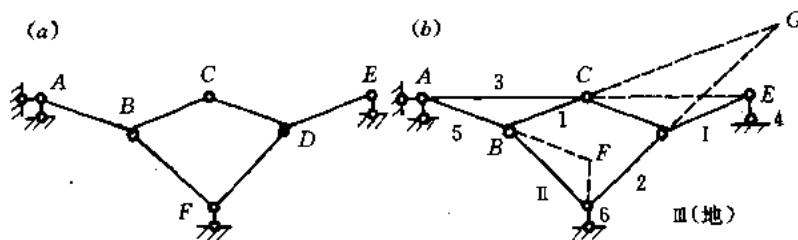


图 1-8-1

在进行构造变换时，应当注意其等效性：相同的几何不变性和相同的对外联系作用。如图 1-8-2(a) 所示的体系，可用其它方法判断其为几何不变体系（见 1-12），但若作图(b) 所示的构造变换，则得出其为几何可变体系（刚片 I、II、III 用三个铰 D 、 E 、 C 联结，而 D 、 E 、 C 在一条直线上）。这是因为 ABC 部分原是几何不变的，变换后的 ABC 部分是瞬变的。

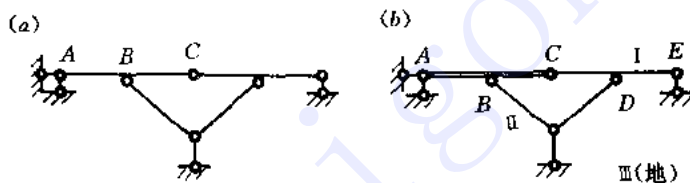


图 1-8-2

的。又如图 1-8-1(a) 所示体系作图 1-8-3 所示的构造变换，也将得出错误的结论——瞬变。这是因为在构造变换中改变了其对外联系的铰结点 B 和 G 的位置，使 A 、 B 、 H 共线， E 、 G 、 H 也共线。若原体系如图 1-8-3(b) 所示，构造变换后的体系如(a)，则分析所得结论就是正确的。

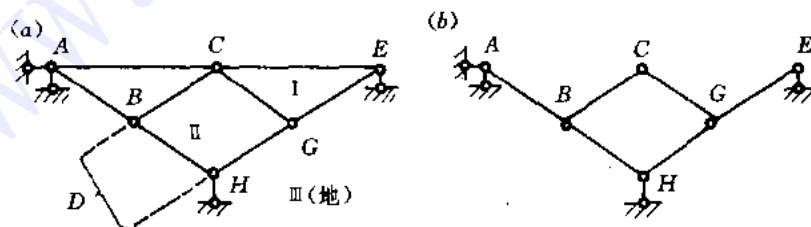


图 1-8-3

顺便指出，体系中几何不变局部作等效构造变换时，其内部可以增加约束；若内部原来有多余约束，也可以去掉多余约束。这样处理，只改变原体系的计算自由度而不影响其几何构造特性。例如将图 1-7-1(a) 或图 1-8-3(b) 所示体系中 ABC 部分变换为无铰的三角

形闭合框，其内部增加了三个多余约束，但整个体系几何构造性质不变。

1-9 瞬变体系的特点是什么？

在计算自由度 $W=0$ 的体系中，设某杆内任意两点间距离改变量的绝对最大值为 λ ，体系中任意两点间距离改变量的绝对最大值为 δ 。若当（且仅当） $\lambda=0$ （忽略应变）时有 $\delta=0$ （如图 1-9-1a）；而当 $\lambda \neq 0$ 时，存在一组位移解答使 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\delta} = 0$ ，即 λ 是 δ 的高阶微量（图 b），这种体系称为瞬变体系。瞬变体系经历微小位移后即成为几何不变体系。

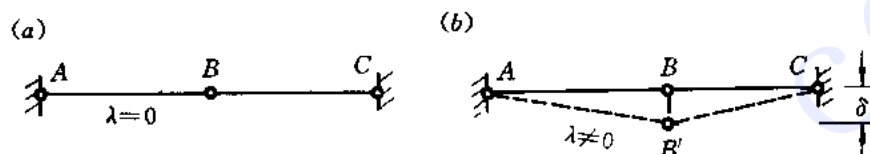


图 1-9-1

瞬变体系具有下列特点：

1. 体系具有约束的数目满足几何不变体系的必要条件——计算自由度 $W \leq 0$ ，因而才可能经微小位移后，在没有增加新的约束情况下成为几何不变体系。
2. 在微小位移之前，体系具有一个运动自由度，因此该体系至少存在一个多余约束（ $W=0$ ，有一个多余约束； $W < 0$ ，多于一个多余约束），其实质在于约束布置出现“三铰共线”或“三链杆共点”的情况。
3. 微小运动方式仅有一种。

图 1-9-1 示一瞬变体系，其 $W=0$ ， A, B, C 三铰共线。当 $\lambda=0$ （杆无应变）时， B 点无位移（图 a）；当 $\lambda \neq 0$ （杆有微应变）， B 点可沿竖向有微小位移 δ （图 b），经微小位移后 A, B', C 三铰不共线，成为几何不变体系。在微小位移之前，若无 BC 杆， AB 杆 B 点绕 A 点转动，而加上 BC 杆，在此瞬时未能阻止 AB 杆绕 A 点转动，故 BC 杆为多余约束。

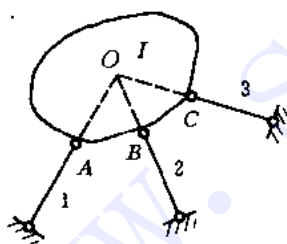


图 1-9-2

图 1-9-2 也是一瞬变体系，其 $W=0$ ，1、2、3 三链杆共点（交于 O 点），刚片 1 只能绕瞬心 O 作微小转动。经微小位移后，三链杆不共点，成为几何不变体系。在微小移动之前，若无链杆 3，刚片 1 可绕瞬心 O 转动，而加上链杆 3，在此瞬时未能阻止刚片 1 绕 O 点转动，所以链杆 3 为多余约束。

1-10 瞬变体系为何不能用作结构？

在结构设计中要满足强度和刚度条件，而瞬变体系在很小外力作用下会产生很大内力和位移，不能作结构。以图 1-10-1 为例加以说明。在荷载 P 作用下， AC 和 CB 杆存在轴

力,各杆伸长了 Δ , C 点下垂 δ 。根据几何关系,有

$$\Delta = AC' - AC = l \sec\theta - l = l \left(1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{5}{24}\theta^4 + \dots \right) - l \doteq l \frac{\theta^2}{2}$$

$$\delta = l \operatorname{tg}\theta = l \left(\theta + \frac{\theta^3}{3} + \dots \right) \doteq l \cdot \theta$$

当位移很小,即 θ 为微量时, δ 为一阶微量, Δ 为二阶微量。这表明当杆有微小伸长时,结点 C 有显著的竖向位移。这是结构设计所不允许的。

另外,在外力作用下,也会产生很大内力。取结点 C 为隔离体,如图(b)所示,由

$$\sum X = 0 \quad N_{CA} = N_{CB} = N$$

$$\sum Y = 0 \quad 2N \sin\theta - P = 0$$

$$N = \frac{P}{2 \sin\theta} \doteq \frac{P}{2\theta}$$

当 $\theta \rightarrow 0$,则 $N \rightarrow \infty$ 。所以很小的荷载就会在杆中产生很大的轴力。当然,这里轴力 N 的大小,取决于杆件抗拉刚度 EA ,其关系如下:

$$\Delta = \frac{\theta^2}{2} l = \frac{Nl}{EA}, \quad \theta = \sqrt{\frac{2N}{EA}}$$

$$N = \frac{1}{2} \sqrt[3]{P^2 EA}$$

要使 $\theta \rightarrow 0$,须使 $EA \rightarrow \infty$,则轴力 $N \rightarrow \infty$ 。

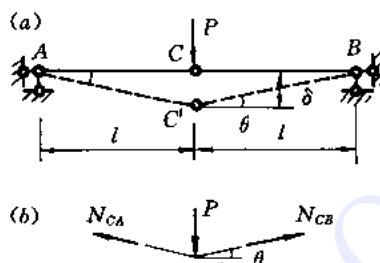


图 1-10-1

1-11 如何区别瞬变体系和常变体系?

当计算自由度 $W=0$ 时,瞬变体系在“其”内部经过微小位移后成为几何不变体系,而常变体系内部可作持续相对运动。它们的共同特征是三刚片用同一条直线上三个铰彼此连接,区别在于这种特征是瞬时的还是永恒的,前者为瞬变,后者为几何常变。在具体分析中,一般可按下列几点加以区别。

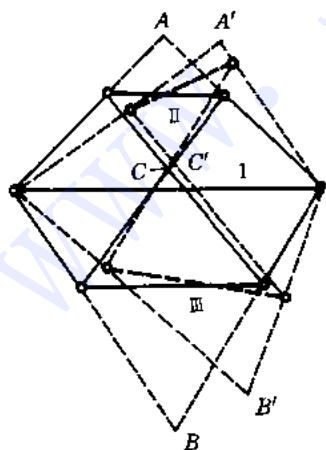


图 1-11-1

1. 同一条直线上三个铰(包括瞬铰)都在有限远处,则为瞬变体系,如图 1-11-1 所示。若刚片 I 不动,使刚片 II、III 作彼此相对微动,可以看出,经微小位移后,三个铰 A' 、 B' 、 C' 就不在一条直线上。

2. 同一条直线上的三个铰含有在无穷远的瞬铰,若经微小移动后仍符合 1-9 所提到的任一种情况,则体系为几何常变。如图 1-11-2(a)所示的体系、刚片 I、II、III 彼此用铰 A 、 B 、 C 相连,其中瞬铰 B 、 C 在同方位(竖向)的无穷远,故 A 、 B 、 C 在一条直线上。由于杆 1、2、3、4

等长，所以经微小位移(如图(b)所示)后 B' 和 C' 仍为同方位的无穷远处瞬铰，则 A' 、 B' 、

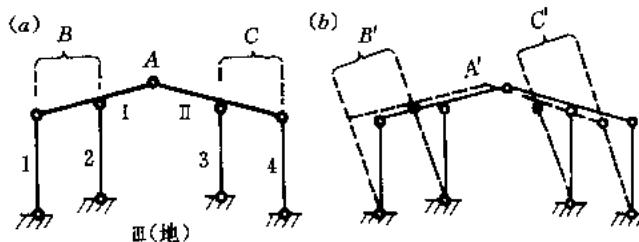


图 1-11-2

C' 仍在一条直线上，故此体系是几何常变。若杆 1 和 2 或杆 3 和 4 不等长，如图 1-7-1(b) 所示，经微小位移后，杆 1 和 2 或杆 3 和 4 均不相互平行，则它们的瞬铰在有限处，这时一般三个铰不再在一条直线上，故为瞬变体系。又如图 1-11-3 所示体系，因杆 1、2 和杆 3、4 不等长，经微小位移后，虽然 B' 和 C' 仍在无穷远处，但不再是同方位，故为瞬变体系。

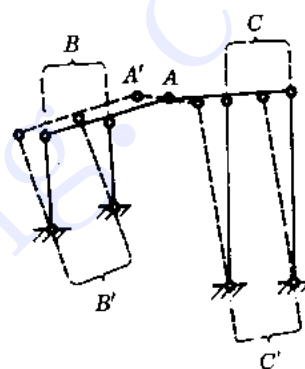


图 1-11-3

又如图 1-7-1(a) 所示体系，若按图中所示进行分析，即刚片 I、II、III 用三个在无穷远的瞬铰 A、B、C 彼此连接，但因形成各瞬铰的两平行杆均不等长，经微小位移后，它们均不再相互平行，成为刚片 I、II、III 由三个有限远铰彼此连接。因此，此体系为瞬变体系。

对于不能采用简单三角形规律进行分析的体系，区别其是瞬变还是常变，可采用运动分析方法(详见 1-13)。

1-12 当体系不能用三角形规律进行几何组成分析时怎么办?

这时可直接采用运动分析方法来判断体系是几何不变还是几何可变(见 1-13)，也可采用静力法进行分析，如零载法。

零载法是根据下述原理建立起来的：对于计算自由度 $W=0$ 的体系，在零载(没有外荷载)下，体系不存在自内力时，为几何不变；可能存在自内力时，为几何可变。在论证此原理之前，先说明几点。

1. 体系没有外力作用存在的自平衡内力系，称自内力；
2. 去掉多余约束，不会增加体系运动自由度 S ，换句话说，去掉多余约束，体系不存在沿多余约束方向运动；
3. $W=0$ ，是采用零载的前提。因 $W>0$ ，体系必是几何可变， $W<0$ ，体系必存在多余约束，自内力就可能存在，这时可能是超静定结构，也可能一部分超静定一部分又是几何可变，无法下结论。

零载法原理论证如下。在 $W=0$ 的体系中无荷载作用，若：

1. 设体系几何可变，此时体系必有多余约束，运动自由度等于其多余约束数。去掉

任一多余约束，代以多余约束力 X (变成主动力)，任意给定虚位移，根据虚位移原理，有

$$X \cdot \Delta X = 0$$

其中 ΔX 为沿去掉的多余约束方向的虚位移。因体系沿多余约束方向无位移，即 $\Delta X = 0$ ，故 X 可取任意值，说明体系存在自内力状态。

2. 设体系不可能存在自内力。此时体系中没有多余约束，即 $n = 0$ 。因为如若有多余约束存在，按照第1条，体系可能存在自内力，与假设矛盾。于是有

$$S = W + n = 0 + 0 = 0$$

这说明 $W = 0$ 的体系，在零载下若不可能存在自内力，则为几何不变体系，反之，为几何可变体系。

用零载法判断体系几何不变性的步骤为：先假设某反力或某截面的某内力为 $X \neq 0$ (注意不能设 $X = 0$)，求解各杆内力与 X 关系，若这时所有平衡条件满足，则自内力可能存在，为几何可变；反之，若平衡条件不能全部满足，则不可能存在自内力，为几何不变体系。

零载法无法区别常变与瞬变。

例1 试对图 1-12-1(a) 所示体系进行几何组成分析。

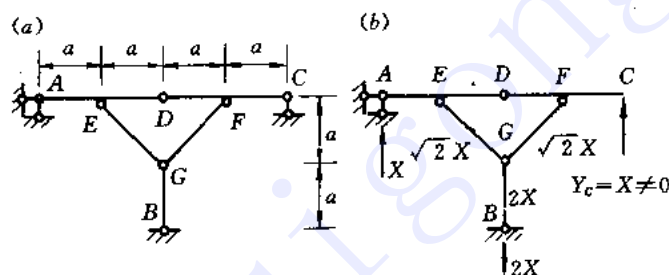


图 1-12-1

解 先求 W 。刚片数 $m = 5$ ，简单铰数 $h = 5$ ，支杆数 $b = 5$ 。 $W = 3m - (2h + b) = 0$ 。

此体系不能用三角形规律进行几何组成分析，可采用零载法。

设 C 点支座反力 $Y_c = X \neq 0$ ，由平衡条件可算出支座 A 、 B 反力和各链杆轴力，如图 (b) 中所示。现以 DC 杆为隔离体，此时显然 $\sum M_B \neq 0$ ，则 $Y_c = X \neq 0$ 不能满足全部平衡条件，此体系不可能存在自内力，故为几何不变体系。

例2 试对图 1-12-2 所示体系进行几何组成分析。

解 此体系也不能用三角形规律进行几何组成分析。为此，先计算 W ：铰结点数 $j = 14$ ，简单链杆个数 $b = 28$

$$W = 2j - b = 0$$

可用零载法分析。

在零载下，由整体平衡可知各支座反力为 0。设杆

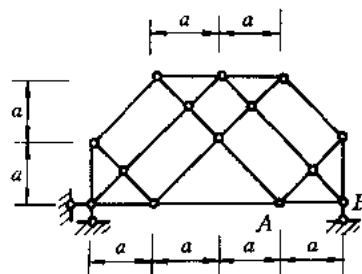


图 1-12-2

AB 轴力为 $X > 0$ ，逐次利用结点 A、B、C、D、E、F、G、H、I 的平衡条件求得各杆轴力如图 1-12-3 中所示，最后检验结点 A 是满足其平衡条件的。因此无论 X 取何值，自内力状态均存在，故体系几何可变。

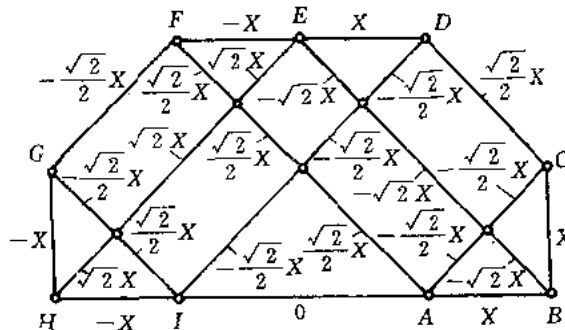


图 1-12-3

上述两例所得结论可直接从对体系进行运动分析(见 1-13)得到验证。

1-13 对体系如何进行运动分析?

运动分析是几何组成分析的基础。对几何组成分析中的一些疑难问题，可以用运动分析方法给予很好的解释。对于不能采用三角形规律判断的体系，采用运动分析也是一种很好的方法，它可以直接判断体系是几何不变还是几何常变或瞬变。

运动分析方法就是理论力学中所讲的瞬心法和速度图法。确定瞬心有时较麻烦，这里主要讲速度图法。

运动分析的要点可概括如下：

1. 运动分析总是讨论体系内部各杆件之间是否存在相对运动，因此首先可任选一个内部几何不变部分(一个杆或一个构造单元)作参考系，即认为这部分不动。

2. 任选一个与参考系铰结的杆件或刚片，按定轴转动给出其上一点(一般选铰点)的任意微小位移(分析瞬变)，此位移垂直于该点至转动轴的连线，如图 1-13-1(a)所示。图(b)为分析常变时所给的有限位移，即沿圆弧由 B 至 B'。

3. 确定其它铰点位置是以已知两点(即运动后的点或不动点)为圆心作相应圆弧(分析常变)或其切线(分析瞬变)，然后求出它们的交点而得，如图 1-13-2 中 D 点的确定，图中虚线示出各杆相对 AC 运动后的新位置(AB' D'C)。

4. 结果的判别是根据运动作图至最后一个铰点是否能得到唯一交点。若能，即在不破坏所有约束下位移是可能的，则体系是几何常

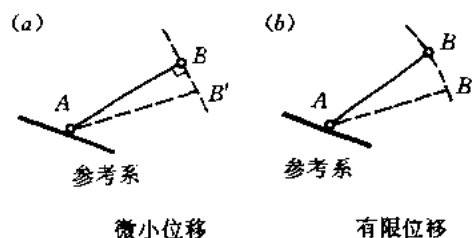


图 1-13-1

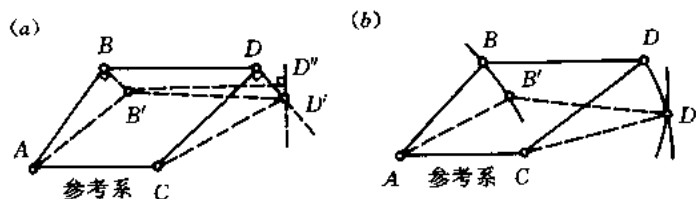


图 1-13-2

变(有限位移)或瞬变(微小位移);若不能,即这种位移实际上不可能,则为几何不变。

瞬变体系只须做微小运动分析就可判定。如果微小运动不可能,则有限运动更不可能,可断定体系一定为几何不变。如可能发生微小运动,应再检验有限运动是否可能,以区别体系是瞬变还是几何常变。

要注意,在有限运动分析中杆长保持不变,而在微小运动分析中,杆长有微小改变(是铰点位移的高阶微量)。请观察图 1-13-2 中(a)、(b)的虚线部分。

例 1 用运动分析判断图 1-12-1(a)所示体系的几何组成特性。

解 先做微小运动分析,如图 1-13-3 所示,做法如下。以地为参考系,给杆 AD 微小转动,得 D_1 、 E_1 (DD_1 和 EE_1 垂直于 AD), 作 $E_1G_2 \parallel EG$, 且 $E_1G_2 = EG$, 由 $GG_1 (\perp BG)$ 和 $G_1G_2 (\perp E_1G_2)$ 相交得 G_1 ; 作 $D_1F_2 \parallel DF$ 和 $G_1F_3 \parallel GF$ 且 $D_1F_2 = DF$ 和 $G_1F_3 = GF$, 由 $F_1F_2 (\perp D_1F_2)$ 和 $F_1F_3 (\perp G_1F_3)$ 相交得 F_1 ; 随之得 C_1 。各杆微小位移后的新位置如图中粗虚线所示,因 C_1 不在 DC 水平线上,这是不可能的,因此此体系是几何不变。

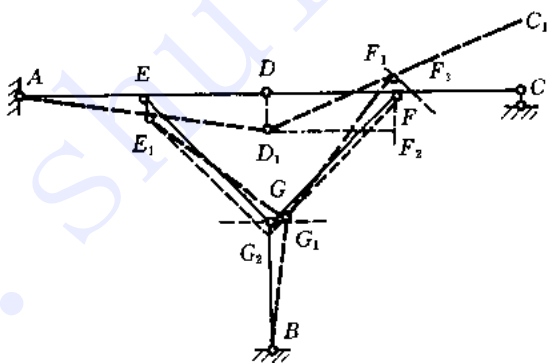


图 1-13-3

例 2 用运动分析判断图 1-12-2 所示体系的几何组成特性。

解 先作微小运动分析,可知运动是可能的。然后再作有限运动分析,如图 1-13-4 所示。具体分析如下。该体系只要分析基础以上部分内部的几何组成特性即可。为此取 ΔGHI 为参考系;给杆 GF 有限转角得 F_1 ;然后用两弧相交依次得到 J_1 、 L_1 、 A_1 、 E_1 、 K_1 、 N_1 、 B_1 、 D_1 和 C_1 ;从 $A_1N_1C_1$ 在一条直线上看出原 ABC 三角形未被破坏,这说明可存在如图中粗虚线所示的内部相对有限位移。故体系是几何常变而不是瞬变。

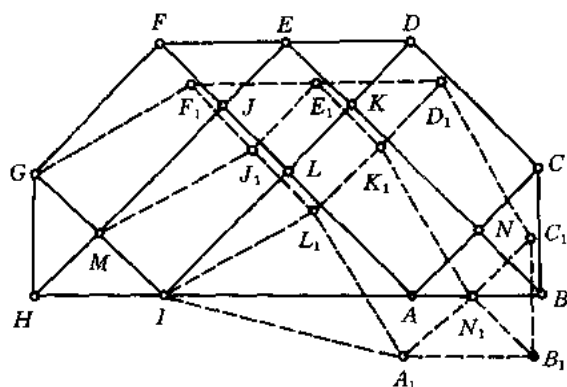


图 1-13-4

1-14 确定计算自由度 W 时应注意些什么？

计算 W 有三种算法：一种是取刚片为对象，约束为结点和支杆；一种是取结点为对象，约束为链杆；再一种是混合法，取刚片和结点为对象，约束为结点和链杆。不管哪种算法，对象的选择一般不困难，而约束数的计算有的容易弄不清。最应注意的是要明确这样一个概念：约束是两对象之间的联系。下面分别指出三种算法各应注意的问题。

1. 取刚片为对象，结点与支杆为约束。计算公式为

$$W = 3m - (3g + 2h + b)$$

利用此公式要注意以下几点：

(1) 确定刚片数最简单的方法是取杆件数(支杆除外)。如图 1-14-1 所示的体系，杆数 $m=8$ 。

(2) b 只为支杆数，固定支座相当于三个支杆。

(3) 简单结点数 g (刚结点)和 h (铰结点)是指连接两个对象(刚片)的结点数。连接 n 个对象的结点相当于 $n-1$ 个简单结点。因此，只连接一个刚片的结点，如图 1-14-1 中铰结点 A, B, C ，均不计入 g 和 h 中。在图中， E 处的刚结和铰结点均为连接两个刚片的结点，各为一个简单结点，而 G, H 处均为连接三个刚片的复杂刚结点，各相当于两个简单刚结点。体系的计算自由度

$$\begin{aligned} W &= 3m - (3g + 2h + b) \\ &= 3 \times 8 - (3 \times 7 + 2 \times 1 + 4) = -3 \end{aligned}$$

刚片还可指一个内部几何形状不变的局部，这时体系内刚片与刚片间无刚结点相连， g 总为零，其计算公式为

$$W = 3m - (2h + b + d)$$

其中 d 为刚片内部多余约束的总数，如 1-14-2 所示的各局部都可看成一个刚片，但图(a)

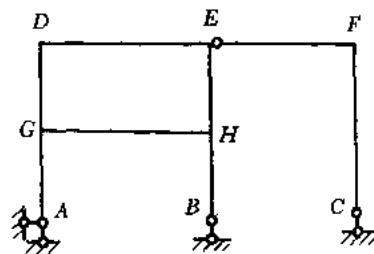


图 1-14-1

和(b)有一个刚性闭合体，其内部各有三个多余约束，图(c)有两个。图 1-14-1 所示体系按此算法为： $m=2, h=1, b=4, d=3$ 。

$$W = 3 \times 2 - (2 \times 1 + 4 + 3) = -3$$

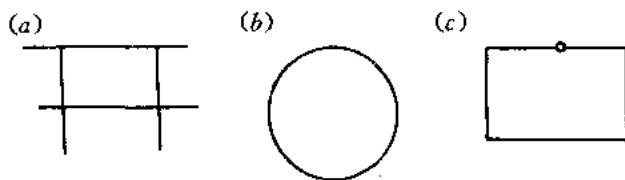


图 1-14-2

2. 取结点为对象，链杆(包括支杆)为约束，其计算公式为

$$W = 2j - b$$

利用此公式要注意以下几点：

(1) j 为取作对象的铰结点数(包括支座结点数，固定端算一个结点)

(2) b 为简单链杆数(包括支杆，固定端算三个支杆)。凡是连接两个结点(对象)的内部几何不变且无多余约束的局部(形状不限)，都算一个简单链杆，如图 1-14-1 中 CFE 部分，而连接 n 个结点的内部几何不变的局部相当于 $2n-3$ 个简单链杆。

(3) 若链杆内部有多余约束，如图 1-14-1 中的 $AGDEHB$ 部分，则

$$W = 2j - (b + d)$$

式中 d 为内部多余约束总数。

用此法计算图 1-14-1 所示体系的 W 为： $j=4, b=8, d=3$

$$W = 2j - (b + d) = 2 \times 4 - (8 + 3) = -3$$

3. 混合法，是混合取刚片和铰结点为对象，结点和链杆为约束， W 计算公式为

$$W = (3m + 2j) - (3g + 2h + b + d)$$

利用上式除应注意 1、2 项所述外，为了避免重复，取对象时可先确定刚片数，再确定作为对象的铰结点数(它是除与作为对象的刚片相连接的铰结点外的所有铰结点数)。用混合法计算图 1-14-1 所示体系的 W 为： $m=1$ ($AGDEHB$ 部分)， $d=3$ ， $j=1$ (铰 C ，因铰 A 、 B 、 E 与取作对象的刚片相连，不计入 j)， $b=4$ (支杆数)， $g=0, h=0$ (铰 C 作为对象，铰 A 、 B 、 E 都只连接一个对象)，则

$$W = (3m + 2j) - (3g + 2h + b + d) = -3$$

例 计算图 1-14-3 所示体系的 W 。

解 用混合法。 $m=1$ ($ACDEB$ 曲杆)， $j=5$ (铰 F 、 G 、 H 、 I 、 J)； $g=0, h=0$ (铰 C 、 D 、 E 只连接一个对象，因杆 CG 、 DH 和 EI 作为约束，故不计入 h)， $b=16$ (9 个支杆和 7 个链杆)， $d=0$ ，则

$$W = (3 \times 1 + 2 \times 5) - (16) = -3$$

此例用混合法的好处是：对象数和约束数都少，且不涉及复杂结点和复杂链杆。

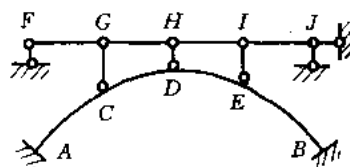


图 1-14-3

第二章 静定结构受力分析

2-1 如何理解用分段叠加法作弯矩图？

在梁和刚架的受力分析中，常用分段叠加法作弯矩图，使绘制工作得到简化。此法可叙述如下：从结构中取出的任一直杆段的 M 图，等于把该杆段看作简支梁时将杆端弯矩作为端力偶荷载作用与跨间荷载作用下的弯矩图的叠加。为了正确使用此法，作几点说明：

- (1) 此法是基于叠加原理，因此只适于小变形和线弹性材料的情况；
- (2) 对于任一直杆段，不管该杆段区间内各相邻截面约束如何，也不管区间是否变截面，此法均适用；
- (3) 不管该杆段所在的结构是静定还是超静定，此法均适用；
- (4) 为提高使用此法的效率，宜记住简支梁在某些荷载作用下的 M 图，如图 2-4-6 所示。

例 1 作图 2-1-1(a)所示结构的 M 图。

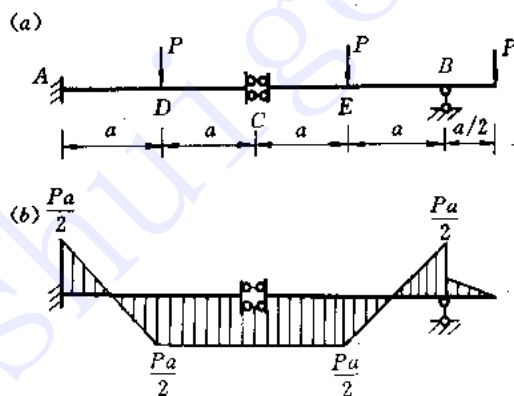


图 2-1-1

解 因 $Q_C=0$ ，故支座 B 反力 $R_B=2P \uparrow$ ，则

$$M_A = 8pa - 3pa - pa - \frac{9}{2}pa = -\frac{pa}{2} \quad (\text{上侧受拉})$$

对 AB 直杆利用叠加法作 M 图如图(b)所示。

例 2 作图 2-1-2(a)所示结构的 M 图。

解 因结构布局对称，荷载也对称，故有 $M_{AB}=M_{BA}$ 且竖标在同侧。对 AB 段利用分段叠加法作 M 图，由于 $M_C=0$ ，则必有 $M_{AB}=M_{BA}=\frac{1}{8}ql^2$ ，且上部受拉。 M 图如图(b)所示。

在上两例中， AB 段间截面 C 均不连续，一个没有抗剪约束，一个没有抗弯约束，但均

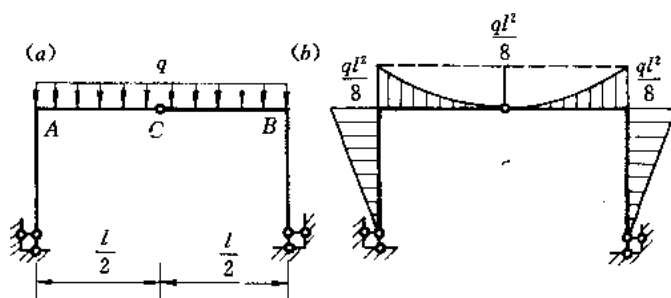


图 2-1-2

可使用分段叠加法。

2-2 在竖向荷载下斜梁内力有什么特点？

斜梁，不管其两端支承如何，在竖向荷载作用下，弯矩分布与等跨且同荷载的水平梁（代梁）相同，但剪力不同且存在轴力。

图 2-2-1(a) 示一简支斜梁，受沿水平分布的竖向均布荷载 q ，跨度 l ，杆长 l_1 ， α 为常数， $0 \leq \beta < \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ 。下面先推导出任一截面 C 的内力表达式，再作些讨论。

如图(c)所示，把 R_B 分解为垂直于杆轴和平行杆轴两分量 R_{BQ} 和 R_{BN} ，即

$$R_{BQ} = R_B \cos(\beta - \alpha)$$

$$R_{BN} = R_B \sin(\beta - \alpha)$$

而由 $\sum m_A = 0$ ，有

$$R_{BQ} = \frac{ql^2}{2l_1} = \text{常数},$$

而 $R_{BN} = R_{BQ} \tan(\beta - \alpha) = \frac{ql^2}{2l_1} \tan(\beta - \alpha)$

随 β 值而变(设指向 A 点的 R_{BN} 为正)。

对于离左端水平距离为 x 的截面 C ，弯矩为

$$M_C = R_{BQ} \frac{l-x}{\cos \alpha} - \frac{1}{2} q(l-x)^2$$

因 $\frac{l}{l_1} = \cos \alpha$ ，故

$$M_C = \frac{ql}{2}(l-x) - \frac{1}{2} q(l-x)^2 = M_C^0$$

这里 M_C^0 为代梁(图(b))截面 C 的弯矩。这说明在沿水平均布荷载下简支斜梁各截面的弯矩与代梁的相应截面弯矩相等。不难证明，此结论对于任意竖向荷载(如竖向集中力、力偶

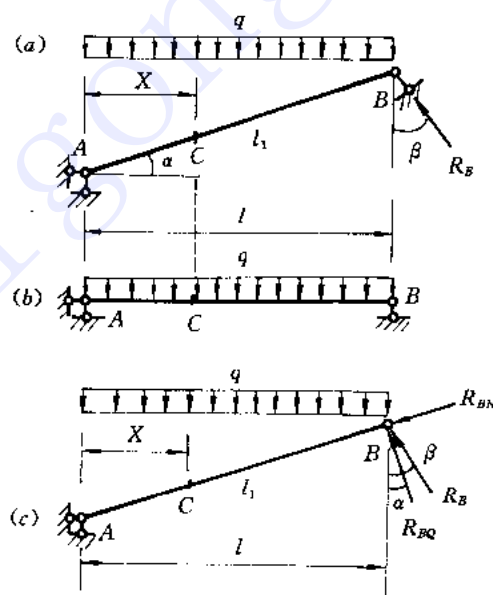


图 2-2-1

等)也是成立的。

对于任意截面 C , 剪力为

$$\begin{aligned} Q_c &= -R_{BQ} + q(l-x)\cos\alpha = -\frac{ql^2}{2l_1} + q(l-x)\cos\alpha \\ &= q\left(\frac{l}{2} - x\right)\cos\alpha = Q_c^0\cos\alpha \end{aligned}$$

这里 Q_c^0 为代梁(图(b)所示)截面 C 的剪力。上述结果说明 Q_c 与 β 无关, 与斜梁斜度有关, Q_c 比 Q_c^0 小。

对于任一截面 C , 轴力为(受拉为正)

$$\begin{aligned} N_c &= -R_{BN} - q(l-x)\sin\alpha \\ &= -\frac{ql}{2}\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}(\beta - \alpha) - q(l-x)\sin\alpha \end{aligned}$$

上式表明斜杆轴力 N_c 与 β 有关。对图(a), 当 $\beta > \alpha$, 全梁轴力均为压力; 当 $\beta < \alpha$, 则右支座附近截面轴力为拉力; 当 $\beta = \alpha$ (即 B 支座反力垂直于 AB), 这时

$$N_c = -q(l-x)\sin\alpha$$

水平梁在竖向荷载下没有轴力, 而斜梁有轴力, 并且有时会出现部分受拉和部分受压情况。

对于两端固定支承斜梁承受任意竖向荷载的情况, 可以通过超静定结构分析方法得知, 其弯矩图与同跨同荷载的两端固定水平梁弯矩图相同。对于一端固定一端滑动支座或辊轴支座的斜梁也有类似结论。

应当指出, 两端各种支承的斜梁的固端剪力与其相应的水平梁固端剪力并不相等。

2-3 求静定结构反力和内力时, 外力偶可以随意移动吗?

考虑力偶能否随意移动应遵守下列原则:

1. 按力偶原位置考虑, 取隔离体, 画受力图;
2. 若在隔离体上作用有力偶, 在计算隔离体端部截面的约束力时, 力偶可随意移动, 但不得转移到其他隔离体上。

如对于图 2-3-1 所示的结构, 力偶 m 可在 $ADCEB$ 上(或其所在平面上)任意转移, 都不影响反力 Y_A, Y_B 的值, 因为取整体为研究对象, 由 $\sum m_A = 0$, 不管力偶 m 在何处, 恒有

$$Y_B l - m = 0$$

求 X_A, X_B 时, 隔离体是 ADC 或 CEB 。力偶 m 可在 CEB 上任意移动, 但不能移到

ADC 上, 因若取 CEB 为研究对象, 当 m 在 CEB 上, 由 $\sum m_C = 0$, 恒有

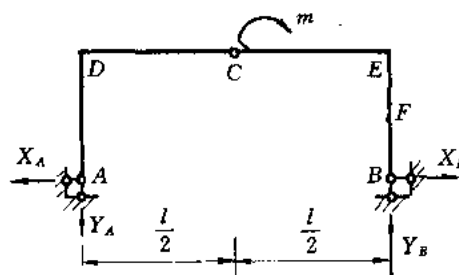


图 2-3-1

$$X_B = \frac{1}{h} \left(m - \frac{l}{2} Y_B \right) = \frac{m}{2h} \rightarrow$$

当 m 移到 ADC 上，在隔离体 CEB 上不受有此力偶 m ，则由 $\sum m_c = 0$ ，有

$$X_B = -\frac{1}{h} Y_B \cdot \frac{l}{2} = -\frac{m}{2h} \leftarrow$$

两者方向相反，显然前者正确。当求截面 F 内力时，若取 $ADCEF$ 为研究对象，列平衡方程，力偶可在其上任意移动。

应当着重指出，在结构计算简图中如出现图 2.2.2(c) 所示的情况则是一种不正确的

www.shuigong.com

(4) 受集中力偶 m 时, M 图在 m 作用处有跳跃, 跳跃量为 m , 跳跃后 M 图的形状如同一根绷紧的橡皮筋受力偶后的形状, 且其两侧 M 图的斜率相等(因两侧剪力相等), 如图(d)所示。

应当指出, 不管图 2-4-1 中的荷载数值及杆端截面弯矩值如何变化, M 图的特点不会改变。

2. 与铰结点相连的杆端无力偶作用时, 该杆端弯矩为 0。若有力偶作用如图 2-4-2(a), 则杆端弯矩值等于该力偶矩, 并以该力偶的转向为弯矩绕杆端的转向来判断杆件的受拉侧, 见图 2-4-2(b)所示。

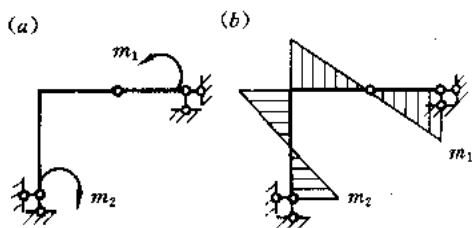


图 2-4-2

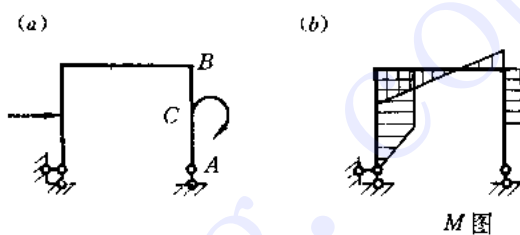


图 2-4-3

3. 杆端无剪力, 杆间又无横向荷载(力偶看成一组横向荷载), 则此杆各截面弯矩为零或为常数。如图 2-4-3(a)所示刚架, AB 段无剪力, 则 AC 段无弯矩, CB 段弯矩为常数, 如图(b)所示。

4. 刚结点力矩平衡, 即刚结点隔离体上所受的力矩代数和应为零。依此, 刚结点处各杆端截面弯矩的竖标画法有:

(1) 无外力偶作用的两杆相交的刚结点, 两竖标相等且位于同一侧, 如图 2-4-4 所示。图(a)中 M_{AB} 是左侧纤维受拉, 则 M_{AC} 必使上侧纤维受拉, 两者同处外侧; 图(b)中两者同处内侧。

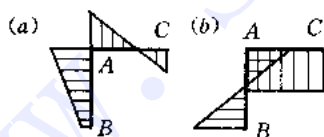


图 2-4-4

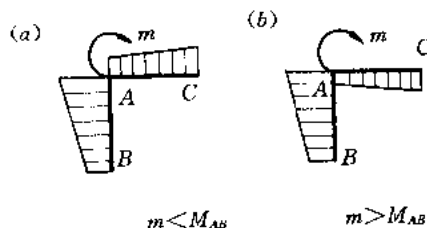


图 2-4-5

(2) 有外力偶作用的两杆相交的刚结点, 两竖标有跳跃, 跳跃规律与直杆受集中力偶情况相同, 如图 2-4-5 所示, 当已知 M_{AB} 和 m , 不难标出 M_{AC} 竖标位置和数值。

对于 n 杆($n \geq 3$)相交的刚结点, 不论结点上有无结点荷载, 只要先求出 $n-1$ 个杆端弯矩, 则不难用力矩平衡方程确定第 n 个杆端弯矩的数值与方向。

5. 利用分段叠加法作 M 图(详见 2-1), 可减少计算控制截面弯矩数量。因此宜多记住简支梁在各种荷载下的 M 图, 如图 2-4-6 所示。

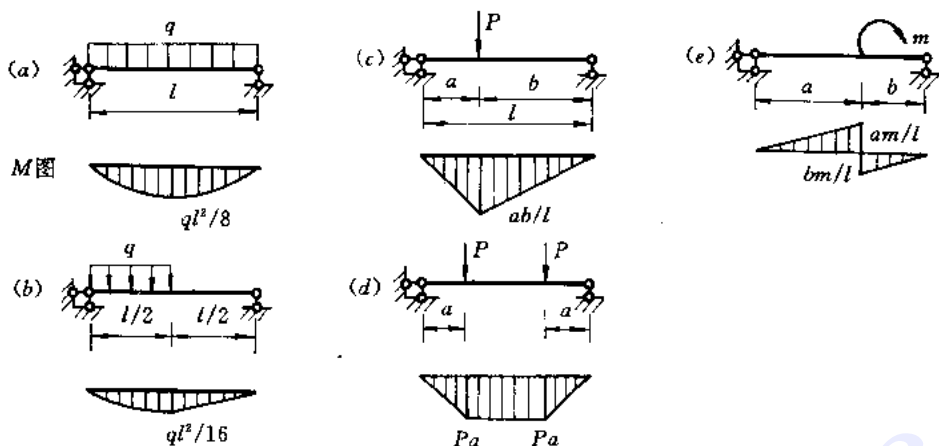


图 2-4-6

6. 对称结构 M 图的简化(详见 2-8)。对称结构在对称荷载下 M 图是对称的,在反对称荷载下 M 图是反对称的。有时将一般荷载分解为对称与反对称两组分量能很快作出 M 图。如图 2-4-7(a)所示的结构,将荷载看成图(b)与图(c)相加。图(c)支座反力为零,故 M 图为零。图(b)支座水平反力为 $\frac{P}{2}$, M 图能很快作出,因此图(a)的 M 图即如图(b)所示。

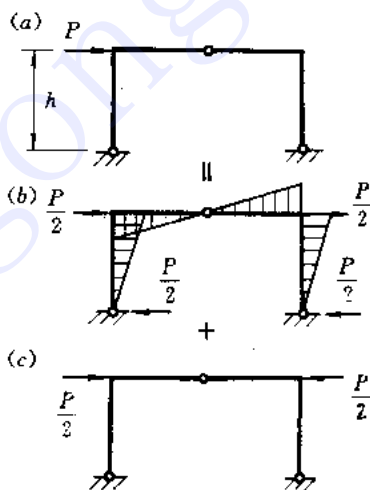


图 2-4-7

7. 在主从型结构中,作用在基本部分的荷载,在附属部分不产生内力。

如此等等。读者可按自己实践经验观察和总结 M 图的特点,加以利用。下面举例说明如何快速作 M 图。

例 1 作图 2-4-8(a)所示结构的 M 图。

解 由整体水平力平衡可知 $X_A = 10\text{kN} \leftarrow$, 则

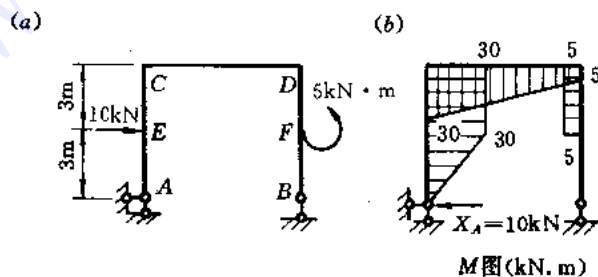


图 2-4-8

$M_E = 30\text{kN} \cdot \text{m}$, 右侧受拉; EC 段无剪力, M 保持常数, 即 $M_{CE} = 30\text{kN} \cdot \text{m}$, 右侧受拉; 根

据结点 C 力矩平衡, $M_{CD} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 下侧受拉。 BD 杆无剪力, 则 BF 段无 M 图, FD 段 M 保持常数, 为 $5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 左侧受拉。根据刚结点力矩平衡, $M_{DC} = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 下侧受拉。有了各控制截面的弯矩竖标, 再据无荷载区间 M 图为直线, 画出整个 M 图, 如图 (b) 所示。

上述过程无须笔算, 仅根据 M 图特点即可作出 M 图。

例 2 作图 2-4-9(a) 所示结构的 M 图。

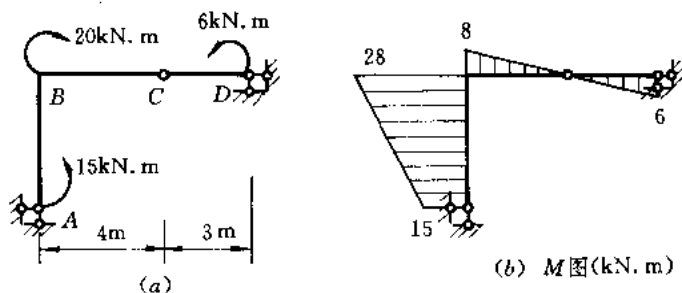


图 2-4-9

解 AB 和 BD 杆段间无荷载, 故 M 图均为直线。因 $M_{DC} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 下侧受拉, $M_C = 0$, 故 $M_{BC} = \frac{4}{3} \times 6 = 8 \text{ kN}$, 上侧受拉; 由刚结点 B 力矩平衡, $M_{BA} = 8 + 20 = 28 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 左侧受拉; $M_{AB} = 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 左侧受拉。有了各控制截面弯矩, 即可作出整个结构 M 图, 如图 (b) 所示。

例 3 作图 2-4-10(a) 所示结构的 M 图。

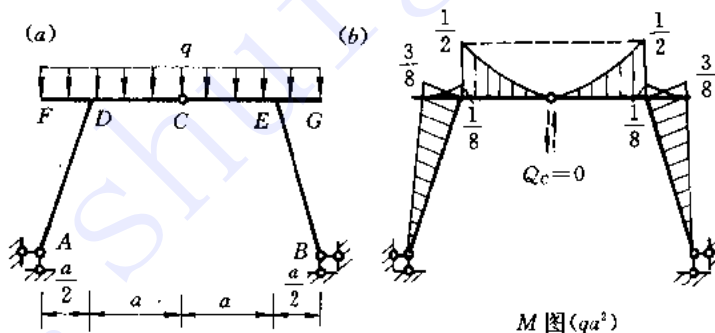


图 2-4-10

解 因结构对称荷载对称, 则 $M_{DC} = M_{EC}$, 且同侧受拉; 又由 DE 段用叠加法作 M 图的结果要使 M_C 等于零, 故 $M_{DC} = M_{EC} = \frac{q}{8} (2a)^2 = \frac{1}{2} qa^2$, 且上侧受拉; 又因 $M_{DF} = \frac{q}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} qa^2$, 上侧受拉; 由刚结点 D 力矩平衡, 有 $M_{DA} = M_{DC} - M_{DF} = \frac{3}{8} qa^2$, 左侧受拉。有了各控制截面弯矩, 再根据直杆内力与荷载微分关系, 即可画出整个结构 M 图, 如图 (b) 所示。

上述 M_{DC} 也可这样求出: 因结构和荷载对称, 则内力分布是对称的, 必有 $Q_C = 0$ (因 Q_C 是反对称内力), 而 N_{CB} 对 D 点无矩和 $M_C = 0$ 。因此取 DC 为隔离体, 求得 $M_{DC} = \frac{1}{2} qa^2$ 。上侧受拉。

例4 作图 2-4-11(a)所示结构 M 图。

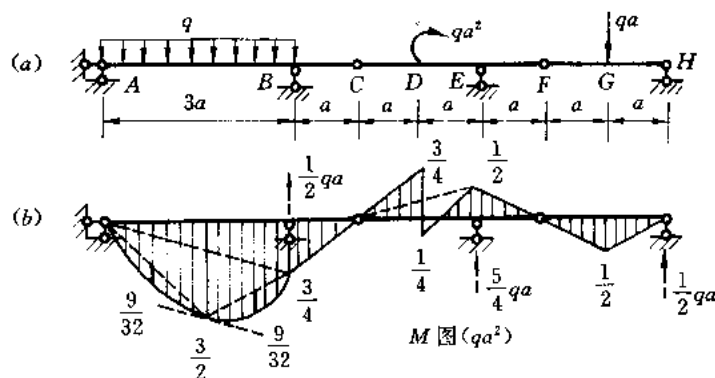


图 2-4-11

解 AC 段为基本部分,CF 段和 FH 段依次为附属部分。因此梁 FH 相当简支梁跨中受集中荷载,即 $M_G = \frac{qa}{4}(2a) = \frac{1}{2}qa^2$,下侧受拉;因 EG 段无外力, M 图应为直线,且 $M_E = 0$,故 $M_F = \frac{1}{2}qa^2$,上侧受拉;已知 M_E 和 $M_C = 0$,CE 段按分段叠加法作 M 图,得 $M_{DC} = \frac{3}{4}qa^2$,上侧受拉, $M_{DE} = \frac{1}{4}qa^2$,下侧受拉;因 BD 段无荷载,且 $M_C = 0$,故 $M_B = \frac{3}{4}qa^2$;已知 M_B 和 $M_A (=0)$,AB 段可按分段叠加法作 M 图。整个结构 M 图如图(b)所示。

从 M 图可以看出,所有支座反力都是向上,因而各支座处 M 图均有折点,且均凸向上。

例5 作图 2-4-12(a)所示结构的 M 图。

解 支座 A 和 E 均为定向支座,可能存在力偶支反力,但 A 无水平反力,E 无竖向反力。因 DE 段无剪力, M 图应为水平线,且 $Q_C = P = 20\text{kN}$, $M_D = 20 \times 2 = 40\text{kN} \cdot \text{m}$,下侧受拉;因 BD 段无荷载,且 $M_C = 0$,故 $M_{BC} = 40\text{kN} \cdot \text{m}$,上侧受拉;B 点左右 M 有跳跃,从右到左下跳 $80\text{kN} \cdot \text{m}$,得 $M_{BA} = 40\text{kN} \cdot \text{m}$,下侧受拉;因 AB 段和 BC 段 M 图相互平行(AC 段剪力为常数)故 $M_A = 0$ 。整个结构 M 图如图(b)所示。

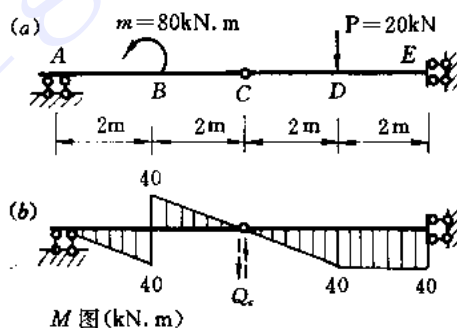


图 2-4-12

2-5 仅仅已知静定梁的弯矩图,能否求得与其相应的荷载?

能,但有时不能唯一确定。因为:(1)静定结构内力只与荷载有关,有弯矩图,必有荷载存在;(2)静定结构内力可由平衡条件确定,即与弯矩图相应的荷载可由平衡条件求得;(3)不能确定与 M 图无关的荷载。

求法可分为两步:

1. 把结构分成诸杆段，由平衡条件(通常可用分段叠加法作 M 图原理)确定段间荷载和杆段端截面剪力；

2. 由杆段相交的结点的平衡条件，确定作用各结点上的荷载。

例1 图 2-5-1(a)示一简支梁 M 图，曲线部分为二次抛物线，试确定其所受荷载。

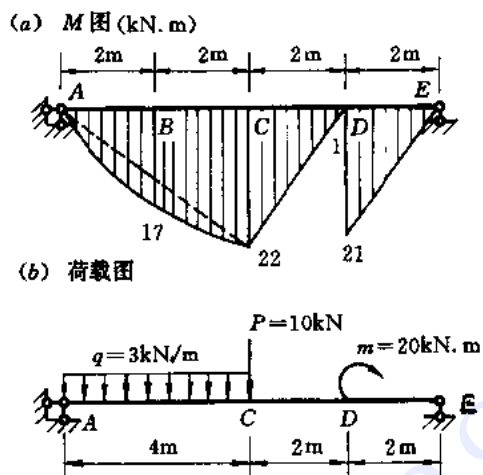


图 2-5-1

解 1. 最简单的分段就是根据 M 图斜率有突变点和曲线与直线相交点划分。在这里就是 C 点，亦即分 AC 和 CE 两段。对 AC 段，因 M 图是二次抛物线，且凸向下，故有向下均布荷载 q 作用，由分段叠加法，有

$$\frac{1}{8}q \cdot 4^2 = 17 - \frac{22}{2}$$

求得 $q=3\text{kN/m}$ ，进而求得

$$Q_{CA} = \frac{1}{4} \left(22 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4^2 \right) = -0.5\text{kN}$$

对 CE 段，因 D 点弯矩跳跃值为 $21-1=20\text{kN} \cdot \text{m}$ ，故 D 点有顺时针集中力偶 $m=20\text{kN} \cdot \text{m}$ ，进而求得

$$Q_{CE} = \frac{1}{4} (-22 - 20) = -10.5\text{kN}$$

2. 从 M 图中 C 点有凸向下的折点，可确定有向下的集中力 P 作用。由 C 点微段的剪力平衡条件可求出作用于 C 点的集中力 $P=10.5-0.5=10\text{kN} \downarrow$ 。

与 M 图相应的一组荷载如图(b)所示。这里请读者注意，当 C 点作用斜向集中力时，只要它的竖向分力 $P=10\text{kN} \downarrow$ ，其 M 图与图 2-5-1(a) 相同，而其水平分量不能确定。

例2 图 2-5-2(a) 示一静定多跨梁的 M 图，其中 BC 段为二次抛物线且 C 点 M 图斜率无突变，试确定其所受荷载。

解 分段前不妨先根据内力与荷载关系对与 M 图相应荷载作定性分析。因 $M_{B,A} = 60\text{kN} \cdot \text{m}$ ，在 A 点必有向下集中力 $P_1 = 20\text{kN} \downarrow$ ；因 B 处 M 有折点，且凸向上，必有向上集中力(如支座反力 R_B)；因 BC 段 M 图为凸向下的二次抛物线，则有向下均布荷载 q ，因

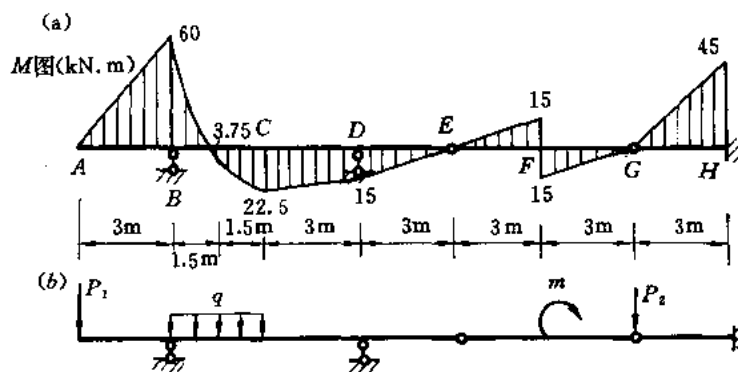


图 2-5-2

D 处有折点，凸向下，应有向下集中力（如支座反力 $R_D \downarrow$ ）；因 F 点 M 图有跳跃，应有集中力偶 $m = 15 + 15 = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ；因 G 处 M 图有折点，凸向下，应有向下集中力 $P_2 \downarrow$ 。作了上述分析之后，当只求荷载 P_2 和 q 时，可只考虑 BC 和 FH 两段。

对于 BC 段，根据分段叠加法作 M 图，有

$$\frac{q}{8} \times 3^2 = 3.75 + \frac{1}{2}(60 - 22.5)$$

求得 $q = 20 \text{ kN/m}$ 。对于 FH 段，有

$$\frac{P_2}{4} \times 6 = 0 + \frac{1}{2}(45 - 15)$$

求得 $P_2 = 10 \text{ kN}$ 。于是与 M 图相应的一组荷载如图 (b) 所示。

应当指出，只知 M 图还确定不了作用在支座处的集中力，只能唯一确定它们与支反力的合力。所以说能确定与 M 图相应的一组荷载但不是唯一的（指支座处力）。如果再知道剪力和轴力图，才可唯一确定相应荷载。

2-6 如何利用对称性进行静定结构内力分析？

静定结构在荷载作用下内力解答与杆件刚度分布无关，因此只要结构外形和支承情况对称，在进行内力分析时就可以利用对称性。

对称结构在对（反对）称荷载下，约束力分布是对（反对）称的。利用这种性质，对求解约束力会获得方便，如图 2-4-10(a) 的求解。

例 1 作图 2-6-1(a) 所示结构内力图，求支座反力。

解 此为对称结构受对称荷载，则约束力分布应是对称。C 点在对称轴上，而剪力 Q_c 是反对称的，如图 (c) 中所示，在这里必为零。于是，取 AC 为隔离体，由 $\sum m_B = 0$ ，有 $R_A = 0$ 。这样，不难得出如图 (b) 和图 (c) 所示的 M 和 Q 图，且轴力为零， $R_B = R_D = 2qa$ 。

例 2 求图 2-6-2(a) 所示静定桁架的各杆轴力， $P_1 = P_2 = 6 \text{ kN}$ 。

解 因是对称结构，把荷载分成两组：对称荷载 P_2 和反对称荷载 P_1 。分别求解后再叠加。

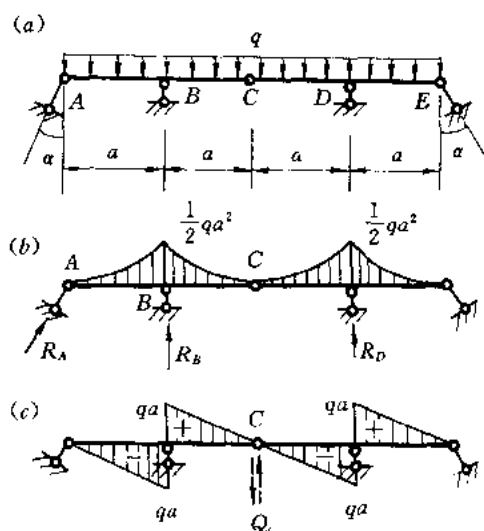


图 2-6-1

由结点 A、B 判定零杆，可知 $N_{AC} = N_{BC} = 0$ 。

对于图 (b)，因荷载反对称，若杆 CD 和杆 CE 轴力存在，必是一个受拉另一个受压，且数值相等。但这样不满足结点 C 水平力平衡，因此必有 $N_{CD} = N_{CE} = 0$ 。余下不难求得如图 (b) 中所示其它各杆轴力。

对于图 (c)，因荷载对称，杆 CD 和 CE 的轴力应相等。取结点 (c)，由 $\sum Y = 0$ ，不难求得 N_{CD} 和 N_{CE} 。图 (c) 各杆轴力如图中所示。

最后叠加结果如图 (d) 所示。

例 3 试求图 2-6-3(a) 所示桁架的轴力 N_1 和 N_2 。

解 此结构为复杂桁架，不对称（因支座 A 和 C 不同），一般可用初参数法求得各杆轴力，但计算量大。这里可利用对称性求解。

显然，支座 A 水平反力 $X_A = P$ ，向左。把它看成外力。于是把所有外力变成图 (b) 和图 (c) 的叠加。图 (b) 中，根据静定结构局部平衡性（在荷载作用下，如果静定结构中某一局部可以与荷载维持平衡，则其余部分内力必为零），可知上弦杆轴力均为 $-\frac{P}{2}$ ，下弦杆轴力

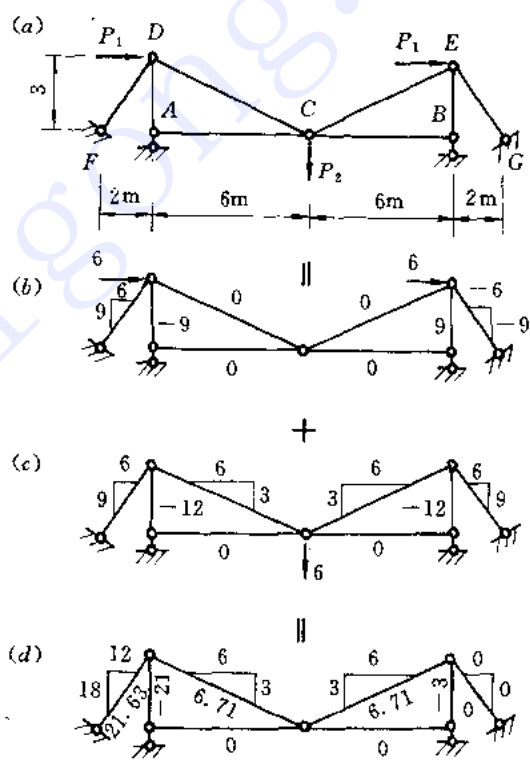


图 2-6-2

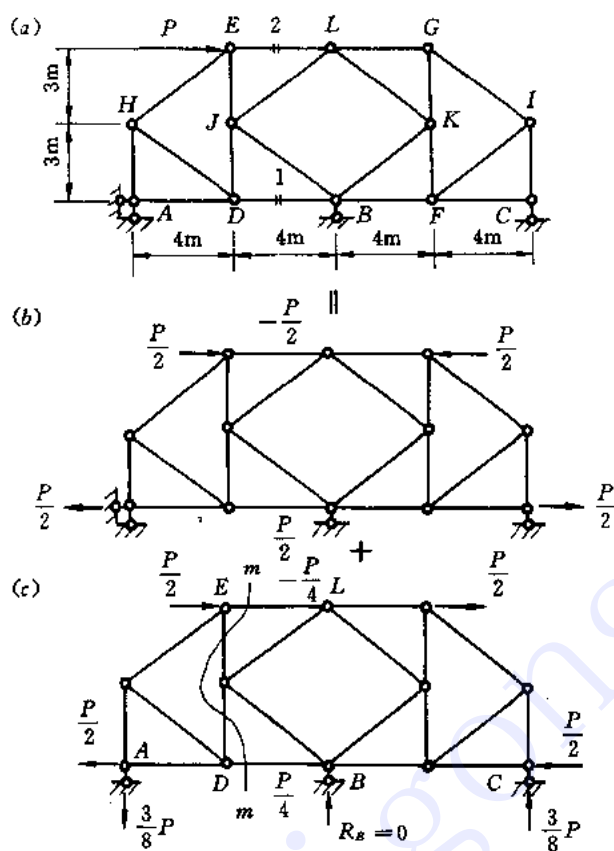


图 2-6-3

均为 $\frac{P}{2}$ ，腹杆无轴力。图(c)为对称结构受反对称荷载，轴力分布应为反对称。这样有 $N_{BJ} = -N_{BK}$ (反对称)，则由结点 B 的平衡条件 $\sum Y = 0$ ，得 $R_B = 0$ ，或者说，因 R_B 是对称约束力，在反对称荷载下必为零。于是由

$$\sum m_A = 0, \text{ 得 } R_C = \frac{3}{8}P \uparrow$$

$$\sum m_C = 0, \text{ 得 } Y_A = -\frac{3}{8}P \downarrow$$

再作截面 $m-m$ ，取其左部为隔离体，由

$$\sum m_E = 0, \text{ 得 } N_{BD} = \frac{P}{4}$$

$$\sum m_D = 0, \text{ 得 } N_{EL} = -\frac{P}{4}$$

两部分相加，最后得 $N_1 = \frac{3}{4}P$ ， $N_2 = -\frac{3}{4}P$

利用对称性的其它例子可见 2-8。

从上面讨论可以看出，利用对称性对静定结构进行受力分析常常可用下列基本手段使计算简化。

1. 内力分布的对称性,使计算量减少一半;

2. 对称轴上的未知约束力分为对称和反对称两组。在对(反对)称荷载下,其反对(对)称未知力为零,如图 2-6-1(a)的 Q_c 是反对称约束力,在对称荷载下为零,图 2-6-3(a)的 R_B 是对称约束力,在反对称荷载下为零。

3. 利用对称轴上诸截面的未知约束力分布的对称性,使计算简化,如计算图 2-6-2(c)中的 $N_{CD,y}$ 和 $N_{CE,y}$ 。

顺便指出,在画内力图时,对称结构在对(反对)称荷载下,弯矩图和轴力图的图形是对(反对)称的;剪力分布也是对(反对)称的,但因剪力符号规定统一为对邻近截面顺时针转向为正剪力,故剪力图是反对(对)称的。

2-7 求静定平面桁架各杆轴力时能不解联立方程吗?

除某些复杂桁架外,一般可以做到不解联立方程求出各杆轴力。

静定平面桁架结点数 j 与链杆(包括支杆)数 b 的关系为 $2j=b$ 。若仅仅采用结点法,共有 $2j$ 个平衡方程,而未知约束力个数为 b 。因此总是可以求得各杆轴力和支座反力。但有时需求解大型联立方程(如对联合桁架和复杂桁架)。为了避免求解大型联立方程,对于联合桁架,配以截面法,对于复杂桁架,则可采用通路法(详见 2-11)。其目的就是为了节省计算时间。有了这些,是否不解二元联立方程就能求出所有未知力呢?常常看到初学者没能如愿。一般说,应尽量做到选用一个方程即求出一个未知力。

为了避免求解二元联立方程,除了按与几何构造相反顺序截取隔离体外,还常采用下列手段:

1. 利用对称性(详见 2-6)。
2. 对比力多边形与原桁架几何形状,找出各力之间比例关系。常用在三力汇交力系。
3. 采用对任意两个互不平行的轴的“投影”方程,把已知力向此两轴分解。如图 2-7-1 所示。已知 P_1, P_2 , 求 N_1, N_2 , 把 P 向 r, s 轴分解 P_r, P_s , 再由

$$\sum r = 0, \text{ 得 } N_2 = -P_r$$

$$\sum s = 0, \text{ 得 } N_1 = P_s$$

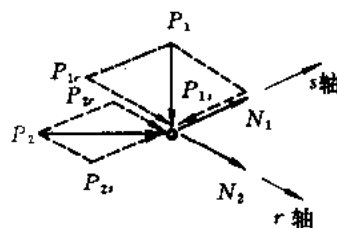


图 2-7-1

已知力这样分解常常利用原桁架几何尺寸很便当地得到。

那么为什么利用两不正交的“投影”方程就能保持力系平衡

呢?这是因为若力系存在合力 R (不平衡),当满足 $\sum r = 0$ 时,说明 R 只能沿 s 方向,再当满足 $\sum s = 0$,则 R 必为零(平衡)。

4. 平衡方程采用力矩式。适当选择矩心位置,使矩式方程中只包含一个未知力。在结点法中,每个结点未知力至多不超过两个,矩心可选在一个未知力的作用线上(不在汇交点);在截面法中,通常有三个未知力,矩心选在两个未知力交点,求得另一个未知力,若两未知力相互平行,则利用对垂直于该二力的轴的投影,求出另一个未知力。

5. 利用力的可传性。当研究隔离体平衡时,隔离体可看成刚体,其上作用的外力具有

可传性。把斜杆的轴力沿其作用线移到合适位置再分解，便于求力臂。

例 1 求图 2-7-2(a)所示桁架各杆轴力(不解联立方程)。

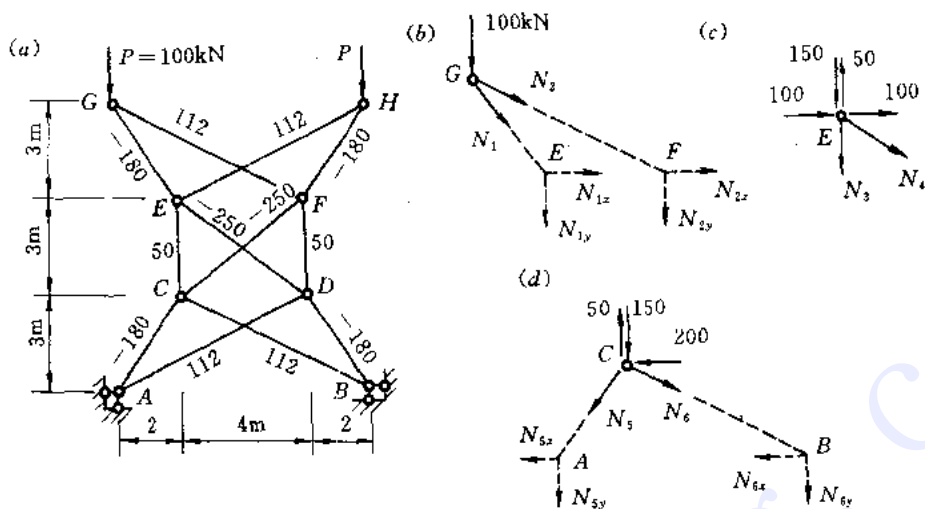


图 2-7-2

解 此简单桁架是由下而上逐个结点组成,解的顺序则应由上而下(逆构造顺序)截取结点,才能避免解联立方程)。因结构和荷载均对称,则轴力分布也对称。

取结点 G,其受力图如图(b)所示。若采用 $\sum X = 0, \sum Y = 0$, 需解二元联立方程。现由 $\sum m_F = 0$, 求得

$$N_{1y} = \frac{1}{4}(-100 \times 6) = -150 \text{ kN}$$

由几何关系
$$N_{1x} = \frac{2}{3}N_{1y} = -100 \text{ kN}$$

则
$$N_1 = -\sqrt{(150^2 + 100^2)^{0.5}} = -180 \text{ kN (压)}$$

由 $\sum m_E = 0$, 得 $N_{2y} = \frac{1}{4}(100 \times 2) = 50 \text{ kN}, N_{2x} = \frac{b}{3}N_{2y} = 100 \text{ kN}, N_2 = 112 \text{ kN (拉)}$

取结点 E,其受力图如图(c)所示,由

$$\sum X = 0, \text{ 得 } N_{4x} = -200 \text{ kN}, N_{4y} = \frac{3}{4}N_{4x} = -150 \text{ kN}, N_4 = -250 \text{ kN (压)}$$

取结点 C,其受力图如图(d)所示,由

$$\sum m_B = 0, \text{ 得 } N_{5y} = -150 \text{ kN}, N_{5x} = -100 \text{ kN}, N_5 = -180 \text{ kN (压)}$$

$$\sum m_A = 0, \text{ 得 } N_{6y} = 50 \text{ kN}, N_{6x} = 100 \text{ kN}, N_6 = 112 \text{ kN (拉)}$$

各杆轴力如图 2-7-2(a)中所示,单位为 kN。

例 2 图 2-7-3(a)示一复杂桁架,试求各杆轴力。

解 因 C 支座反力 $X_C = 0$, 则此体系可看成对称结构受反对称荷载。由于支座反力 Y_B 是对称未知力,在反对称荷载下 $Y_B = 0$, 由此有 $N_{BD} = N_{BE} = 0$ 。

由 $\sum m_A = 0$, 得 $Y_C = \frac{2}{3}P \uparrow$; $\sum m_C = 0$, 得 $R_A = -\frac{2}{3}P \downarrow$ 。

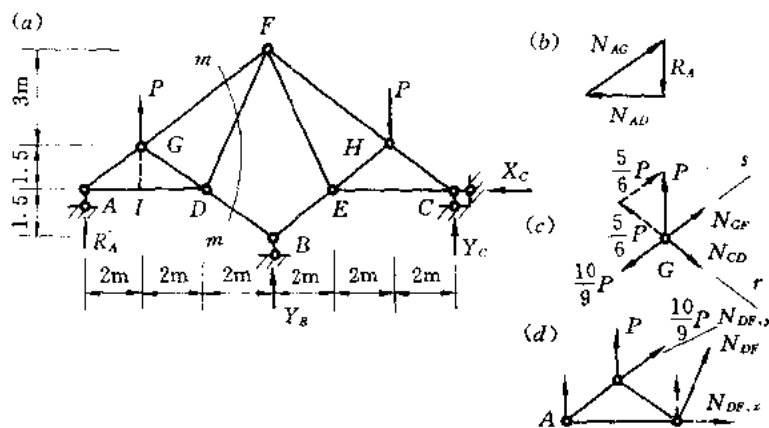


图 2-7-3

取结点 A, 因 R_A , N_{AD} 和 N_{AG} 的三角形与图(a)中 AGI 三角形相似, 如图(b)所示, 则有

$$N_{AD} = -\frac{2}{1.5} \frac{2}{3} P = -\frac{8}{9} P \text{ (压)}$$

$$N_{AG} = \frac{2.5}{1.5} \frac{2}{3} P = \frac{10}{9} P \text{ (拉)}$$

取结点 G, 其受力图如图(c)所示, 若采用 $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, 需解二元联立方程。为此采用 $\sum r = 0$, 和 $\sum s = 0$ 。把荷载 P 分解成 r, s 两方向分力, 由

$$\sum r = 0, \text{ 得 } N_{GD} = \frac{5}{6} P \text{ (压)}; \sum s = 0, \text{ 得 } N_{GF} = \frac{10}{9} P - \frac{5}{6} P = \frac{5}{18} P \text{ (拉)}$$

作 $m-m$ 截面, 取其左半部为隔离体, 其受力图如图(d)所示, 由

$$\sum m_A = 0, \text{ 得 } N_{DF,y} = \frac{1}{4} (-P \times 2) = -\frac{P}{2}$$

由几何关系得
$$N_{DF} = \frac{\sqrt{97}}{9} N_{DF,y} = -\frac{\sqrt{97}}{18} P \text{ (压)}$$

2-8 在荷载作用下曲杆内力图有何特点?

要了解曲杆在荷载下内力具有哪些特点, 就要研究曲杆内力与荷载之间关系。

1. 曲杆内力与荷载之间的微分关系

从曲杆中取出微段, 其受力图如图 2-8-1 所示, 其中

R ——微段杆轴曲率半径;

$d\varphi$ ——微段两端面夹角;

$ds = R d\varphi$ ——微段杆轴长度;

s, r ——杆轴的切线和法线方向;

q_s, q_r ——沿 s 和 r 方向的分布荷载集度。

由 $\sum s = 0$, 有

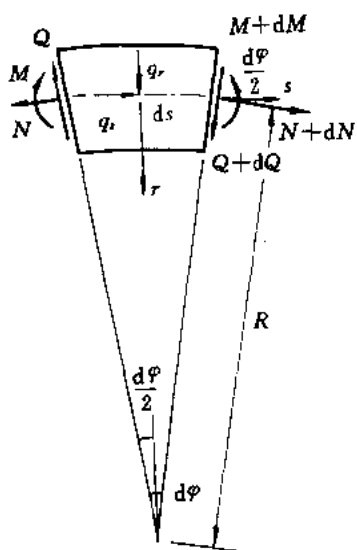


图 2-8-1

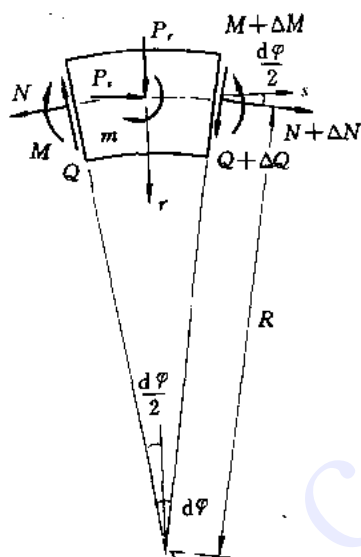


图 2-8-2

$$(N + dN)\cos \frac{d\varphi}{2} - N\cos \frac{d\varphi}{2} - (Q + dQ)\sin \frac{d\varphi}{2} - Q\sin \frac{d\varphi}{2} + q_r ds = 0$$

因 $d\varphi$ 微小, 可令 $\cos \frac{d\varphi}{2} = 1, \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$, 则有

$$dN - Qd\varphi - dQ \frac{d\varphi}{2} + q_r ds = 0$$

忽略高阶微量并考虑到 $ds = R d\varphi$, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{ds} &= \frac{Q}{R} = -q_r \\ \frac{dQ}{ds} &= -\frac{N}{R} - q_r \\ \text{由 } \sum m = 0, \text{ 有} \quad \frac{dM}{ds} &= Q \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

式(a)就是曲杆内力与荷载的一阶微分关系, 由此可求得(注意这里 M, N, Q, R, q_r 和 q_r 都是 s 的函数)二阶微分关系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 M}{ds^2} &= -\frac{N}{R} - q_r \\ \frac{d^2 N}{ds^2} &= -\frac{N}{R^2} - \frac{q_r}{R} - \frac{Q}{R^2} \frac{dR}{ds} - \frac{dq_r}{ds} \\ \frac{d^2 Q}{ds^2} &= -\frac{Q}{R^2} + \frac{q_r}{R} + \frac{N}{R^2} \frac{dR}{ds} - \frac{dq_r}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

2. 曲杆内力与荷载的增量关系

如图 2-8-2 所示, 其中 P_r, P_r 为作用在微段上沿 s 和 r 方向的集中力, m 为集中力偶。

由 $\sum r = 0$, 有

$$-Q\cos \frac{d\varphi}{2} + (Q + \Delta Q)\cos \frac{d\varphi}{2} + (2N + \Delta N)\sin \frac{d\varphi}{2} + P_r = 0$$

因 $d\varphi$ 微小, 令 $\cos \frac{d\varphi}{2} = 1, \sin \frac{d\varphi}{2} = 0$, 得

$$\left. \begin{array}{l} \text{同理由 } \sum s = 0, \text{ 得} \\ \text{由 } \sum m = 0, \text{ 得} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta Q = -P_r \\ \Delta N = -P_t \\ \Delta M = m \end{array} \quad (c)$$

式(c)就是曲杆内力与荷载的增量关系。

根据式(a)、(b)和(c), 以弧长 s 为横坐标(基线)的曲杆内力图具有下列特点(s 向右为正)。

对于 M 图(M 图竖标向下为正):

(1) 一般均为曲线(包括无荷载段), 因 $\frac{dM}{ds} = Q$, 而 $Q(s)$ 一般不为常数;

(2) $Q=0$ 的截面, 该处 M 为极值;

(3) 集中力偶 m 作用处, M 图有跳跃, 跳跃值等于 m ;

(4) Q 图跳跃处, 该处 M 图有折点, 因其两侧斜率不等;

(5) M 图的凸性取决于 $-\frac{N}{R} - q_r$ 值的正负, 其值为正(负)时, M 图向上(下)凸, 因为

$$\frac{d^2M}{ds^2} = -\frac{N}{R} - q_r$$

对于 Q 图(Q 竖标向上为正):

(1) 一般均为曲线, 因 $\frac{dQ}{ds} = -\frac{N}{R} - q_r$, 而 N 一般不等于常数;

(2) 集中力作用处, Q 图有跳跃, 跳跃值等于该集中力在杆轴法向分量 P_r 。

(3) 在 $-\frac{N}{R} - q_r = 0$ 处, Q 为极值。

(4) Q 图的凸性取决于 $\frac{d^2Q}{ds^2} = -\frac{Q}{R^2} + \frac{N}{R^2} \frac{dR}{ds} + \frac{q_r}{R} - \frac{dq_r}{ds}$ 值的正负, 其值为正(负)时, Q 图向下(上)凸。

对于 N 图(N 竖标向上为正):

(1) 一般为曲线, 因 $\frac{dN}{ds} = \frac{Q}{R} - q_t$ 。

(2) 集中力作用处, N 图有跳跃, 跳跃值等于该集中力在杆轴切线方向分量 P_t 。

(3) 在 $\frac{Q}{R} - q_t = 0$ 处, N 为极值。

(4) N 图凸性取决于 $\frac{d^2N}{ds^2} = -\frac{N}{R^2} - \frac{q_r}{R} - \frac{Q}{R^2} \frac{dR}{ds} - \frac{dq_t}{ds}$ 值的正负, 其值为正(负)时, N 图向下(上)凸。

例 图 2-8-3 示一三铰拱, 轴线为半圆弧, 试作以弧长为基线的内力图, 并说明内力图有哪些特点。

解 几何参数: $R=6\text{m}, \frac{dR}{ds}=0$, 沿弧长将拱八等分, 每段弧长为 $\frac{\pi R}{8}=2.356\text{m}$ 。

反力计算: (图中虚箭头为 q_r 的合成力)

$$\text{由 } \sum m_B = 0, \text{ 得 } V_A = \frac{1}{12}(-20 - 20 \times 6 + 6 \times 6) = -8.67\text{kN} \downarrow$$

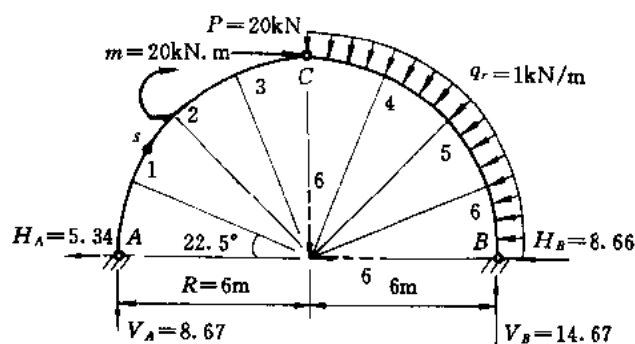


图 2-8-3

$$\sum m_A = 0, \text{ 得 } V_B = \frac{1}{12}(20 + 20 \times 6 + 6 \times 6) = 14.67 \text{ kN } \uparrow$$

$$\sum m_C = 0 \text{ (左半部) 得}$$

$$H_A = \frac{1}{6}(-8.67 \times 6 + 20) = -5.34 \text{ kN } \rightarrow$$

$$\sum X = 0, \text{ 得 } H_B = -5.34 - 6 + 20 = 8.66 \text{ kN } \leftarrow$$

内力计算: 结果见表 2-8-1。

表 2-8-1

截面号	A	2		3	C		4	5	6	B
		左	右		左	右				
M (kN·m)	0	8.30	7.42 27.42	17.49	0	-15.95	-21.55	-15.98	0	
Q (kN)	5.34	1.62	-2.35	5.97	-8.67	-4.69	0	4.69	8.66	
N (kN)	8.67	10.05	9.93	8.25	5.34 -14.66	-17.32	-18.26	-17.32	-14.67	
$-\frac{N}{R} - q_r$	$-\frac{8.67}{6}$	$-\frac{10.05}{6}$	$-\frac{9.93}{6}$	$-\frac{8.25}{6}$	$-\frac{5.34}{6} \frac{14.66}{6}$	$\frac{17.32}{6} - 1$	$\frac{18.26}{6} - 1$	$\frac{17.32}{6} - 1$	$\frac{14.67}{6} - 1$	

内力图如图 2-8-4 所示。

因 $R = \text{常数}$, q_r 为常数或为 0。 $q_r = 0$, 则内力与荷载关系成为

$$\frac{dM}{ds} = Q, \quad \frac{dQ}{ds} = -\frac{N}{R} - q_r, \quad \frac{dN}{ds} = \frac{Q}{R}$$

$$\frac{d^2M}{ds^2} = -\frac{N}{R} - q_r, \quad \frac{d^2Q}{ds^2} = -\frac{Q}{R^2}, \quad \frac{d^2N}{ds^2} = \frac{1}{R} \left(-\frac{N}{R} - q_r \right)$$

根据这些关系讨论内力图特点:

M 图: 左半部因 $-\frac{N}{R} - q_r < 0$ (表 2-8-1), M 图向下凸; 截面 1 与 2 之间和截面 5 有 $Q = 0$, M 图在该区间内和该处有极值点; 截面 2 左右 M 图跳跃; 截面 C 处虽有集中力 P, 但

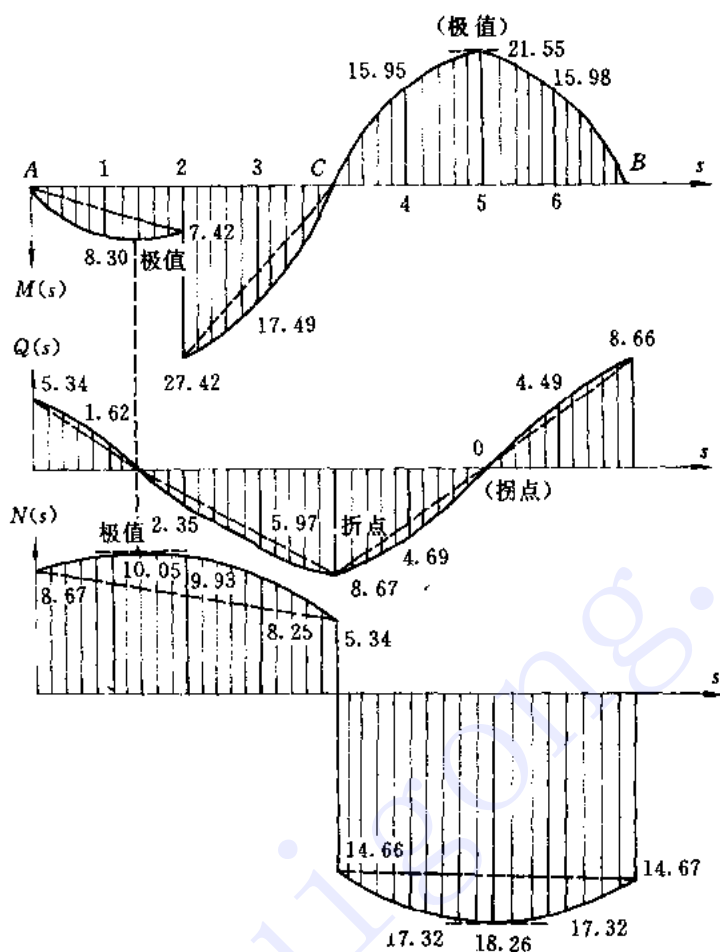


图 2-8-4

其沿法向分力为零，即该处 Q 图无跳跃，故 M 图在该处仍为光滑曲线，无折点。

Q 图： Q 图凸性取决于 Q 值本身正负。 $Q > 0$ ， Q 图向上凸， $Q < 0$ ，向下凸， $Q = 0$ 处均为拐点。如图中所示。因 $-\frac{N}{R} - q \neq 0$ ，故 Q 图无极值点；但在 C 处两边 $-\frac{N}{R} - q$ 变号，故 Q 图在 C 处有折点。

N 图： N 图凸性取决于 $-\frac{N}{R} - q$ 值的正负，其值为正，向下凸；为负，向上凸，如图中所示；在 1 与 2 间和 5，有 $Q = 0$ ，故在区间内和该点均有极值点； C 处 N 图有跳跃，跳跃值为 $P = 20\text{kN}$ 。

2-9 任意荷载下拱型结构都存在合理轴线吗？

在竖向荷载下存在水平支座反力的单跨结构，称拱型结构。对于三铰拱型结构，任意荷载下都存在与其相应的合理轴线；对于超静定拱型结构，在不考虑轴向变形和剪切变形时也存在合理轴线，但不唯一。

三铰拱型结构的合理轴线是指当三个铰位置和荷载(大小、方向和作用线)确定以后使各截面弯矩为零的轴线,或者说与压力线重合的轴线。在上述情况下,支座反力不因拱型结构轴线变化而改变,因此其压力线是唯一的,亦即只要三个铰位置确定,均存在与任意荷载相应的压力线,且是唯一的。

确定三铰拱型结构的合理轴线可用解析法和图解法。图解法是利用力多边形和索多边形作出压力线;解析法是通过平衡方程建立压力线方程。

图 2-9-1(a)中,已知 a 、 b 、 f_1 和 q ,即已知三个铰位置和荷载(大小、方向和作用线),试用解析法确定三铰拱型结构的合理轴线。

首先,由 $\sum M_A = 0$ 求得 $V_B = \frac{ql}{2} \uparrow$; 由 $\sum M_B = 0$ 求得 $V_A = \frac{ql}{2} \uparrow$ 。分别取截面 C 左侧与右侧隔离体,由 $\sum M_C = 0$ 求得

$$H_A = \frac{qab}{2f_1} \rightarrow$$

$$H_B = \frac{qab}{2f_1} \leftarrow$$

于是有 $M_x = \frac{ql}{2}x - \frac{qab}{2f_1} \cdot y - \frac{qx^2}{2}$

令 $M_x = 0$, 得到合理轴线方程

$$y = \frac{f_1}{ab}(lx - x^2)$$

此方程为二次抛物线。由 $\frac{dy}{dx} = 0$, 求得 $x = \frac{l}{2}$, 该处 y 值为 $\frac{f_1 l^2}{4ab}$ 。合理轴线如图(b)所示。

上述结果说明在全跨竖向均布荷载 q 作用下,不管铰 c 位置(取决于 f_1 、 a 或 b)如何,合理轴线均为二次抛物线,矢高 $f = \frac{f_1 l^2}{4ab}$ 。

图 2-9-2(a)示一三铰拱型结构,在左半部受一水平集中力 $P_1 = 20\text{kN}$,右半部受一竖

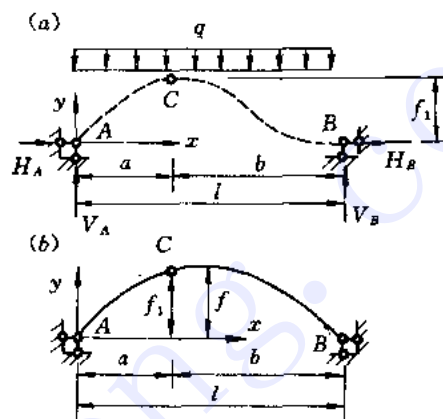


图 2-9-1

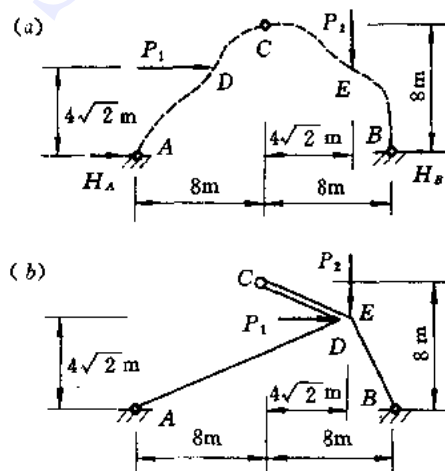


图 2-9-2

向集中力 $P_2=20\text{kN}$ 。试确定其合理轴线。

在这里，三铰位置已定，荷载的大小、方向和作用线已定（作用点在选择轴线上），其间结构轴线如何，不影响支座反力。由

$$\sum m_B = 0, \text{ 求得} \quad V_A = 10(1 - \sqrt{2})\text{kN} \downarrow$$

$$\sum m_C = 0 \text{ (左侧)}, \text{ 得} \quad H_A = -10\text{kN} \leftarrow$$

于是在 AD 段，各截面弯矩为

$$M_x = 10y + 10(1 - \sqrt{2})x$$

令 $M_x=0$ ，则此合理轴线方程为

$$y = (\sqrt{2} - 1)x$$

在 DC 和 CE 段，各截面弯矩为

$$M_x = 10y - 20(y - 4\sqrt{2}) + 10(1 - \sqrt{2})x$$

令 $M_x=0$ ，则此两段合理轴线为

$$y = (1 - \sqrt{2})x + 8\sqrt{2}$$

同理可求得 EB 段合理轴线方程为

$$y = -(1 + \sqrt{2})x + 16(1 + \sqrt{2})$$

整个结构的合理轴线如图(b)所示。

应当指出，在同样荷载下的三铰拱型结构，由于三铰相互位置不同，其合理轴线一般也就不同，这是因为水平支座反力不同，如图 2-9-3 所示。

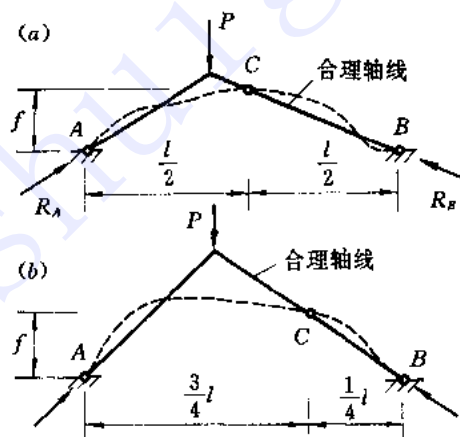


图 2-9-3

对于超静定拱型结构（两铰和无铰）当支座位置与荷载确定后，它也存在合理轴线，但不是唯一的。论证如下：对无铰的拱型结构，把两支座变成铰支座，在跨间任意设置一铰结点，成为三铰拱型结构，取荷载下此三铰拱型结构的合理轴线为原拱型结构的轴线，用力法求解，取该三铰拱型结构为基

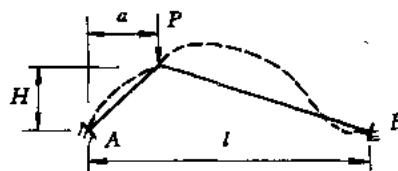


图 2-9-4

本结构,因 $M_p=0$,则力法方程中自由项 $\Delta_{ip}=0$ (忽略轴向和剪切变形),基本未知量 $X_1=0$ 。因此原拱型结构的弯矩 $M=M_p=0$,此轴线则为其合理轴线。但由于顶铰位置是任意的,故原结构的合理轴线不是唯一的。如图 2-9-4 中, H 取不等于零的任何值,都是合理轴线。

2-10 静定组合结构在受力上有何优点?

采用组合结构主要是为了减小梁式杆的弯矩,充分发挥材料强度,节省材料。减小梁式杆的弯矩主要是通过下面两点措施:(1) 减小梁式杆的跨长;(2) 使梁式杆某些截面产生负弯矩,以减小跨中正弯矩值。为便于讨论,不妨对图 2-10-1(a)和(b)所示结构的用材

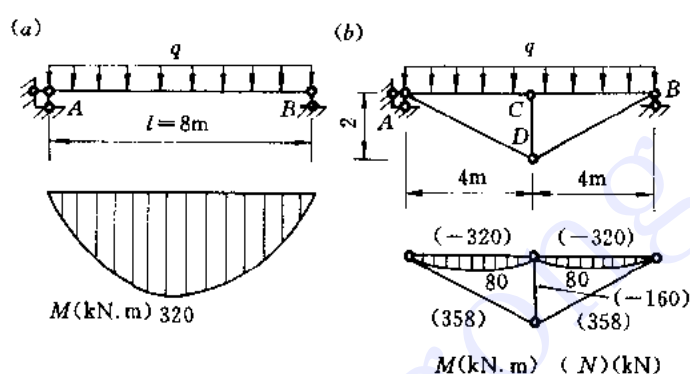


图 2-10-1

量作粗略比较。设材料均为钢材,允许应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$,杆件为等截面杆,均布荷载 $q=40\text{kN/m}$ 。

对图(a), $M_{\max}=320\text{kN}\cdot\text{m}$ 由

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{320 \times 10^3}{170 \times 10^6} \times 10^6 = 1882\text{cm}^3$$

选用 $\text{N}^{\circ}50\text{b}$ 工字钢,其 $W=1940\text{cm}^3$,截面积 $A=129\text{cm}^2$ 。使用钢材总体积 V_a ,

$$V_a = 8 \times 0.0129 = 0.1032\text{m}^3$$

对图(b), AC 和 CB 杆 $M_{\max}=80\text{kN}\cdot\text{m}$, $N=-320\text{kN}$ (压)

由试算选用 $\text{N}^{\circ}32\text{a}$ 工字钢, $W=692.2\text{cm}^3$, $A=67\text{cm}^2$,则

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W} + \frac{N}{A} = \left(\frac{80 \times 10^5}{692.2} + \frac{320 \times 10^3}{67} \right) \text{N/cm}^2 \\ &= 16330\text{N/cm}^2 = 163.3\text{MPa} < [\sigma] \end{aligned}$$

$$CD \text{ 杆截面积 } A_1 \quad A_1 = \frac{N_{CD}}{[\sigma]} = \frac{160 \times 10^3}{170 \times 10^6} = 0.00094\text{m}^2$$

$$AD \text{ 和 } BD \text{ 杆截面积 } A_2 \quad A_2 = \frac{358 \times 10^3}{170 \times 10^6} = 0.0021\text{m}^2$$

使用钢材总体积 V_b ,

$$V_b = 2 \times 4 \times 0.0067 + 2 \times 0.00094 + 2 \times \sqrt{20} \times 0.0021 = 0.0742\text{m}^3$$

采用组合结构比采用简支梁省材约 30%。

图 2-10-1(b)所示的组合结构还可用图 2-10-2 所示组合结构代替。它可以调整尺寸

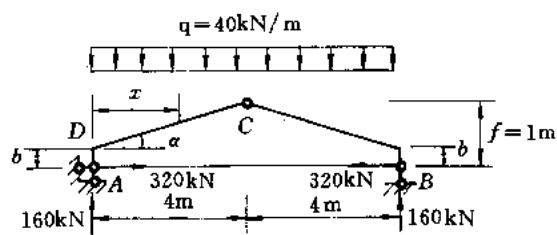


图 2-10-2

b , 使梁式杆弯矩最小, 就是使 D 点弯矩和 DC 杆间最大弯矩(设在 F 点) M_F 相等(绝对值), 即使 $|M_D| = |M_F|$ 。

为此, 设 b 和 α , 有

$$b = 1 - 4tga$$

因

$$N_{AB} = \frac{ql^2}{8f} = 320\text{kN}$$

则 DC 杆离支座 A 水平距离为 x 的截面弯矩为

$$M_x = 160x - \frac{40}{2}x^2 - 320(b + xtga)$$

由 $\frac{dM_x}{dx} = 0$, 求得

$$x = 4 - 8tga$$

则

$$M_F = 1280tg^2\alpha$$

而

$$M_D = 320b = 320 - 1280tga$$

由 $|M_D| = |M_F|$, 即

$$1280tg^2\alpha = 320 - 1280tga$$

解得

$$tga = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

则

$$b = 1 - 4tga = 3 - 2\sqrt{2}\text{m}$$

$$M_F = 1280tg^2\alpha = 54.9\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$x = 4 - 8tga = 2.34\text{m}$$

这里梁式杆最大弯矩(54.9)比图 2-10-1(b)梁式杆最大弯矩(80)小得很多。

图 2-10-3(a)所示的又一种形式的组合结构, 其内力如图(b)所示, 梁式杆最大弯矩(45kN·m)还小要。而且还可调整 AD 和 CD 距离, 使 $|M_D| = |M_F|$, 这样梁式杆的最大弯矩还可减小。

上面主要从梁式杆的弯矩大小讨论为什么采用组合结构以及各种形式组合

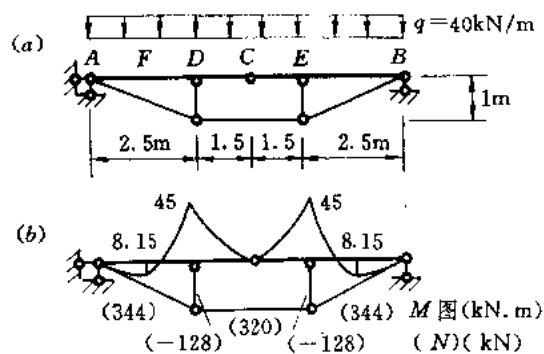


图 2-10-3

结构的比较。但应该注意，与简支梁相比，组合结构杆件多、结点多，制造比较麻烦。对于中等跨度(8m左右)，可考虑选择组合结构，获得较好的经济效益。

2-11 什么叫做复杂桁架？如何求解其内力？

在静定桁架中，简单桁架每取一个结点即可顺利解出各杆内力(不解联立方程)；联合桁架用截面法(或同时用结点法)即可求出各杆轴力。而用结点法和截面法不能顺利求得各杆轴力的桁架称为复杂桁架。如图 2-11-1 所示均为复杂桁架。这种桁架的几何构造特点有的可用三角形规律进行分析(约束多包含有瞬铰)，如图(a)、(b)和(c)；有的则不能，如图(d)和(e)。

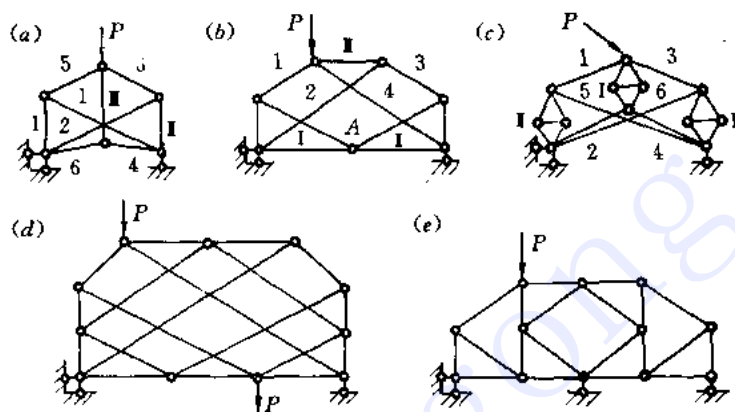


图 2-11-1

计算复杂桁架内力时，如用结点法，每个结点未知力必多于两个；如用截面法，则每个截面上未知力必多于三个，必需解大型联立方程，才能求得各杆轴力，计算量太大(手算)。

下面介绍求解复杂桁架三种方法：初参数法(通路法)、杆件替代法(L. Henneberg 法)和虚位移法。

图 2-11-2 示一复杂桁架，试求各杆轴力。

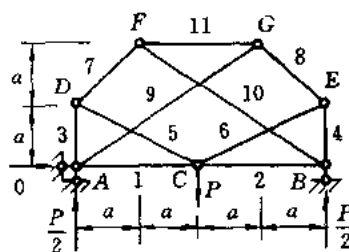


图 2-11-2

本例可利用对称性。由结点 C，求得 $N_5 = N_6 = \frac{\sqrt{5}}{2}P$ ，继而取结点 E、B 和 G 算出其它各杆轴力。为了与下面讨论的方法计算结果比较，表 2-11-1 列出各杆轴力。

表 2-11-1

杆号	1,2	3,4	5,6	7,8	9,10	11
轴力(P)	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$-\frac{5}{2}$
杆长	2a	a	$\sqrt{5}a$	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{13}a$	2a

1. 初参数法(通路法)

从三杆相交的结点中取任一杆轴力作为初参数 x (待定), 由此结点出发, 沿可用结点法求解的一个回路依次取结点算出各杆轴力与 x 的关系, 最后利用闭合条件求出 x 后, 再计算其余各杆轴力。

在这里, 设 $N_4 = x$, 依次取结点 E, G, F 和 B 。

由结点 E , 求得 $N_8 = \frac{2}{3}\sqrt{2}x, \quad N_6 = -\frac{\sqrt{5}}{3}x;$

结点 G , 求得 $N_{11} = \frac{5}{3}x, \quad N_9 = -\frac{\sqrt{13}}{3}x;$

结点 F , 求得 $N_{10} = -\frac{\sqrt{13}}{3}x, \quad N_7 = \frac{2}{3}\sqrt{2}x;$

结点 B , 求得 $N_4 = \frac{2}{3}x - \frac{P}{2}, \quad N_2 = x$

根据闭合条件(这里杆 4 轴力从结点 E 经 G, F 到 B 所求的应该相等), 有

$$X = \frac{2}{3}X - \frac{P}{2}$$

求得 $X = -\frac{3}{2}P = N_4$

已知 N_4 后, 可求出其余各杆轴力, 结果与表 2-11-1 的结果相同。

2. 杆件替代法(海纳堡法)

此法是利用更换杆件连接部位使复杂桁架变成简单桁架, 并使新桁架与原桁架等价(各杆轴力相同)以求得原桁架各杆轴力。例如图 2-11-1 变换为图 2-11-3(a)所示的简单桁架(把 AG 杆改为 CF 杆)。如果使新桁架在原有荷载和 N_4 (真值)共同作用下使新杆轴

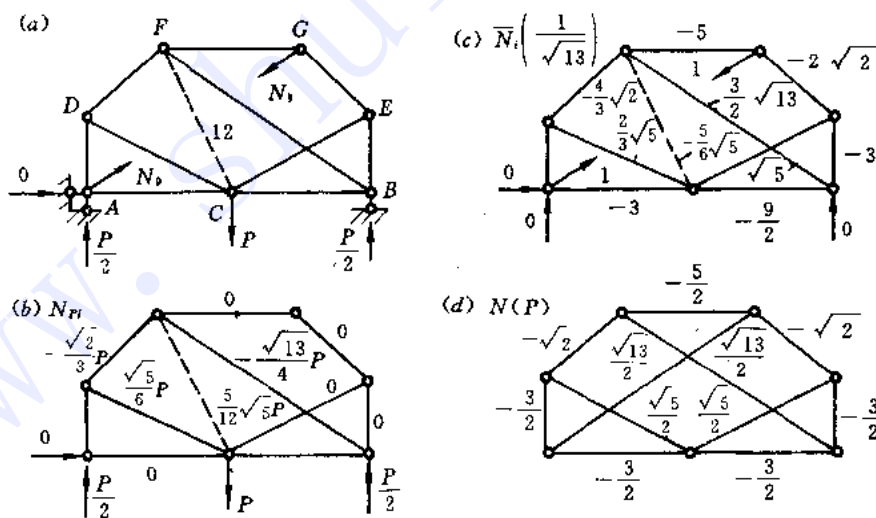


图 2-11-3

力 N_{CF} 为零, 那么根据静定内力解答唯一性, 新桁架的各杆轴力就是原桁架各杆轴力。下面结合本例讨论具体计算步骤。

(1) 分别求新桁架在原荷载单独作用下和在替换杆的轴力为单位力作用下各杆的轴力 N_{Pi} 和 \bar{N}_i 。本例如图(b)和图(c)所示。

(2) 建立 $N_{PJ} + \bar{N}_j N_b = 0$
求得 N_b ，其中 J 为替换杆序号， b 为被替换杆序号。本例 J 为 12， b 为 9，即建立

$$N_{F12} + \bar{N}_{12} N_9 = 0 \rightarrow \frac{5}{12} \sqrt{5} P - \frac{5}{6} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} N_9 = 0$$

求得
$$N_9 = \frac{\sqrt{13}}{2} P$$

(3) 按
$$N_i = N_{Pi} + \bar{N}_i \cdot N_b$$

求得原桁架各杆轴力 N_i ，本例结果如图(d)所示，与表 2-2 所得结果相同。

3. 虚位移法

欲求某杆轴力时，撤去该杆代以约束力，使结构变成一个自由度体系；给此体系以虚位移，计算沿荷载方向和欲求的轴力方向的虚位移；建立虚功方程，解出欲求杆的轴力。

现以求图 2-11-2 的杆 11(FG 杆)轴力为例。为此，撤去杆 11，代以约束力 N_{11} ，成为图 2-11-4 所示的一个自由度体系；给 C 点虚位移 $\delta_c \downarrow$ ，则 D 点虚位移 $\delta_D = \frac{1}{2} \delta_c \rightarrow$ ，这时 B 点保持不动，则 DF 杆的瞬心在 AD 杆和 BF 杆的交点 O ，于是 F 点的水平虚位移 δ_{Fx} 由

$$\frac{\delta_D}{\left(1 + \frac{2}{3}\right)a} = \frac{\delta_{Fx}}{\frac{2}{3}a}$$

求得 $\delta_{Fx} = \frac{2}{5} \delta_D = \frac{1}{5} \delta_c \rightarrow$ ，同理 $\delta_E = \frac{1}{2} \delta_c \leftarrow$ ， $\delta_{Gx} = \frac{1}{5} \delta_c \leftarrow$ ，

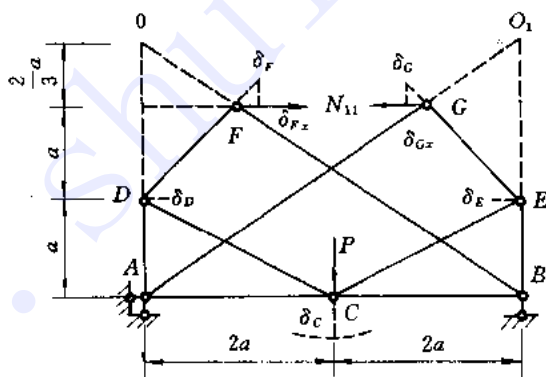


图 2-11-4

由刚体系虚功方程

$$P \delta_c + N_{11} (\delta_{Fx} + \delta_{Gx}) = 0$$

求得
$$N_{11} = -\frac{5}{2} P$$

求出 N_{11} 后就可按结点法顺利地求出其余各杆轴力。

在上述求解复杂桁架的三种方法中，初参数法是较为有效的；杆件替代法在计算上并

无困难，但工作量大些；虚位移法如果虚位移计算简单，也是一种很好的方法，但有的虚位移计算较为麻烦。

2-12 如何选择静定桁架的合理外形与腹杆布置？

确定桁架形式的因素很多，这里主要从受力角度讨论。大家知道，凡是梁式杆件，当弯矩比较大时，一般可用桁架代替。而桁架的弦杆受力主要形成抗弯能力，腹杆受力主要形成抗剪能力。如图 2-12-1(a)所示的简支梁，当荷载和跨度比较大时，宜选用如图(b)所示的简支桁架来代替，这样可以充分发挥材料作用。从图 2-12-1 可看出：

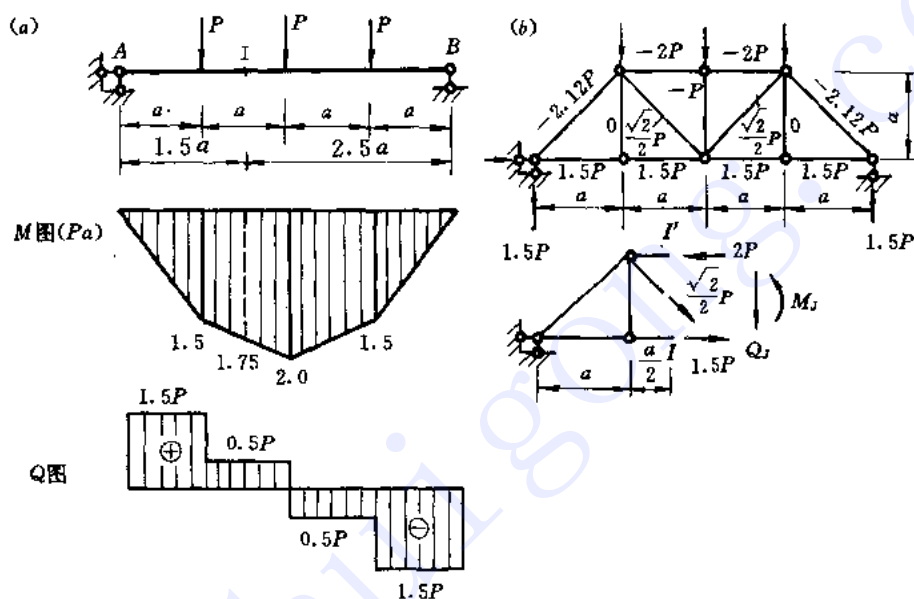


图 2-12-1

1. 当简支桁架的弦杆外形与相应的简支梁弯矩图形状接近时，上下弦杆所受轴力较均匀，比较合理。

2. 因斜杆轴力的竖向分量与代梁相应剪力相同，这里斜杆(较长)受拉，竖杆(较短)受压，对钢桁架较为合理。

如斜杆方向改成如图 2-12-2 所示，这时不但竖杆受拉，斜杆受压，且弦杆最大轴力由上弦移至上弦。

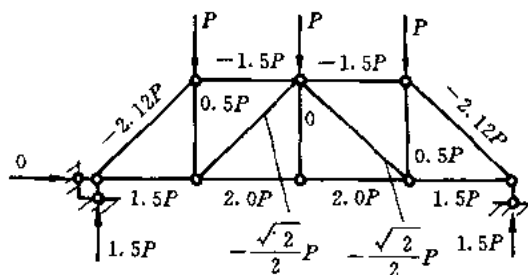


图 2-12-2

3. 截面弯矩主要由上下弦杆轴力承受，剪力主要由腹杆(包括竖杆和斜杆)承受，如对图 2-12-1(b)截面 I-I，三杆轴力形成

$$M_I(\text{对 } I \text{ 点矩}) = 2Pa - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} P \cdot \frac{a}{2} = 1.75Pa \quad \text{J}$$

或 $M_r(\text{对 } I' \text{ 点矩}) = 1.5Pa + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a}{2} P = 1.75Pa \downarrow$

$$Q_r = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} P = 0.5P \downarrow$$

而在简支梁中, M_r 和 Q_r 由不均匀的正应力 σ 和剪应力 τ 合成。

因此, 从受力角度看, 桁架的外形宜选择与相应代梁弯矩图形相似, 如图 2-12-3 所示。

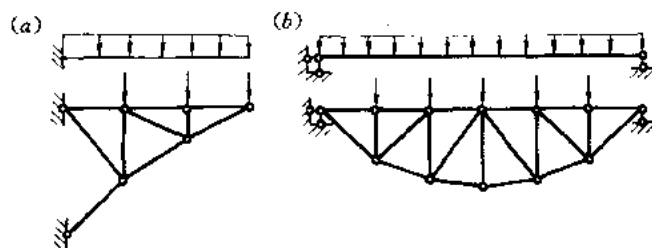


图 2-12-3

当桁架外形、结间距离及腹杆布置确定之后, 其受力状态与桁架高度 h 选择有关。如图 2-12-1(b) 所示的桁架, 显然, 当 h 增加, 所有杆件(除竖杆外)轴力绝对值均减小, 但上弦杆和腹杆长度增大。下面从用料角度讨论应如何选择桁架高度。

先介绍 Maxwell 定理。图 2-12-4 示有 n 个杆件 m 个结点的静定桁架($n=2m-3$)。结点 $j(j=1, 2, \dots, m)$ 所受外力为 P_{jx} 和 P_{jy} 。图中示出外力 P 和内力 N 的正向(外力与 x, y 同向为正, 轴力受拉为正), $l_i(i=1, 2, \dots, n)$ 表示各杆长度。

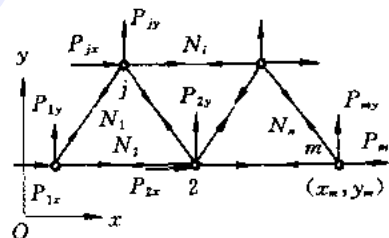


图 2-12-4

由于桁架在外力和内力作用下处于平衡状态, 将所有结点隔离出来, 得 m 个汇交平衡力系。将这些平衡力系平移到任选的坐标系原点 O , 由于它们主矢和主矩均为零, 故在此平移中不作功, 即所有外力和内力做功的代数和为零。而外力做功代数和 $W_{\text{外}}$ 为

$$W_{\text{外}} = - \sum_{j=1}^m (P_{jx}x_j + P_{jy}y_j)$$

内力做功代数和 $W_{\text{内}}$ 为

$$W_{\text{内}} = \sum_{i=1}^n N_i l_i \quad (N_i \text{ 受压为负})$$

因 $W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = 0$

$$\sum_{i=1}^n N_i l_i - \sum_{j=1}^m (P_{jx}x_j + P_{jy}y_j) = 0 \quad (a)$$

上式就是 Maxwell 定理的表达式, 它是桁架保持平衡的必要条件。

设拉杆抗拉允许应力为 σ_+ (常数), 压杆允许应力为 σ_- (也设为常数), 又设 A_i 为材料

强度充分发挥作用时相应 N_i 所需杆件截面积, 即 $A_i = \frac{N_i}{\sigma_+}$ (拉杆) 或 $A_i = \frac{N_i}{\sigma_-}$ (压杆), 于是 $W_{内}$ 可写成

$$W_{内} = \sigma_+ V_+ - \sigma_- V_- \quad (b)$$

式中 V_+ 和 V_- 分别为拉杆和压杆总体积。桁架用料总体积

$$V = V_+ + V_- \quad (c)$$

把式(b)代入式(a), 有

$$\sigma_+ V_+ - \sigma_- V_- = -W_{外}$$

或

$$V_- = \frac{\sigma_+ V_+ + W_{外}}{\sigma_-}$$

把上式代入式(c), 有

$$V = \frac{\sigma_- V_+ + \frac{\sigma_+ V_+ + W_{外}}{\sigma_-}}{\sigma_-} = \frac{\sigma_- + \sigma_+}{\sigma_-} V_+ + \frac{W_{外}}{\sigma_-} \quad (d)$$

同理也可写成

$$V = \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{\sigma_+} V_- - \frac{W_{外}}{\sigma_+}$$

式(d)就是求桁架所用材料总体积计算公式。显然, 当荷载及其作用线位置不变, 结间距离不变, V 仅是 h 的函数(h 变, N_i 就变, 即 V_+ 、 V_- 就变, $W_{外}$ 有的也变), 令 $\frac{dV}{dh} = 0$, 可求得 V 最小时的 h 值。

例 试求图 2-12-5 所示桁架的高度 h , 使用料总体积最小, 设 $\sigma_- = 0.4\sigma_+$ = 常数。

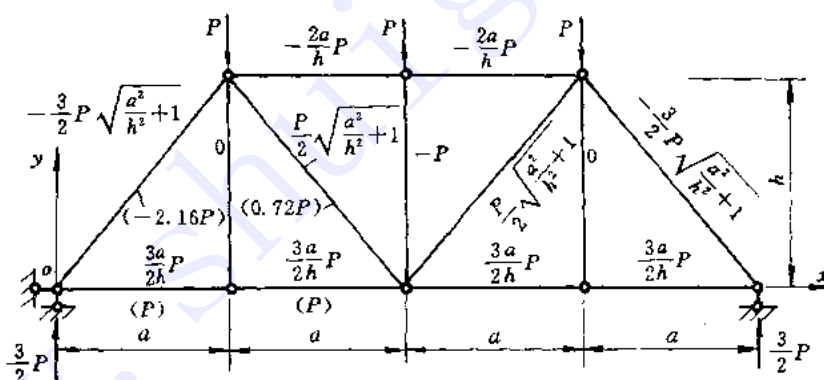


图 2-12-5

解 设 h 为变量, 由受力分析求得桁架各杆轴力与 h 关系如图中所示。弦杆长为 a , 竖杆长为 h , 斜杆长为 $\sqrt{a^2 + h^2}$, 则

$$V_- = \frac{1}{\sigma_-} \left[2 \left(\frac{2a}{h} P \cdot a \right) + 2 \left(\frac{3P}{2} \sqrt{\frac{a^2}{h^2} + 1} \cdot \sqrt{a^2 + h^2} \right) + P \cdot h \right]$$

$$= \frac{P}{\sigma_-} \left[\frac{7a^2}{h} + 4h \right]$$

$$V_+ = \frac{1}{\sigma_+} \left[4 \left(\frac{3}{2} \frac{a}{h} P a \right) + 2 \left(\frac{P}{2} \sqrt{\frac{a^2}{h^2} + 1} \sqrt{a^2 + h^2} \right) \right]$$

$$= \frac{P}{\sigma_-} \left(\frac{7a^2}{h} + h \right)$$

设 xoy 坐标如图中所示，则外力功 $W_{\text{外}}$

$$W_{\text{外}} = 3Ph$$

于是按式(d)，第一式有

$$V = \frac{\sigma_- + \sigma_+}{\sigma_-} \left[\frac{P}{\sigma_+} \left(\frac{7a^2}{h} + h \right) \right] + \frac{3Ph}{\sigma_-} = \frac{P}{\sigma_-} \left(\frac{2.45a^2}{h} + 11h \right)$$

或按式(d)第二式，有

$$V = \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{\sigma_+} \left[\frac{P}{\sigma_-} \left(\frac{7a^2}{h} + 4h \right) \right] - \frac{3Ph}{\sigma_+} = \frac{P}{\sigma_+} \left(\frac{24.5a^3}{h} + 11h \right)$$

由 $\frac{dV}{dh} = 0$, 即
$$-\frac{24.5a^2}{h^2} + 11 = 0$$

求得 $h = 1.5a$

此时桁架各杆轴力如图中括号内数字所示。

2-13 如何证明静定结构约束力解答唯一性原理?

一个静定结构(确定的几何形状、尺寸、支承和联结)在确定荷载作用下,不论支座有否移动,温度是否变化(它们产生的位移微小),也不论杆件的截面尺寸和所用材料如何,约束力(支座反力、杆件之间相互的约束力和杆截面内力)的解答总是唯一确定的。

下面利用虚功原理加以证明。

求静定结构在确定荷载下某一约束力,可用刚体系虚位移原理,将欲求约束力的相应约束撤去,代以该约束力,给此体系任一虚位移,写出虚功方程,方程中仅有一个欲求的约束力是未知力,故解答是唯一的。因为系统为一个自由度,各点虚位移之间的几何关系是唯一的,不因虚位移的任意性而改变,如图 2-13-1 所示,当给虚位移参数为 δ_B 时,其虚功方程为

$$R_B \delta_B - P \frac{a}{a+b} \delta_B - \frac{m}{a+b} \delta_B = 0 \quad (a)$$

而当给系统虚位移参数为 δ_φ 时,其虚功方程为

$$R_B(a+b)\delta_\varphi - Pa\delta_\varphi - m\delta_\varphi = 0 \quad (b)$$

因 $\delta_B = (a+b)\delta_\varphi$, 显然式(a)和式(b)互不独立,是同解方程。

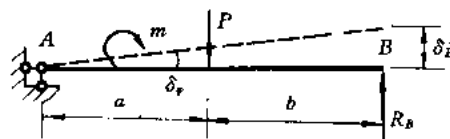


图 2-13-1

如果同时求 n 个未知约束力,撤去 n 个相应的约束代之以 n 个约束力,成为 n 个自由度

体系;任给 n 个独立虚位移状态,写出 n 个独立的虚功方程,在这些方程中仅有 n 个未知量,故解答是唯一的。

静定结构约束力解答唯一性是静定结构的基本静力特性。这个特性也可以这样理解:无论用哪一种方法找出一组约束力,若这组约束力在已知荷载下满足所有平衡条件,则这组约束力即为真实解,不再有其它解答。

第三章 虚功原理及结构位移计算

3-1 利用刚体系虚位移原理求静定结构约束力的优缺点何在？计算虚位移有哪些方法？

利用刚体系虚位移原理求静定结构约束力的优点是欲求的约束力变成了主动力，在虚功方程中只有主动力，其它约束力不出现。这是因为如不去掉某一约束，就没有与该约束力相应的虚位移，则其虚功为零。缺点是有些虚位移的计算比较麻烦。

虚位移计算有两种方法：几何法和解析法。

利用几何法计算虚位移常用投影法和瞬心法。

1. 投影法。如图 3-1-1 所示， δA 为杆 AB 的 A 端虚位移， δB 为 B 端虚位移。由于杆

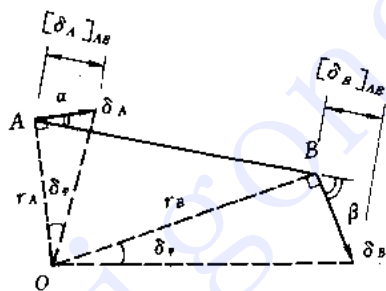


图 3-1-1

AB 只作刚体运动，杆长保持不变，因此要求 δA 在 AB 上投影 $[\delta A]_{AB}$ 和 δB 在 AB 上投影 $[\delta B]_{AB}$ 相等，即 $\delta A \cos \alpha = \delta B \cos \beta$ 。若已知 δA ， α 和 β ，就能求出 δB 。

2. 瞬心法。如图 3-1-1 所示，已知 δA 和 δB 方向，即已知 α 和 β ，则杆 AB 可看成绕瞬心 O 转动（已知刚体上任意两点的虚位移方向，过此两点分别作垂直于虚位移方向的两直线，该两直线的交点即为瞬心），则有

$$\frac{\delta A}{r_A} = \frac{\delta B}{r_B} = \delta \varphi$$

或

$$r_B \delta A = r_A \delta B$$

已知 r_A 和 r_B ，就能确定 δA 和 δB 之间的关系。

例如图 3-1-2 所示机构， C 和 B 点的虚位移之间关系求法如下。因为虚位移是不破坏约束的任意微小位移，所以 δB 应是水平方向， δC 应垂直于 AC ，按投影法，有

$$\delta B \cos \alpha = \delta C \cos(90^\circ - 2\alpha) = \delta C \sin 2\alpha$$

$$\frac{\delta B}{\delta C} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

按瞬心法，瞬心为 O ， $\overline{OC} = \frac{\sqrt{10}}{6}l$ ， $\overline{OB} = \frac{l}{3}$ ，则

$$\frac{\delta B}{\delta C} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

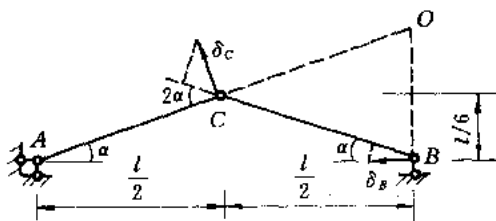


图 3-1-2

利用解析法进行虚位移计算是把机构放在一般位置，以独立坐标写出各点的坐标，然后对其进行微分运算，求得虚位移。

在图 3-1-3 中的机构 ACB，设 φ 为独立坐标（一般位置），则 B、C 点的坐标为

$$x_B = 2a \cos \varphi$$

$$x_C = a \cos \varphi$$

$$y_C = a \sin \varphi$$

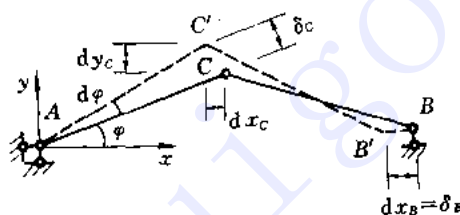


图 3-1-3

其微分为

$$dx_B = \delta B = -2a \sin \varphi d\varphi$$

$$dx_C = -a \sin \varphi d\varphi$$

$$dy_C = a \cos \varphi d\varphi$$

而

$$\delta C = (dx_C^2 + dy_C^2)^{0.5} = a d\varphi$$

当 $\varphi = \alpha$ 时，若就是图 3-1-2 的情况，这时

$$\frac{\delta B}{\delta C} = \frac{-2a \sin \alpha d\alpha}{a d\alpha} = -2 \sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

这里负号表示虚位移 δB 沿 x 负向。

例 1 用刚体系虚位移原理求图 3-1-4(a) 所示结构中杆 CG 轴力 N_{CG} ，其中 $P_1 = P_2 = P$ 。

解 撤去杆 CG，代以 N_{CG} ，给体系虚位移，建立虚功方程为

$$N_{CG} dy_C + P_1 dy_D + P_2 dy_F = 0$$

用解析法求虚位移 dy_C 、 dy_D 和 dy_F ，把机构放在一般位置，如图 (b) 所示，设 φ 为独立坐标，则

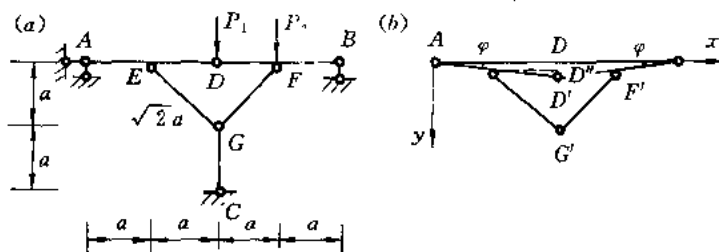


图 3-1-4

$$y_D = 2a \sin \varphi, \quad dy_D = 2a \cos \varphi d\varphi$$

$$y_F = a \sin \varphi, \quad dy_F = a \cos \varphi d\varphi$$

$$y_G = \overline{DD'} + \overline{D'G} = a \sin \varphi + [(\sqrt{2}a)^2 - (a \cos \varphi)^2]^{0.5}$$

$$dy_G = \{a \cos \varphi + [(\sqrt{2}a)^2 - (a \cos \varphi)^2]^{-0.5} a \cos \varphi \sin \varphi\} d\varphi$$

当 $\varphi = 0$, $dy_D = 2ad\varphi$, $dy_F = ad\varphi$, $dy_G = ad\varphi$

代入虚功方程,解得

$$N_{CG} = -3P$$

例 2 用虚位移原理求图 3-1-5 所示组合结构 B 支座反力,已知 q, a, b 和 α 。

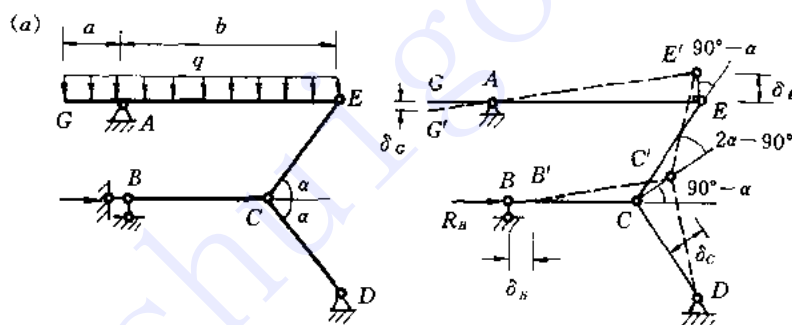


图 3-1-5

解 B 支座只有水平反力。为此撤除 B 水平支杆,代以 R_B ,给虚位移如图(b)所示。用投影法进行虚位移计算。根据投影关系,有

BC 杆 $\delta B = \delta C \cos(90 - \alpha) = 1, \quad \delta C = \frac{1}{\sin \alpha}$

CE 杆 $\delta E \cos(90 - \alpha) = \delta C \cos(2\alpha - 90^\circ)$

$$\delta E = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \sin 2\alpha \right) = 2 \operatorname{ctg} \alpha$$

GE 杆(绕 A 转动) $\frac{\delta G}{a} = \frac{\delta E}{b}$

从中求得 $\delta G = \frac{2a}{b} \operatorname{ctg} \alpha$

建立虚功方程^①
$$R_B \delta B + \frac{q}{2} a \delta G - \frac{q}{2} b \delta E = 0$$

$$R_B + q \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{a^2}{b} - b \right) = 0$$

求得
$$R_B = q \left(\frac{b^2 - a^2}{b} \right) \operatorname{ctg} \alpha$$

各例中分别用了瞬心法、解析法和投影法计算虚位移。当然每个例子都可用这三种方法，不过有难易之分。一般说来，对单自由度体系（一次只求一个未知约束力）考虑平衡问题，采用几何法（瞬心法与投影法的难易无太大区别）方便一些。但对多自由度体系（每次同时求多个未知约束力）考虑平衡问题，则采用解析法为宜。

3-2 利用刚体系虚位移原理能否同时计算多个约束力？

能。利用刚体系虚位移原理同时求静定结构 n 个约束力的步骤是：撤去与 n 个约束力相应的约束，变成有 n 个自由度的体系，给体系以 n 个独立虚位移状态，建立 n 个独立的虚功方程，解得 n 个约束力。

例 利用刚体虚位移原理同时求出图 3-2-1(a) 所示结构的截面 B 弯矩和 B 支座反力。

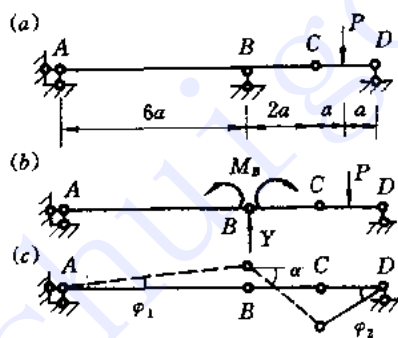


图 3-2-1

解 1. 撤去 B 截面的转动约束和支杆 B ，代以约束力 M_B 和 Y_B ，如图(b)所示， M_B 和 Y_B 按正向画出。

2. 给图(b)所示的两个自由度体系以两个独立虚位移状态，如图(c)所示。这里所谓两个独立虚位移状态是由两个任意独立参数 φ_1 、 φ_2 所反映。

3. 以图(b)的力系在图(c)虚位移上作功建立虚功方程，为

$$6a\varphi_1 Y_B + (\varphi_1 + \alpha) M_B + a\varphi_2 P = 0$$

其中

$$\alpha = \frac{2a\varphi_2 + 6a\varphi_1}{2a} = \varphi_2 + 3\varphi_1$$

代入上式，虚功方程成为

^① 杆段上均布荷载 q 所作虚功等于 q 乘该段虚位移图面积。

$$(6aY_B + 4M_B)\varphi_1 + (M_B + Pa)\varphi_2 = 0$$

4. 解虚功方程, 由于 φ_1 和 φ_2 的任意性, 故应有

$$\left. \begin{aligned} 6aY_B + 4M_B &= 0 \\ M_B + Pa &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解得 $M_B = -Pa \curvearrowright, Y_B = \frac{2}{3}P \uparrow$

上述两个独立虚位移状态是以两个独立参数 φ_1, φ_2 形式给出。当然也可同时给出两个独立虚位移状态, 如图 3-2-2 所示, 图(a)中 B、C 的竖向虚位移比值及图(b)中 A、D 两端虚角位移比值均是任意给定的。这时所建立的独立虚功方程为:

$$\left. \begin{aligned} \text{对于图 3-2-2(a),} \quad & -M_B \left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{6a} \right) - P \times 1 + Y_B \cdot 1 = 0 \\ & -\frac{1}{3a}M_B - P + Y_B = 0 \\ \text{图 3-2-2(b),} \quad & -M_B \left(1 + \frac{2a + 6a}{2a} \right) - Pa - 6aY_B = 0 \\ & -5M_B - Pa - 6aY_B = 0 \end{aligned} \right\}$$

解得 $M_B = -Pa \curvearrowright, Y_B = \frac{2}{3}P \uparrow$

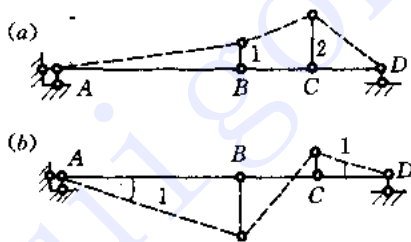


图 3-2-2

应当指出, 用刚体系虚位移原理求静定结构约束力的一个优点是每次只求一个未知力, 不解联立方程。若同时求 n 个约束力, 则要解联立方程。

3-3 怎样利用刚体系虚位移原理建立静定梁和刚架的弯矩方程?

先从简支梁受均布荷载开始讨论。对图 3-3-1(a), 设截面 C 弯矩为 $M(x)$, 解除 x 处弯矩约束代以 $M(x)$, 如图(b)所示, 沿 $M(x)$ 方向给单位虚位移, 则虚功方程为

$$M(x) \cdot 1 - \frac{q}{2} \frac{x}{l} (l-x)[x + (l-x)] = 0$$

求得 $M(x) = \frac{q}{2}x(l-x)$

此即弯矩方程, 由此可画出 M 图。

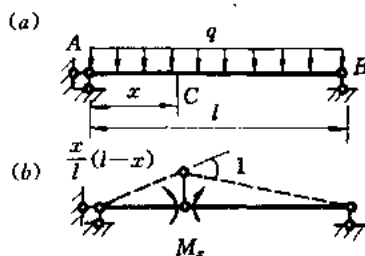


图 3-3-1

对于平面刚架，因各杆的弯矩方程不同，应利用刚体系虚位移原理分别求出各杆弯矩方程，再作出 M 图。例如求图 3-3-2(a) 刚架的 M 图时，要分 AB 段和 BC 段分别进行。

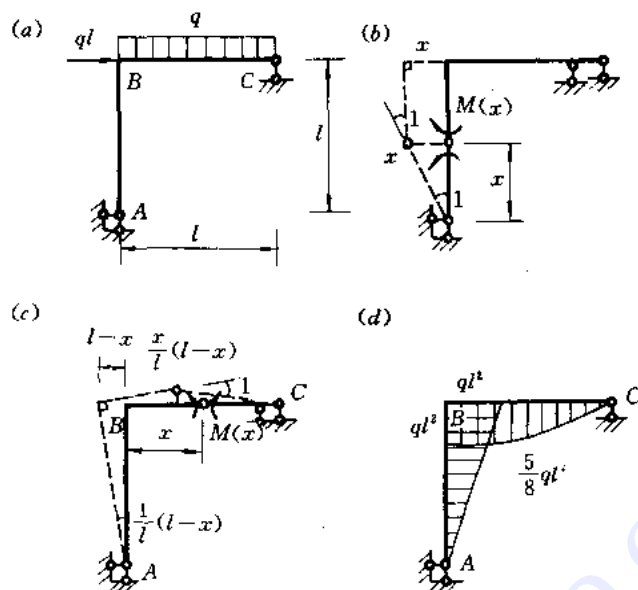


图 3-3-2

对于 AB 段，其机构与虚位移如图(b)所示。虚功方程为

$$M(x) \cdot 1 - qlx = 0$$

弯矩方程为

$$M(x) = qlx \quad (a)$$

对于 BC 段，其机构与虚位移如图(c)所示。虚功方程为

$$M(x) \cdot 1 - ql(l-x) - \frac{1}{2}ql \cdot \frac{x}{l}(l-x) = 0$$

弯矩方程为

$$M(x) = \frac{q}{2}(2l^2 - lx - x^2) \quad (b)$$

由式(a)和式(b)作出 M 图如图(d)所示。

图为虚位移是指不破坏机构的约束条件的任意微小连续变形，因此在作图(b)和(c)的虚位移图时，要保证 A 点没有线位移， C 点没有竖向线位移，且角 B 要保持直角。这些是作虚位移图的要点。有了正确的虚位移图，确定各点的位移与所设单位位移之间的几何关系就不难了。

3-4 如何解释支座位移时静定刚架只作刚体移动？

静定结构发生支座位移时不会产生约束力，各杆只作刚体移动。

图 3-4-1(a) 为静定平面刚架，其中 C_1 、 C_2 分别为支座 A 向下、向左的移动量， C_3 为支座 B 水平向右移动量。图(b) 示出整个刚架只作整体运动。分析如下。

所谓支座位移是支承结构的基础的移动。至于结构与基础相接触的点是否随之移动，

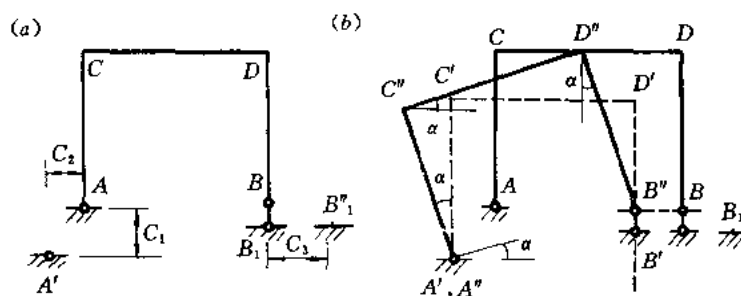


图 3-4-1

要看它们是如何连接的,如这里支座 B 是辊轴支座,虽然支座 B_1 向右移动了 C_3 ,但作为刚架的 B 点不随之移动;而支座 A 是铰支座,当基础移到 A' 点时,作为刚架上的 A 点也随之移到 A' ,同时整个刚架产生移动。

下面分析支座 A 移动到 A' 后,刚架是如何移动的。先设想 B 支座不存在,当 A 移到 A' ,刚架只作平行移动,平移到 $A'C'D'B$ 位置,但因为 B 点只允许作水平移动,所以这时应把整个刚架绕 A' 转动 α 角度,使 B' 点回到 BB' 的水平线的 B' 点。这种移动的结果完全符合所有约束性质。因此,在上述支座移动过程中,整个刚架由 $ACDB$ 位置作刚体平面运动移到 $A'C'D'B'$ 的位置。

3-5 为什么说荷载作用下的位移计算公式 $\Delta = \sum \int \frac{\overline{MM}_P}{EI} ds + \sum \int \frac{\overline{NN}_P}{EA} ds + \sum \int \frac{k\overline{QQ}_P}{GA} ds$ 对曲杆来说是近似的?

杆系结构位移计算的一般公式为

$$\Delta = \sum \int \overline{M} d\theta + \sum \int \overline{N} d\lambda + \sum \int \overline{Q} d\eta - \sum \overline{R}_i C_i \quad (a)$$

式中 $d\theta$ 、 $d\lambda$ 、 $d\eta$ 分别为微段两端截面的相对转角、相对轴向位移、相对剪切位移。对线性变形直杆杆系结构,在荷载作用下,有

$$d\theta = \frac{M_P}{EI} ds \quad (b)$$

$$d\lambda = \frac{N_P}{EA} ds \quad (c)$$

$$d\eta = \frac{kQ_P}{GA} ds \quad (d)$$

其位移计算公式为

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{MM}_P}{EI} ds + \sum \int \frac{\overline{NN}_P}{EA} ds + \sum \int \frac{k\overline{QQ}_P}{GA} ds \quad (e)$$

对直杆来说,式(b)、(c)、(d)说明 $d\theta$ 、 $d\lambda$ 、 $d\eta$ 是相对独立的,即 $d\theta$ 只由 M_P 产生, $d\lambda$ 只由 N_P 产生, $d\eta$ 只由 Q_P 产生。但对曲杆而言情况就不同了。由于曲杆的中性轴与形心轴不重合, M_P 产生的 $d\theta$ 不等于 $\frac{M_P}{EI} ds$,而且 M_P 还引起相对轴向位移 $d\lambda^M$;同时,由于在曲杆

微段内各层纤维不等长, N_P 不但产生轴向相对位移 $d\lambda^N = \frac{N_P}{EA} ds$, 而且产生相对转角 $d\theta$ 。因此对曲杆来说, 利用式(e)计算位移是近似的。

下面先讨论矩形截面的曲杆在 M_P 作用下(纯弯)产生的位移。

取曲杆微段轴线长 ds 的两截面间夹角为 $d\varphi$, 如图 3-5-1(a)所示。按照平面假设, 在 M_P 作用下, 相距 ds 的两截面绕中性轴 z (位置待定)相对转角为 $d\theta^M$ 、离中性轴距离为 y

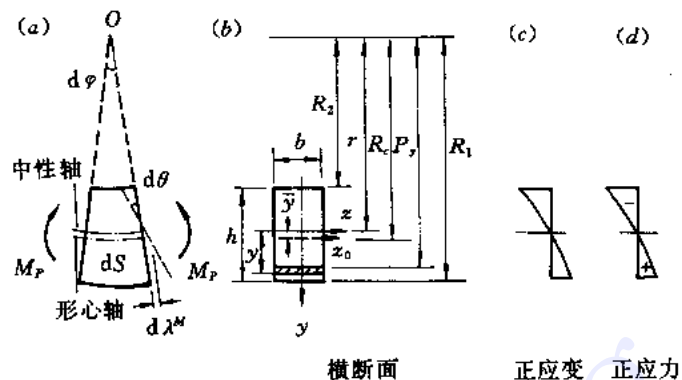


图 3-5-1

的纤维伸长 $y d\theta$, 正应变

$$\varepsilon = \frac{y d\theta^M}{(r + y) d\varphi} \quad (f)$$

其中 r 为中性层纤维的原始曲率半径。由于同一横截面处 r 和 $\frac{d\theta}{d\varphi}$ 都是常量, 故式(f)说明线应变 ε 沿截面高度按双曲线规律变化, 如图(c)所示。这与直杆不同(直杆 ε 按直线变化), 其原因是直杆在相邻两截面间各纤维原长均相等而曲杆各纤维长度随坐标 y 改变。由此可判断, 中性轴是在形心轴的偏曲杆凹向一侧。因 $\sigma = E\varepsilon$, 则由 M_P 产生的正应力 σ 沿截面高度也是按双曲线规律变化, 即

$$\sigma = \frac{E y}{r + y} \cdot \frac{d\theta^M}{d\varphi} \quad (g)$$

中性轴与形心轴的距离 \bar{y} 可由下式

$$N = \int_A \sigma dA = 0 \quad (h)$$

确定。对于矩形截面, 式(h)写成[见图(b)]

$$\frac{E b d\theta^M}{d\varphi} \int_{R_2-r}^{R_1-r} \frac{y}{r + y} dy = 0$$

由此有

$$\int_{R_2-r}^{R_1-r} \frac{y}{r + y} dy = 0$$

即

$$[r + y - r \ln(r + y)] \Big|_{R_2-r}^{R_1-r} = 0$$

展开上式并得 $r = R_c - \bar{y}$ 代入, 求得

$$\bar{y} = R_c - \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad (i)$$

式中 R_c 为杆轴原始曲率半径, R_1, R_2 分别为曲杆最外、内缘纤维原始曲率半径。由式

$$M_p = \int_A \sigma y dA \quad (j)$$

确定 $d\theta^M$ 。将式(j)代入上式可得

$$M_p = \int_A R_c E \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{y^2}{r+y} dA$$

其中 $ds = R_c d\varphi$ 。则

$$d\theta^M = \frac{M_p ds}{E \int_A \frac{y^2}{\frac{r}{R_c} + \frac{y}{R_c}} dA} \quad (k)$$

式(k)是形心轴曲率半径为 R_c 的曲杆在 M_p 作用下求 $d\theta^M$ 的公式。直杆在 M_p 作用下求 $d\theta^M$ 的公式为

$$d\theta^M = \frac{M_p}{EI} ds = \frac{M_p ds}{E \int_A y^2 dA} \quad (l)$$

两者不同。当 $R_c \rightarrow \infty, \frac{r}{R_c} = 1$, 曲杆式(k)即变成直杆式(l)。

对于矩形截面的曲杆, 因

$$\begin{aligned} \int_A \frac{y^2}{\frac{r}{R_c} + \frac{y}{R_c}} dA &= \int_{R_2-r}^{R_1-r} R_c b \cdot \frac{y^2}{r+y} dy \\ &= R_c b \left[\frac{1}{2} (r+y)^2 - 2r(r+y) + r^2 \ln(r+y) \right]_{R_2-r}^{R_1-r} \end{aligned}$$

展开, 并将 $r = R_c - \bar{y} = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$ 代入, 得

$$\int_A \frac{y^2}{\frac{r}{R_c} + \frac{y}{R_c}} dA = R_c b h \bar{y} = R_c S$$

则

$$d\theta^M = \frac{M_p}{E R_c S} ds \quad (m)$$

式中 $S = b h \bar{y}$ 为曲杆截面对中性轴的面积矩。式(m)就是矩形截面的曲杆在 M_p 作用下产生 $d\theta^M$ 的公式, 与式(l)不同。

由于曲杆曲率的影响, 在 M_p 作用下还产生相对轴向位移 $d\lambda^M$ 。因形心轴处的应变 ϵ_0 为[令式(f)中 $y = \bar{y}$]

$$\epsilon_0 = \frac{\bar{y}}{r+y} \frac{d\theta^M}{d\varphi} = \frac{\bar{y}}{R_c} \cdot \frac{d\theta^M}{d\varphi}$$

则由 M_p 产生的相对轴向位移(形心轴处)为

$$d\lambda^M = \epsilon_0 R_c d\varphi = \bar{y} d\theta^M = \bar{y} \frac{M_P}{ER_c b h y} ds = \frac{M_P ds}{ER_c b h}$$

设 $A = bh$, 则

$$d\lambda^M = \frac{M_P ds}{EAR_c} \quad (n)$$

现在讨论矩形截面曲杆在轴力 N_P 作用下产生的位移。如图 3-5-2 所示, 由 N_P 引起的微段两端截面轴向相对位移

$$d\lambda^N = \frac{N_P}{EA} ds \quad (o)$$

而由 N_P 引起微段两端截面相对转角

$$d\theta^N = \frac{d\lambda^N}{R_c} = \frac{N_P}{EAR_c} ds \quad (p)$$

曲杆在剪力 Q_P 作用下微段两端截面产生相对剪切位移一般仍近似取

$$d\eta = \frac{kQ_P}{GA} ds$$

综上所述, 矩形截面曲杆微段在 M_P, N_P, Q_P 共同作用下产生的相对位移为

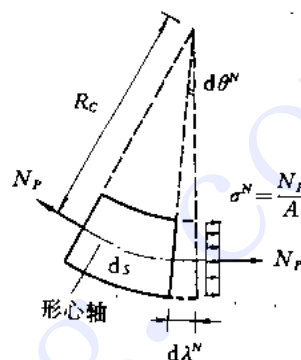


图 3-5-2

$$d\theta = d\theta^M + d\theta^N = \frac{M_P}{ER_c S} ds + \frac{N_P}{EAR_c} ds \quad (q)$$

$$d\lambda = d\lambda^N + d\lambda^M = \frac{N_P}{EA} ds + \frac{M_P}{EAR_c} ds \quad (r)$$

$$d\eta = \frac{kQ_P}{GA} ds \quad (s)$$

因此, 矩形截面曲杆的位移计算公式为

$$\begin{aligned} \Delta = & \sum \int \frac{\bar{M}M_P}{ER_c S} ds + \sum \int \frac{\bar{N}N_P}{EA} ds + \sum \int \frac{k\bar{Q}Q_P}{GA} ds \\ & + \sum \int \frac{\bar{M}N_P}{EAR_c} ds + \sum \int \frac{\bar{N}M_P}{EAR_c} ds \end{aligned} \quad (t)$$

式(t)与式(e)之所以不同, 都是因曲杆曲率的影响。具体说, 第一项不同是因曲杆曲率使抗弯刚度由 EI 变为 $ER_c S$ 。式(t)中多了第四项是因曲率使轴力 N_P 产生相对转角。式(t)中多了第五项是因曲率使弯矩 M_P 产生相对轴向位移。当 $R_c \rightarrow \infty$, 式(t)中 $R_c S \rightarrow I$ 且第四、五项为零, 即得直杆的位移计算公式。

实际应用中, 对于截面高度与曲率半径比值 $\frac{h}{R_c}$ 较小的曲杆, 可近似采用直杆位移公式计算, 误差不大。

3-6 如何计算静定结构在荷载作用下某点的全量线位移?

全量线位移是指某点在位移前后位置的直线距离。如图 3-6-1(a)所示结构 C 点的线

位移 Δ_c 即 $\overline{CC'}$ 。 Δ_c 的方向也是未知的，虚单位荷载如何设定呢？下面讨论两种解法。

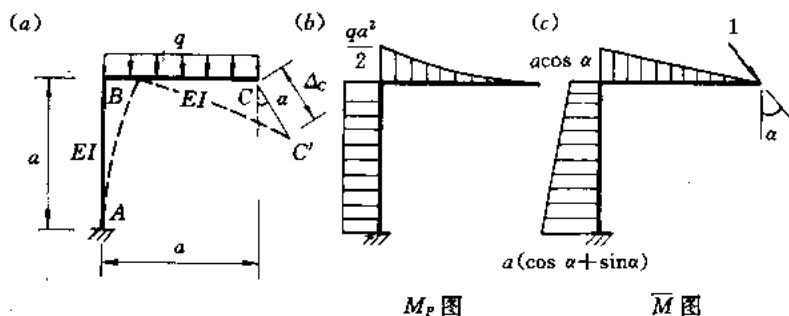


图 3-6-1

位移是矢量，可按平行四边形法则分解与合成。用单位荷载法求 C 点沿某一方向的位移，实际上是求 Δ_c 全量在此方向的分量（此时 Δ_c 分解为沿此方向及正交方向的两个分量），在虚功方程中单位荷载所作的虚功只是沿此方向的功。换句话说， Δ_c 是 C 点沿任意方向位移的最大值。因此求 Δ_c 的一种解法是在 C 点沿任意方向（以参数 α 表示）加单位荷载求 $\Delta_{c\alpha}$ 后再求最大值。由图 (c) 和 (b)，利用图乘法得

$$\begin{aligned} EI\Delta_{c\alpha} &= \left(\frac{1}{3} \frac{qa^2}{2} \cdot a \right) \cdot \frac{3}{4} a \cos\alpha - \left\{ \frac{a}{2} [a \cos\alpha + a(\cos\alpha + \sin\alpha)] \right\} \cdot \frac{qa^2}{2} \\ &= \frac{qa^4}{8} (5\cos\alpha + 2\sin\alpha) \end{aligned}$$

由 $\frac{d\Delta_{c\alpha}}{d\alpha} = 0$ ，有

$$-5\sin\alpha + 2\cos\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 0.4, \quad \alpha = 21.8^\circ$$

则

$$\Delta_c = \Delta_{c\alpha-\max} = 0.673 \frac{qa^4}{EI}$$

求 Δ_c 的另一种解法是先分别求出 C 点沿水平和竖向位移 Δ_{cH} 和 Δ_{cV} ，然后再合成，本例可分别算得

$$\Delta_{cH} = \frac{qa^4}{4EI}$$

$$\Delta_{cV} = \frac{5qa^4}{8EI}$$

故

$$\Delta_c = (\Delta_{cH}^2 + \Delta_{cV}^2)^{0.5} = 0.673 \frac{qa^4}{EI}$$

3-7 计算平面刚架的位移时，忽略剪切变形和轴向变形的误差有多大？

对于矩形截面细长杆的静定刚架，该项误差可控制在百分之二、三以下。现分析一例。图 3-7-1 为受均布荷载 q 的三铰刚架， E 为弹性模量， G 为剪切模量， A 、 I 分别为梁和柱的截面积与惯性矩，各杆相同。求 C 点的竖向位移。

图 3-7-2(a)、(b)、(c) 分别表示荷载作用下刚架的 M_P 、 Q_P 、 N_P 图；图 (d)、(e)、(f) 分

别表示单位荷载下的 \bar{M} 、 \bar{Q} 、 \bar{N} 图。

由弯曲变形引起 C 点挠度

$$\Delta_{C,x} = \frac{2}{EI} \left[\left(\frac{1}{3} \frac{ql^2}{8} \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{3}{4} \frac{l}{4} + \left(\frac{1}{2} \frac{ql^2}{8} \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{4} \right]$$

$$= \frac{11}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

由剪切变形引起 C 点挠度(也用图乘法)

$$\Delta_{C,y} = \frac{2k}{GA} \left[\left(\frac{1}{2} \frac{ql}{2} \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{2} + \left(\frac{ql}{8} \cdot l \right) \frac{1}{4} \right] = \frac{7k}{48} \frac{ql^3}{GA}$$

这里 k 为杆截面形状系数,对于矩形截面 $k=1.2$ 。

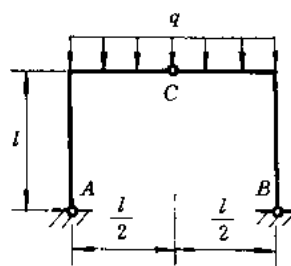


图 3-7-1

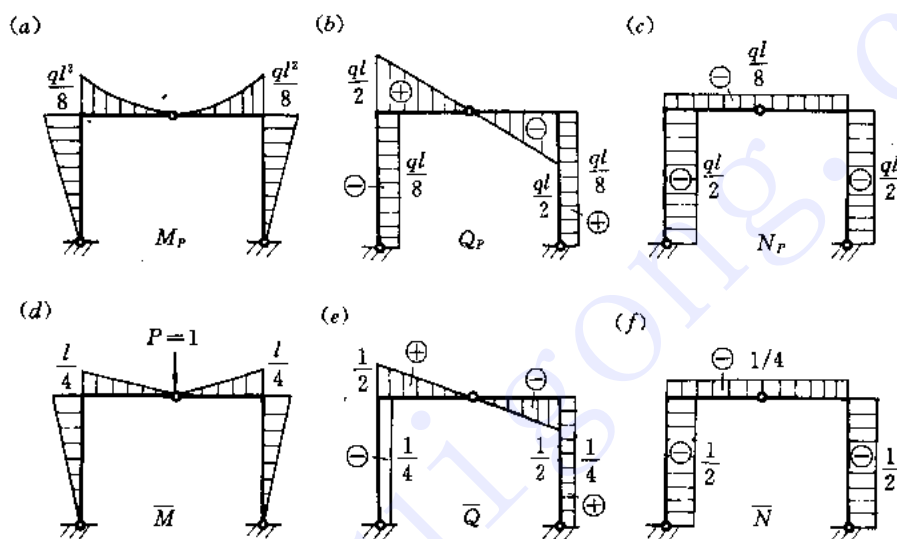


图 3-7-2

由轴向变形引起 C 点挠度(也用图乘法)

$$\Delta_{C,z} = \frac{2}{EA} \left[\left(\frac{ql}{8} \frac{l}{2} \right) \frac{1}{4} + \left(\frac{ql}{2} l \right) \frac{1}{2} \right] = \frac{17}{32} \frac{ql^3}{EA}$$

设梁柱均为等宽的矩形截面,则 $\frac{I}{A} = \frac{h^3}{12}$ (h 为截面高度);若 $\frac{E}{G} = \frac{8}{3}$,可得

$$\frac{\Delta_{C,y}}{\Delta_{C,x}} = 0.91 \frac{h^2}{l^2}, \quad \frac{\Delta_{C,z}}{\Delta_{C,x}} = 0.64 \frac{h^2}{l^2}$$

对于一般刚架,截面高度 h 和杆件长度 l 的比值 $\frac{h}{l}$ 约在 $\frac{1}{8} \sim \frac{1}{18}$ 之间。设 $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$,剪切变形和轴向变形所引起 C 点竖向位移只是弯曲变形引起 C 点竖向位移的 0.91% 和 0.64%,因此计算平面刚架的位移时,只考虑弯曲变形误差是很小的。但如采用薄壁型截面(如工字钢)或杆件短粗时,只考虑弯曲变形的误差就大了。

3-8 用图乘法求位移时,哪些情况容易出错?

用图乘法进行位移计算时,容易出错的有下列几种情况:

1. 在取用面积的弯矩图范围内,取纵标的弯矩图不是一条直线。

例如求图 3-8-1(a)所示梁 C 点竖向位移 Δ_{cv} 时,取 M_P 图面积[如图(b)]

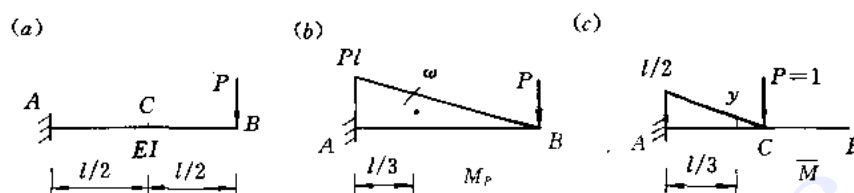


图 3-8-1

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot l \cdot Pl = \frac{Pl^2}{2}$$

取 M_P 图形心对应的 \bar{M} 图[图(c)]竖标为

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{6}$$

算得

$$\Delta_{cv} = \frac{1}{EI} \omega y = \frac{1}{EI} \cdot \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{l}{6} = \frac{Pl^3}{12EI} \downarrow$$

这样计算是错误的,因为面积 ω 是在 AB 范围取值, \bar{M} 图在 AB 段并非一直线而是折线。正确结果应为

$$\Delta_{cv} = \frac{5Pl^3}{48EI}$$

2. 抛物线图形的面积和形心位置判断错误。

例如求图 3-8-2(a)所示梁 B 点竖向位移 Δ_{bv} 时,取 M_P 抛物线图[图(b)]面积

$$\omega = \frac{1}{3} \cdot \frac{3ql^2}{2} \cdot l = \frac{ql^3}{2}$$

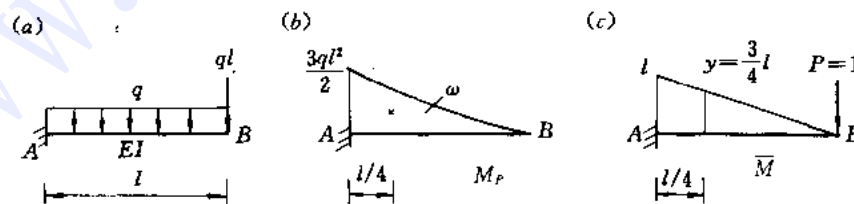


图 3-8-2

取 \bar{M} [图(c)]中对应纵标 $y = \frac{3}{4}l$, 算得

$$\Delta_{bv} = \frac{1}{EI} \omega y = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3ql^2}{2} \cdot l \right) \left(\frac{3}{4}l \right) = \frac{3ql^4}{8EI} \downarrow$$

这样计算是错误的，因为错用了二次凹抛物线的面积和形心。此处 M_P 图抛物线顶点并不在 B (因 $Q_{BA} \neq 0, M_P$ 图在 B 点的切线与杆轴不平行)，不能直接采用抛物线面积和形心位置的公式。正确的计算方法有两种，一是将 M_P 图分解为图 3-8-3(a)、(b) 所示的 M_P' 、 M_P''

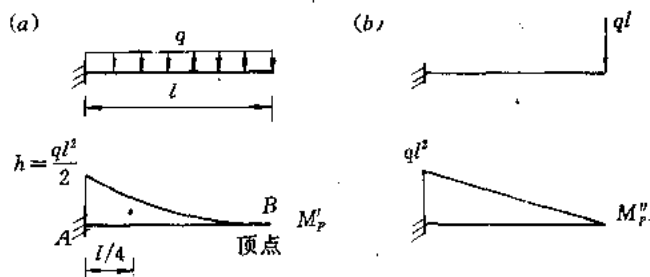


图 3-8-3

图，其中 M_P' 图抛物线顶点正好在 B ，故 AB 范围内的面积才是 $\omega = \frac{1}{3}hl$ ，形心离 A 点距离

才是 $\frac{l}{4}$ 。另一种方法是将 M_P 图按图 3-8-4 分割出一个三角形(面积 ω_1 ，在杆上侧)与一标准二次抛物线(面积 ω_2 ，

在基线下侧)，抛物线面积为 $\omega_2 = \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8}$ ，形心在中点。由 ω_1 、 ω_2 分别与图 3-8-2(c) 的 \bar{M} 图相乘后再叠加，可得正确结果为

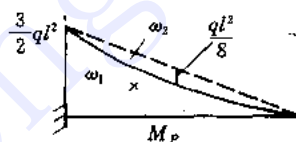


图 3-8-4

$$\Delta_{Bv} = \frac{11ql^4}{24EI}$$

可以证明：在二次抛物线弯矩图上任意割取一段，它与连接两端的弦所包围的弓形面积即为标准抛物线面积，抛物线顶点在中点，过顶点的切线平行于弦，弓形形心在中间。

再如求图 3-8-5(a) 所示梁 C 点竖向位移 Δ_{cv} 时，根据 \bar{M} 图[图(c)]分段将 M_P 图[图(b)]分为 AC 、 CB 两段。若按二次凸抛物线面积和形心位置公式来计算 ω_1 和 y_1 如下：

$$\Delta_{cv} = \frac{1}{EI} [\omega_1 y_1 + \dots] = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{9} \cdot \frac{l}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2l}{9} \right) + \dots \right]$$

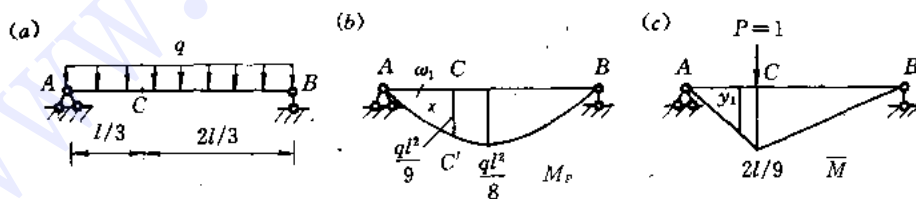


图 3-8-5

则会得出错误结果，因为 M_P 图中 C' 不是抛物线顶点。正确的方法应当是在 M_P 图中连直线 AC' 与 BC' 分别分割出标准凸抛物线面积，分块计算后再叠加。

3. 梯形 M 图相乘时，图形面积可以分割，纵标 y 不能随意分割。

图 3-8-6 所示为两个直线 M 图相乘, $EI = \text{常数}$ 。若采用下式计算

$$\int_0^l M_k M_i dx = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 \quad (a)$$

必将得到错误结果, 因 M_i 图中对应于 ω_1, ω_2 形心的纵标应取全量而不能只取部分, 可证明如下。

将 M_k, M_i 分别按对角线分割为 $M_k = M_{k1} + M_{k2}, M_i = M_{i1} + M_{i2}$, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^l M_k M_i dx &= \int_0^l (M_{k1} + M_{k2})(M_{i1} + M_{i2}) dx \\ &= \int_0^l M_{k1} M_{i1} dx + \int_0^l M_{k2} M_{i2} dx + \int_0^l M_{k1} M_{i2} dx + \int_0^l M_{k2} M_{i1} dx \\ &= \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_1' + \omega_4 y_2' \end{aligned} \quad (b)$$

上面的错误算式(a)只包含式(b)的前两项, 遗漏后两项, 正确算式应为式(b), 也即

$$\int_0^l M_k M_i dx = \omega_1 (y_1 + y_1') + \omega_2 (y_2 + y_2')$$

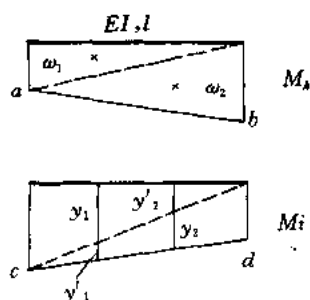


图 3-8-6

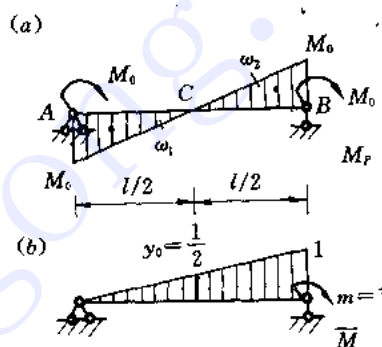


图 3-8-7

4. 不同区段的 M 图面积不能相加或相减

例如图 3-8-7(a) 示一等截面梁的 M_p 图, 欲求截面 B 转角 θ_B 时, 单位力偶作用下的 \bar{M} 图如图(b), 若按下式计算

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^l \bar{M} M_p dx = \frac{1}{EI} (\omega_1 + \omega_2) y_0 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot M_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot M_0 \right) \frac{1}{2} = 0$$

得到错误结论。因为若取 AB 全段为计算单元, M_p 图有正有负 (ω_1 与 ω_2 纵标在杆两侧), 在式 $\int_0^l \bar{M} M_p dx = \omega_p \cdot y_0$ 中, 面积 ω_p 为零, 其形心在无穷远处而不在 C 点, 此时 y_0 为无穷大。即面积

$$\omega_p = \int_0^l M_p dx = \int_0^l \frac{2M_0}{l} \left| x - \frac{l}{2} \right| dx = 0$$

形心坐标

$$x_0 = \frac{\int_0^l M_p \cdot x dx}{\int_0^l M_p dx} = \infty \quad \left(x_0 \neq \frac{l}{2} \right)$$

则 $\omega_p \cdot y_0 = 0 \cdot \infty$ 是不确定值。

正确的计算应分为 AC、CB 两段：

$$\int_0^l \bar{M} M_P dx = -\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 = \frac{1}{6} M_0 l$$

若不分段，仍要在 AB 全段计算，则可将 M_P 图分块后进行图乘，或者采用 \bar{M} 图面积， M_P 图(直线)的对应纵标计算：

$$\int_0^l \bar{M} M_P dx = \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot 1 \right) \left(\frac{2}{3} M_0 - \frac{1}{3} M_0 \right) = \frac{1}{6} M_0 l$$

所得结果与下面的直接积分运算一致：

$$\int_0^l \bar{M} M_P dx = \int_0^l \frac{x}{l} \cdot \frac{2M_0}{l} \left(x - \frac{l}{2} \right) dx = \frac{1}{6} M_0 \cdot l$$

因此在图乘法中，不同杆段的 M 图的面积不可随意相消(同理不可随意相加)，因其形心位置须另行确定。

3-9 增加各杆刚度就一定减小位移吗？

不一定，有的减小，有的反而增大。静定结构在荷载作用下位移计算公式为

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N} N_P}{EA} ds + \sum \int \frac{k \bar{Q} Q_P}{GA} ds$$

其中各项中积分值有正有负。若各杆为矩形截面，且截面宽度 b 都增大到 a 倍，则各杆 EI 、 EA 和 GA 也都增大到 a 倍，则位移减小到原位移的 $1/a$ ，这是各杆刚度按同一比例增加的情况。如果各杆刚度不按同一比例增加，位移就不一定减小。例如计算图 3-9-1(a) 所示桁架 C 点的水平位移，设 $A_1 = 4A_2$ ， $E = C$ ，各杆长为 a 。沿 C 点水平方向施加单位荷载，如图 (b) 所示。则 C 点水平位移

$$\Delta_{C,H} = \frac{P \cdot 1 \cdot a}{EA_2} - \frac{P \cdot 1 \cdot a}{EA_1} = \frac{3Pa}{4EA_2}$$

现若 A_1 增到 $2A_1$ ， A_2 不增加，则

$$\Delta_{C,H} = \frac{Pa}{EA_2} - \frac{Pa}{2EA_1} = \frac{15 Pa}{16 EA_2}$$

比原先反而增大。

为了从理论上说明，以桁架作进一步讨论。设有 n 杆组成的桁架，其结点位置和结点所受荷载不变。设荷载作用下各杆产生的轴力为 N_i ，沿欲求位移 Δ 方向施加单位荷载所产生各杆轴力为 \bar{N}_i ，根据虚功原理

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \bar{N}_i}{EA_i} l_i \quad (a)$$

式中 A_i 和 l_i 分别为各杆截面面积和长度。

对于静定桁架， N_i 和 \bar{N}_i 与 A_i 无关，则 Δ 关于 A_i 的变化率为

$$\frac{d\Delta}{dA_i} = \frac{d}{dA_i} \left(\sum \frac{N_i \bar{N}_i}{EA_i} l_i \right) = - \frac{N_i \bar{N}_i}{EA_i^2} l_i$$

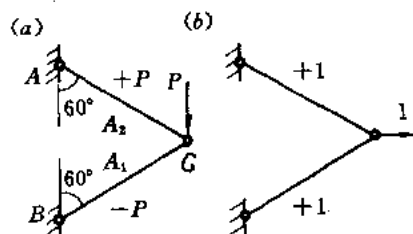


图 3-9-1

由上式可知, 若 $N_j \bar{N}_j < 0$, 则 $\frac{d\Delta}{dA_j} > 0$ 。就是说, 当 N_j 和 \bar{N}_j 异号时, A_j 增加, Δ 也增加, 即这些杆抗拉刚度增加, 位移 Δ 反而增加。

对于超静定桁架, 由于 N_i, \bar{N}_i 与 A_j 有关(超静定结构内力分布与刚度分布有关), 则位移 Δ 关于 A_j 的变化率为

$$\frac{d\Delta}{dA_j} = -\frac{N_j \bar{N}_j l_j}{EA_j^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i}{\partial A_j} \bar{N}_i + \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial A_j} N_i \right) \frac{l_i}{EA_i} \quad (b)$$

上式中 $\frac{\partial N_i}{\partial A_j}$ 和 $\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial A_j}$ ($i=1, 2, \dots, n$), 分别都是平衡力系, 而

$$\frac{\partial N_i}{\partial A_j} \cdot \frac{\bar{N}_i l_i}{EA_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

和

$$\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial A_j} \cdot \frac{N_i l_i}{EA_i}$$

分别为 $\frac{\partial N_i}{\partial A_j}$ 和 $\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial A_j}$ 所做虚功, 由虚功原理可知, 平衡力系的虚功总和为 0, 即有

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial A_j} \cdot \frac{\bar{N}_i l_i}{EA_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial A_j} \cdot \frac{N_i l_i}{EA_i} = 0$$

于是式(b)右端第二项为 0, 故对超静定桁架仍有

$$\frac{d\Delta}{dA_j} = -\frac{N_j \bar{N}_j l_j}{EA_j^2}$$

也就是说, 对于超静定桁架, 当第 j 杆的 N_j 和 \bar{N}_j 为异号时, A_j 增加, Δ 反而增加。

3-10 有应力就有应变, 有应变就有应力, 这种说法对吗?

不对, 因为有时有应力而没有应变, 有时有应变却没有应力。如图 3-10-1(a) 所示等截面梁 BC 上下侧均升温 t° , 由于两端固定, 杆不能伸长, 沿轴线各微段均无正应变 ϵ , 但正应力存在, 其值为 (α 为线膨胀系数)

$$\sigma_0 = -E\alpha t$$

这种应力通常称为初应力或自应力, 因它自身维持平衡。

又如图(b)所示的静定梁具有正应变 $\epsilon_0 = \alpha t$, 但不存在正应力 σ 。这种应变通常称为初应变, 它是温度变化引起的自由膨胀或收缩所产生的。

当有初应力或初应变存在时, 应如何写应力与应变之间的关系呢? 这是在荷载与温度变化同时作用在结构上要遇到的问题。如在图(b)中, 在 c 处作用有沿杆轴线的向右水平集中力, 若设 ϵ 为总应变, $\epsilon_0 = \alpha t$ 为初应变, 则在线弹性阶段, 按虎克定律可写

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_0)$$

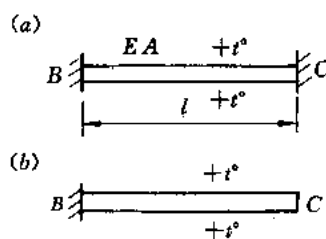


图 3-10-1

这个关系是普遍的。用在图(a)时,因总应变 $\epsilon=0$,则

$$\sigma = -E\epsilon_0 = -E\alpha t$$

3-11 功的互等定理中,体系的两种状态应具备什么条件?

功的互等定理是由虚功原理在线性变形体系上得证,因此体系的两种状态应具备的条件是:

- (1) 材料处于线弹性阶段,即应力与应变成正比(如 $\sigma=E\epsilon$)。
- (2) 变形微小,不影响力的作用。

具体说,在线性变形体中受荷载作用和支座移动的状态满足条件(1),因为它们所产生的应力和应变成正比。而有温度变化或材料收缩的状态,不满足条件(1),不存在 $W_{12}=W_{21}$,因为温度变化的应变中有初应变 ϵ_0 (见 3-10),其应力与应变关系为

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_0)$$

即 σ 与 ϵ 不成正比。

下面看一些例子。

图 3-11-1 为同一线性变形体系的两种状态,状态 I 为简支梁受集中力作用,状态 II

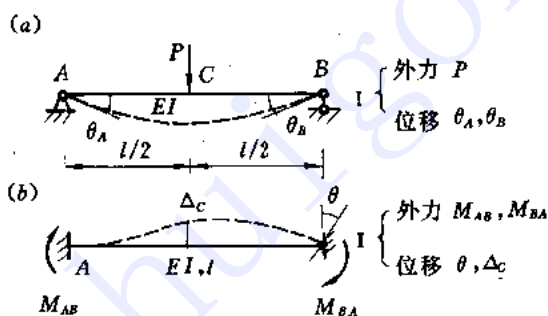


图 3-11-1

为两端固定梁 B 端转动了 θ 角。在这里有

$$\text{状态 I: } R_B = \frac{P}{2}, \quad \theta_A = \theta_B = \frac{Pl^2}{16EI}$$

$$\text{状态 II: } M_{AB} = \frac{2EI}{l}\theta, \quad M_{BA} = \frac{4EI}{l}\theta, \quad \Delta_c = \frac{\theta l}{8}$$

$$\text{于是, } W_{12} = -P\Delta_c = -\frac{Pl}{8}\theta,$$

$$W_{21} = M_{AB}\theta_A - M_{BA}\theta_B = \frac{2EI}{l}\theta \frac{Pl^2}{16EI} - \frac{4EI}{l}\theta \frac{Pl^2}{16EI} = -\frac{Pl}{8}\theta$$

即存在

$$W_{12} = W_{21}$$

从此例看出:

1. 同一线性变形体系的两种状态应有相同的结构形状和刚度分布,但约束情况可以不同(状态 I 是简支梁,状态 II 是两端固定梁)。详细论证见 3-12。

2. 具有支座移动状态, 功的互等定理成立。

图 3-11-2 为同一线性变形体的两状态。状态 I 为两端固定梁, 上部升温 $t^{\circ}\text{C}$, 下部降温 $t^{\circ}\text{C}$ (也可叙述为两端简支的梁受上述温变和外力偶 M_{AB}, M_{BA} 共同作用下的状态); 状态 II 为简支梁; 左端受一力偶 M 。

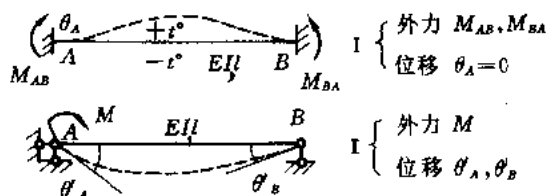


图 3-11-2

在这里有

状态 I: $\theta_A = 0, \quad M_{AB} = M_{BA} = \frac{2EI\alpha t^{\circ}}{h}$ (α 为线膨胀系数, h 为梁横截面高度)

状态 II: $\theta_A' = \frac{Ml}{3EI}, \quad \theta_B' = \frac{Ml}{6EI}$

于是 $W_{12} = M_{AB}\theta_A' + M_{BA}\theta_B' = \frac{Ml}{h}\alpha t^{\circ}$

$$W_{21} = M\theta_A = 0$$

因此

$$W_{12} \neq W_{21}$$

可见两状态中若含有温度变化, 功的互等定理不成立。因状态 I 中存在初应变, 应力与应变不成正比。具体说, 在 θ_A 中包含两部分: 一部分是温度变化引起的自由转角 θ_{A0} (相当于两端简支时由温度变化引起的转角, 称初位移), 此时体系中有应变没有应力; 另一部分是由外力 M_{AB}, M_{BA} 引起的转角 θ_{AP} (相当于两端简支梁承受端力偶引起的转角), 此时体系中应力与应变成正比, 而功的互等定理只在

$$W_{21} = M\theta_{AP}$$

情况下成立。在这里

$$\theta_{AP} = -\theta_{A0} = \frac{l}{h}\alpha t^{\circ}$$

3-12 在位移互等定理中, 为什么线位移与角位移可以互等? 位移系数的量纲与单位是什么?

在位移互等定理中, 可能出现角位移与线位移互等的情况, 如图 3-12-1(b) 中的 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, 但等式只反映了两个物理量的数值与单位相等, 而它们的物理含义并不相同, 量纲也不相等。

位移系数(柔度系数) δ_{ij} 为在 j 方向作用单位力时在 i 方向产生的位移。因为力和位移都是广义的, 所以位移系数的量纲随力和位移内容不同而不同, 共有四种量纲:

$$[\text{长}][\text{力}]^{-1}; \quad [1][\text{力}]^{-1}; \quad [\text{长}][\text{力} \cdot \text{长}]^{-1}; \quad [1][\text{力} \cdot \text{长}]^{-1}$$

而它们的单位只有三种:

$$m/N; 1/N; 1/N \cdot m$$

在位移互等定理 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ 中，等式两边单位相同，故等式成立，但有时等式两边量纲不同（物理量不同），所以此定理只表示了两个物理量在数值上的互等关系。

图 3-12-1 表示位移互等定理的三类情况。对于图(a)，等式两边量纲和单位均相等，

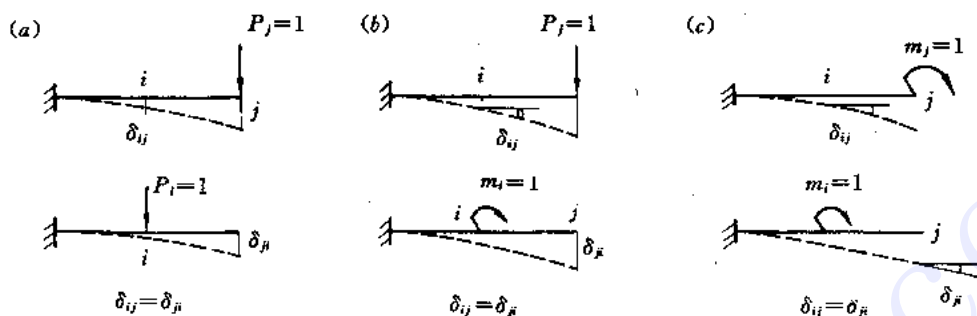


图 3-12-1

即量纲 $[长][力]^{-1} = [长][力]^{-1}$ ，单位 $m/N = m/N$ ；对于图(c)，等式两边量纲和单位也均相等，即量纲 $[1][力 \cdot 长]^{-1} = [1][力 \cdot 长]^{-1}$ ，单位 $1/N \cdot m = 1/N \cdot m$ 。对于图(b)，等式两边量纲不同，左边为 $[1][力]^{-1}$ ，右边为 $[长][力 \cdot 长]^{-1}$ ，即左边为单位集中力产生的角位移，右边为单位集中力偶产生的线位移，它们物理量不同，但等式两边单位仍相同，即 $1/N = m/N \cdot m$ 。

从含义上说，位移互等定理中不会出现等式两边单位不同的情况，即不会出现 $m/N = 1/N = 1/N \cdot m$ 的情况。

对于反力互等定理及反力-位移互等定理，也可作出类似的分析。

3-13 在变形体虚功原理中，两个状态的变形体是否必须为同一体系？

不一定。

变形体虚功原理为：设变形体在力系作用下处于平衡（状态 I），又设变形体由于其他原因产生符合约束条件的微小的连续变形（状态 II），则状态 I 的外力在状态 II 的位移上所作的总虚功 W 恒等于状态 I 的各个微段截面上应力的合力在状态 II 的微段变形上所作的总虚功 W_i ，即

$$外虚功 W = 内虚功 W_i$$

上述两个状态的变形体既可以是同一体系，也可以是几何外形相同（如相同的直杆或曲杆）但约束和刚度分布不同的体系。后者的结论可以从虚功原理的证明过程中得出。为形象起见，下面针对实例加以讨论。

由变形体虚功原理可以证明求超静定结构位移时，单位荷载可以加在其任一基本体系上。如求图 3-13-1(a) 所示结构的 C 点竖向位移 Δ_{cv} ，单位荷载可加在图(b) 所示的静定结构上。这说明两个变形体系只要具有相同的外形，内部约束可以不同 [图(a) 在 C 处为刚结，图(b) 为铰结]。倘若图(b) 中梁柱抗弯刚度均改为 $E_1 I_1$ ，由于静定结构内力分布与刚

度分布无关，则 \bar{M} 图不变， Δ_{cv} 值不变，这说明图(b)的力系在图(a)的位移和变形上所作虚功满足虚功方程。也就是说，虚功原理两状态中的变形体系只要外形尺寸相同，而材料和截面尺寸可以不同。

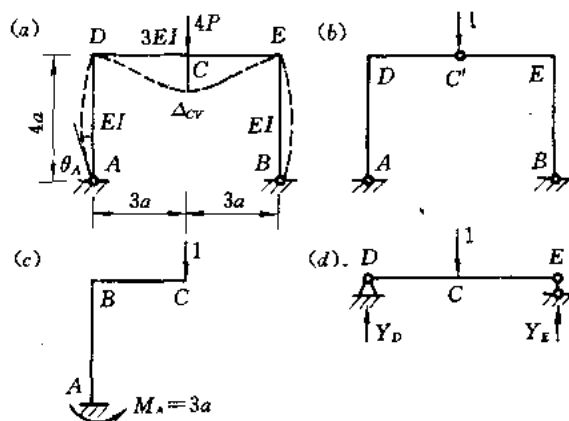


图 3-13-1

那么，求图(a)中的位移 Δ_{cv} ，单位荷载能否如图(c)或图(d)那样施加于原体系的局部呢？回答是可以的。因为两变形体系在相同形状的局部范围[图(c)中为 ABC，图(d)中为 DE]内，虚功原理依然成立。但要注意，位移计算公式实际上是虚功方程，等式左边是外虚功，右边是内虚功。这样，对于图(d)，虚功方程为

$$1 \cdot \Delta_{cv} + Y_D \cdot \Delta_{Dv} + Y_E \Delta_{Ev} = \int_{DE} \frac{\bar{M}M_p}{EI} ds$$

但这里 $\Delta_{Dv} = \Delta_{Ev} = 0$ ，故仍有

$$\Delta_{cv} = \int_{DE} \frac{\bar{M}M_p}{EI} ds$$

对于图(c)虚功方程为

$$1 \cdot \Delta_{cv} + M_A \theta_A = \int_{AD} \frac{\bar{M}M_p}{EI} ds + \int_{DC} \frac{\bar{M}M_p}{EI} ds$$

需要知道 θ_A ，才能求出 Δ_{cv} ，不方便，但原理和方法仍成立。读者可以计算出各种情况的结果加以验证。

从对图(c)和图(d)的讨论，说明在具有相同外形而外部约束不同的两种局部变形体系上，虚功原理仍然成立。如图(c)与(a)，图(c)中 A 为固定端，C 为自由端，而图(a)中 A 为铰支座，C 为弹性约束。

3-14 如何计算非弹性材料的静定结构在荷载作用下的位移？

我们讨论具有如图 3-14-1 所示应力-应变曲线的理想弹塑性材料的静定梁和刚架在荷载作用下的位移计算。杆件为矩形截面，不考虑剪切变形和轴向变形对位移的影响。

由变形体虚功原理建立的位移计算公式

$$\Delta = \sum \int \overline{M} \kappa ds$$

或

$$\Delta = \sum \int \overline{M} d\theta$$

对非弹性材料的结构也适用, 只是在式中的曲率 κ 或微段 ds 两侧截面相对转角 $d\theta$ 与弹性材料不同。

材料处于弹性阶段时(图 3-14-1 中 OA 段), 沿截面高度的应变和应力均为直线分布, 此时有

$$\sigma = \frac{M_P y}{I}$$

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_P h}{2I} \quad (h \text{ 为截面高度})$$

$$\kappa = \frac{M_P}{EI} \quad \text{或} \quad d\theta = \frac{M_P}{EI} ds$$

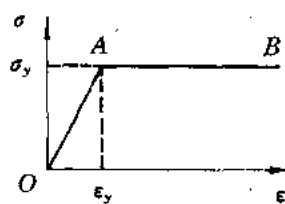


图 3-14-1

当截面最外侧纤维有一点的应力达到屈服极限 σ_y 时, 截面上的弯矩称为屈服弯矩 M_y 。对于矩形截面, $M_y = \frac{bh^2}{6} \sigma_y$ 。当 M_P 逐渐增大, $\sigma_{\max} > \sigma_y$ (屈服极限), 或 $M_P > \frac{2I}{h} \sigma_y$ 时截面靠上和靠下纤维将进入塑性流动, 应力保持 σ_y , 应变继续增大。我们仍假定弯曲变形后截面仍保持平面, 此时的变形和应力分布如图 3-14-2 所示。从图中看出 $y = \pm y_0$, 材料仍

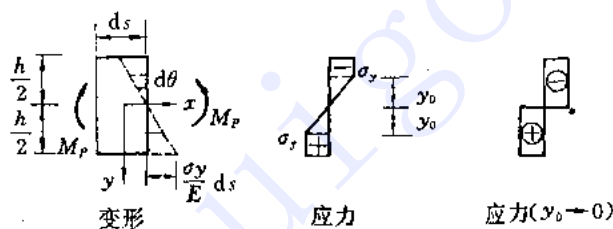


图 3-14-2

保持弹性, 此弹性区又称弹性核, 其中

$$\sigma_e = \sigma_y \frac{y}{y_0}$$

根据平衡条件, 有 (b 为截面宽度)

$$M_P = 2b \left[\int_0^{y_0} \sigma_y \frac{y^2}{y_0} dy + \int_{y_0}^{\frac{h}{2}} \sigma_y y dy \right] = b \sigma_y \left(\frac{h^2}{4} - \frac{y_0^2}{3} \right)$$

由此得出

$$y_0 = \pm \sqrt{\frac{3}{4} h^2 - \frac{3M_P}{b\sigma_y}}$$

由变形图可知

$$d\theta = \frac{\sigma_y}{E y_0} ds$$

当 $y_0 \rightarrow 0$, 所有纤维都进入塑性流动, 截面抵抗弯矩保持不变, 为极限弯矩 M_u 。

$$M_u = \frac{bh^2}{4} \sigma_y$$

但变形仍可继续，即微段两截面可继续相对转动。当截面达到极限弯矩时，这种截面可称为塑性铰。静定结构当某截面出现塑性铰，就变成机构，位移计算没有意义了（此时位移为任意值）。静定结构在荷载作用下的 M_F 图沿杆轴线是变化的，有些区段 $M_F < M_u$ ，其 $d\theta = \frac{M_F}{EI} ds$ ，而有些区段可能有 $M_u > M_F > M_y$ ，其 $d\theta = \frac{\sigma_y}{Ey_0} ds$ ，所以位移计算公式为

$$\Delta = \sum_1 \int \bar{M} d\theta = \sum_1 \int \frac{\bar{M} M_F}{EI} ds + \sum_2 \int \frac{\bar{M} \sigma_y}{E y_0} ds$$

其中 \sum_1 表示对各弹性段求和， \sum_2 表示对各弹塑性段求和。

例 图 3-14-3 描述一具有理想弹塑性材料的悬臂梁，杆截面宽 $b=1\text{cm}$ ，高 $h=3\text{cm}$ ， $\sigma_y=24\text{kN/cm}^2$ ， $E=21 \times 10^3\text{kN/cm}^2$ ， $P=2.5\text{kN}$ ，试求 B 点挠度。

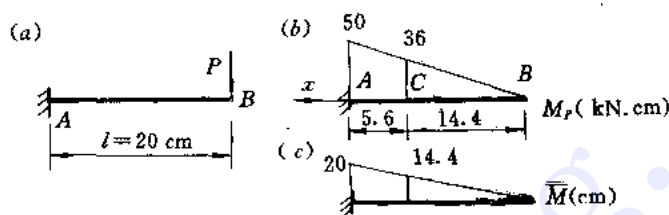


图 3-14-3

解 $M_y = \frac{bh^2}{6} \sigma_y = \frac{1 \times 3^2}{6} \times 24 = 36\text{kN} \cdot \text{cm}$ ， $M_u = \frac{bh^2}{4} \sigma_y = 54\text{kN} \cdot \text{cm}$

作 M_F 和 \bar{M} 图，从 M_F 图看出，AC 段为弹塑性段，CB 段仍处于弹性阶段。弹性阶段弯曲变形产生的挠度

$$\Delta_1 = \int \frac{\bar{M} M_F}{EI} ds = \frac{1105.8}{E}$$

弹塑性段产生的：(以 C 点为原点，x 轴向左)

$$\bar{M} = 14.4 + x, \quad M_F = 36 + 2.5x$$

$$y_0 = \sqrt{\frac{3}{4} h^2 - \frac{3M_F}{b\sigma_y}} = \sqrt{\frac{3}{4} \times 3^2 - \frac{108 + 7.5x}{24}} = \sqrt{2.25 - 0.312x}$$

$$\Delta_2 = \int_0^{5.6} \frac{\bar{M} \sigma_y}{E y_0} ds = \frac{2133.6}{E}$$

B 点挠度

$$\Delta_B = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{3239.4}{E} = 0.154\text{cm}$$

若全部按弹性计算

$$\Delta_B = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{2963}{E} = 0.141\text{cm}$$

第四章 力 法

4-1 力法中的基本体系与基本结构有无区别？

为了使力法的概念完整和准确，逻辑严密，应当区别力法中的基本体系和基本结构。

在一般的结构力学教材中，有的称“基本体系”，有的称“基本结构”，但其含义相同，即指以基本未知力代替被解除的多余约束，并相应保留原荷载及其它外加因素（温度变化、支座位移等）的静定结构。在求柔度系数和自由项时，又说“将单位未知力及荷载分别加于基本体系（或基本结构）”。这一提法在逻辑上与前面相矛盾。到底“基本体系（或基本结构）”是同时作用有全部基本未知力及荷载，还是没有任何力及外加因素作用的静定结构，有些含混不清。

为避免逻辑上的矛盾，本书认为应将原结构解除多余约束后所得无任何外加因素的杆件结构称为基本结构，而在基本结构上以基本未知力代替全部被解除的约束，并作用有全部原荷载及外加因素所得到的体系称为基本体系。这样区分可使上面提到的矛盾得以解决。

例如图 4-1-1(a) 为原超静定结构，图 (b) 为撤除 B 处支杆后得到的基本结构，图 (c) 为

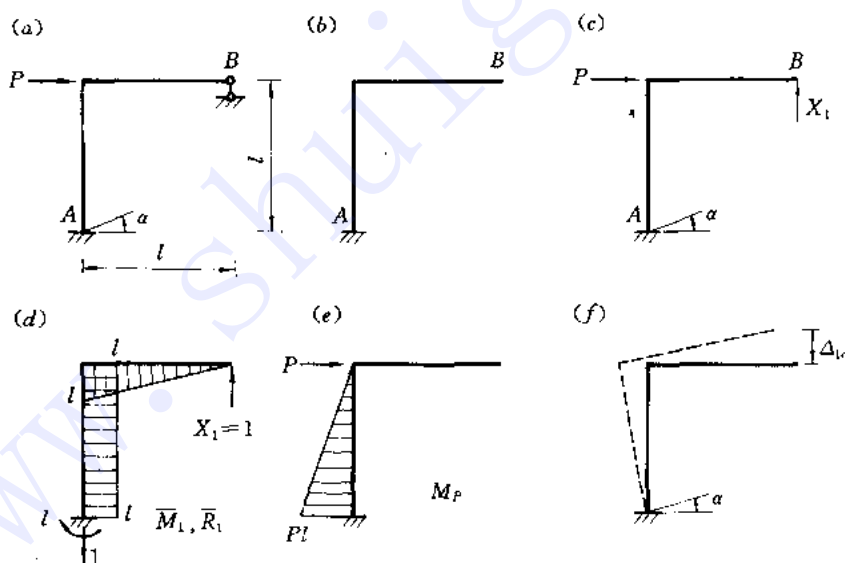


图 4-1-1

力法基本体系，图 (d) 为 $X_1=1$ 单独作用于基本结构时产生的弯矩图 \bar{M}_1 及反力 \bar{R}_1 ；图 (e) 为荷载单独作用于基本结构时产生的 M_P 图；图 (f) 为基本结构的支座发生与原结构相应的支座位移及 Δ_{1c} 。力法方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} + \Delta_{1c} = 0$$

其物理意义是基本体系中沿基本未知力 X_1 方向的位移与原结构相应的位移相等。这样叙述，思路清晰顺畅。如按通常的叙述则应为：“原结构撤除支杆 B 代以未知力 X_1 得基本体系(或结构)如图(c)；基本体系(或结构)在 $X_1=1$ 作用下的 \bar{M}_1 图如图(d)；基本体系(或结构)在荷载作用下的 M_P 图如图(d)，……。”既然基本体系(或结构)同时包含 X_1 与荷载，那么 $X_1=1$ 或荷载单独作用时就不应再称为基本体系(或基本结构)。

如果只采用图(b)所示的基本结构，而不引入图(c)的基本体系，这样有些叙述就会显得冗赘。例如上述力法方程的物理意义就要表述为：“基本结构上同时作用有基本未知力 X_1 、荷载及支座 A 发生转角 α 时，沿基本未知力 X_1 方向的位移与原结构相应的位移相等”，不如用“基本体系沿 X_1 方向的位移与原结构相应位移相等”来得简洁。本书建议基本结构与基本体系同时并用，含义不同却又紧密联系。

在位移法的基本体系中也有类似矛盾，也可以同时引用“基本结构”与“基本体系”两个名词来解决。

4-2 在力法中为什么可以采用切断链杆后的体系作为基本体系？

力法的基本体系只是一种工具，由其过渡得到超静定结构的解。通常基本结构采用几何不变而无多余约束的体系。

图 4-2-1(a) 示一组合结构，有一多余约束，用力法求解时，常用图(b)所示体系作为基本体系。这样，被切断后的 CE_1 与 E_2D 部分岂不成为几何可变的局部了吗？这可以从两方面来解释。

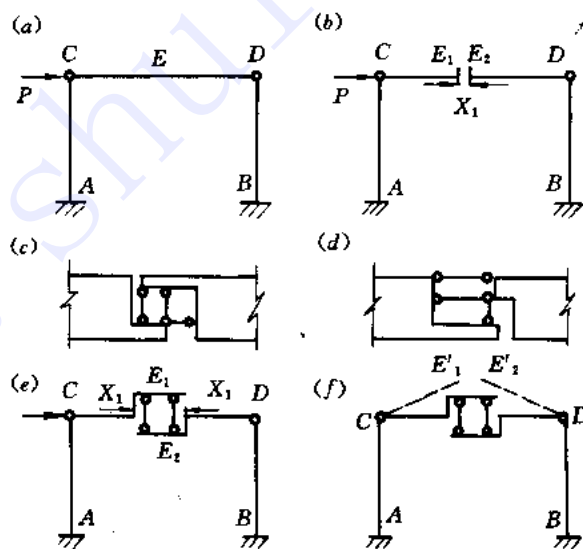


图 4-2-1

1. 把它看成是一种简化了的计算图，实际上链杆 CD 并未完全被切断，只是去掉轴向约束。杆 CD 在截面 E 处原有传递弯矩、剪力和轴力的三个相应约束，其作用可用三根

刚性短链杆表示，如图(c)或(d)所示。以图(c)为基础，撤去其水平链杆，代以基本未知力 X_1 ，成为图(e)所示的体系。它是静定结构，分析如下：杆 AC 、 BD 与地基连接为刚片 I、 CE_1 为刚片 II， DE_2 为刚片 III；刚片 I、II 及 I、III 分别用实铰 C 、 D 相连接，刚片 II、III 用两平行链杆（相当于无穷远的瞬铰）相连接，而此三铰不在一条直线上，故体系几何不变且无多余约束。事实上在此体系中，杆 CE_1 不能绕 C （同样杆 DE_2 不能绕 D ）自由转动，也不能瞬时转动，因为 E_1 、 E_2 处的约束使 CE_1 与 DE_2 必须保持平行，且短链杆保持原长，前者限制了 E_1 和 E_2 往同侧运动，如图(f)所示，后者限制了 E_1 和 E_2 往异侧运动。

2. 在实际计算中，由于链杆 CD 既无弯矩又无剪力，因此完全切断，在轴向未知力 X_1 作用下，被切断部分仍保持平衡，整个结构得到唯一解。从基本体系只是作为一种工具而言，恰当地完全切断二力杆性质的链杆后的体系，仍可作为基本体系。在用力法计算超静定桁架时也常常这样处理。

4-3 对力法的基本结构有何要求？

对力法基本结构的要求为：

1. 基本结构应当是几何不变且无多余约束的静定结构（用超静定结构作基本体系见 4-4）。它只能从原结构中撤去多余约束，不能去掉必要约束。
2. 基本结构只能由原结构减少约束而得到，不能增加新的约束。

图 4-3-1(b)、(c)、(d) 都不能做为图(a)的基本体系。因为图(b)去掉了必要约束，为一

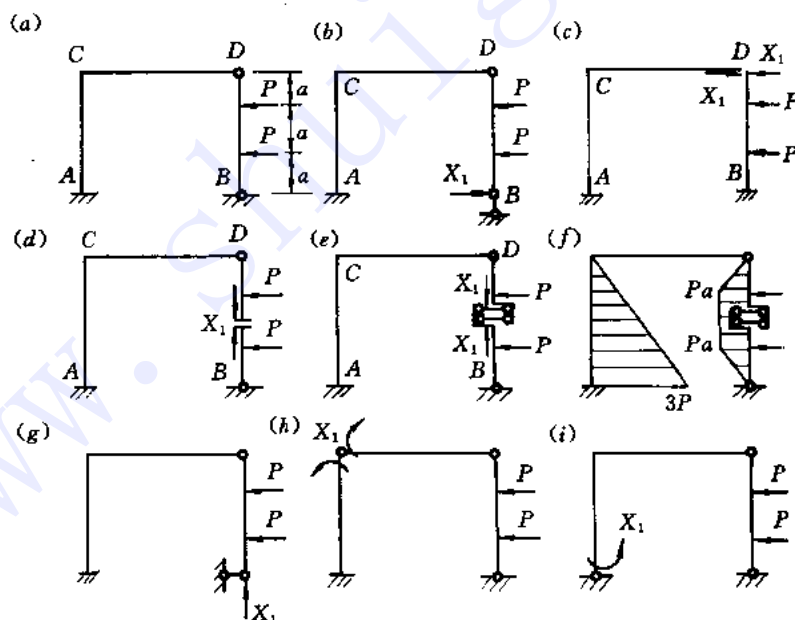


图 4-3-1

瞬变体系；图(c)虽是静定结构，但在支座 B 处增加了转动约束，改变了原结构约束性质，在考虑 D 处附加变形连续条件后，体系的变形和内力不能回复到与原结构相同，同时较

D 截断后没有用未知力 X_2 代替竖向约束, 无法建立相应的变形连续条件。如果引入 X_2 , 则成为两次超静定问题, 改变了原结构的性质; 图(d)是将杆 BD 当作链杆截开(在杆上无横向荷载时是可以作为基本体系的, 见 4-2), 由于杆上作用有横向荷载, 不再是链杆而是梁式杆, 截面上应有三个内力分量。因此作为基本体系, 选取图(d)是不正确的, 应将基本体系画成如图(e)所示的静定结构。此时, 在荷载单独作用下, 基本结构的 M_P 图如图(f)所示。

对初学者来说, 选择图(e)的基本体系进行计算往往容易出错, 而选择撤去支座 B 的竖向支杆[如图(g)], 在 C 加铰[如图(h)], 在 A 加铰[如图(i)]等作为基本体系则可能更有把握。

同一个超静定结构可有许多个不同的力法基本结构。在满足上述两个条件时, 应当选择以内力和位移(柔度系数和自由项)容易求解者为好。

4-4 在力法计算中可否利用超静定结构作为基本结构?

可以。力法计算超静定结构的基本思路是: 从原结构中暂时撤去 n 个多余约束, 代以 n 个未知力, 得到基本体系; 根据基本体系与原结构变形相同的条件, 沿多余未知力的方向可列出 n 个变形协调方程, 即力法方程。只有荷载作用时的力法方程为:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

解方程即可求得基本未知力 $X_j (j=1, 2, \dots, n)$; 于是原结构的内力可求。力法方程中的柔度系数 δ_{ij} 是当 $X_j=1$ 单独作用时基本结构沿 X_i 方向的位移, 自由项 Δ_{iP} 是荷载单独作用时基本结构沿 x_i 方向的位移。当基本结构是静定结构时, 柔度系数和自由项是容易计算的。但从力法计算的原理来看, 并未要求基本结构必须是静定结构。

若取超静定结构作为基本结构, 同样可以根据变形协调条件列出力法方程进行求解。问题是确定力法方程中的柔度系数和自由项, 必须使用超静定基本结构的位移公式和内力公式。目前有些计算手册提供了超静定梁、刚架和拱的有关公式^①, 可以利用。

使用超静定基本体系的优点是可以减少基本未知量。设原结构超静定次数为 n , 基本体系中保留多余约束数为 m , 则力法方程只有 $n-m$ 个。当它们的柔度系数和自由项不难求得时, 计算工作量就会减少。例如图 4-4-1(a)所示的 9 次超静定结构, 基本体系可取图(b)所示的超静定结构, 基本未知量为 X_1 。因为根据对称性可知杆 EF 的弯矩和剪力均为零, 且已知两端固定梁受均布荷载和中点受集中力作用时的弯矩, 故基本结构的 M_P 和 \bar{M}_1 图如图(c)和(d)所示, 则可求得

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds = \frac{l^3}{16EI}$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} ds = -\frac{ql^4}{768EI}$$

① 如: 建筑结构静力计算手册编写组. 结构静力计算手册. 建筑工业出版社, 1975.6
 建筑结构设计手册编写组. 排架计算手册. 建筑工业出版社, 1971

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql}{48}$$

有了 X_1 ，不难求得原结构所有内力。

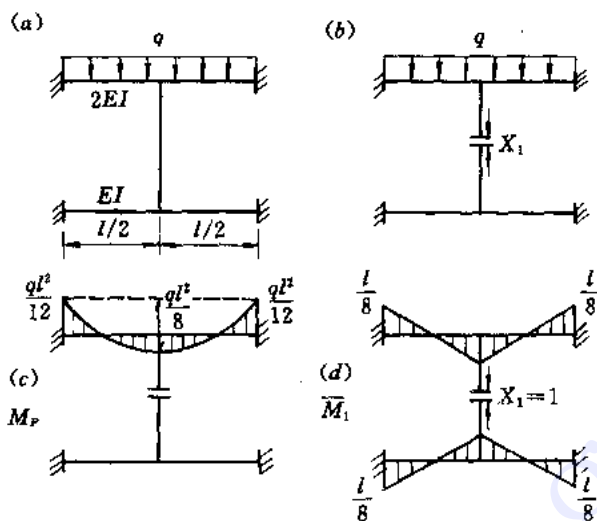


图 4-4-1

力法的基本体系好比一座桥梁，它可以使我们从已知（基本结构的内力和位移计算）过渡到未知（超静定结构内力），只要基本结构的内力和位移计算是已掌握的就可行，至于它是静定结构或是超静定结构则无关紧要。

4-5 在超静定桁架和组合结构中，切开或撤去多余链杆的基本体系，两者的力法方程有何异同？

两者的力法方程形式不同，它们所代表的变形条件及方程中各项参数物理意义不同，但力法方程的内容是等效的。

图 4-5-1(b)和(c)是图(a)所示的超静定桁架用力法求解时所用的两种不同的基本体系。图(b)为切开链杆 CD，图(c)为撤去链杆 CD。

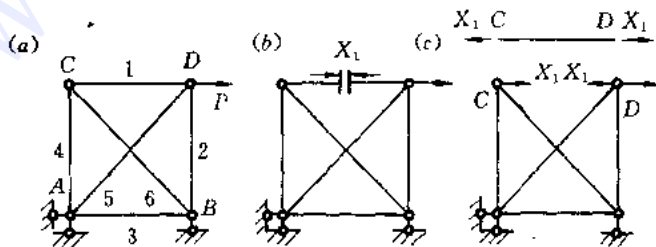


图 4-5-1

1. 对图(b)，力法方程为

$$\delta_{11}X_1 - \Delta_{1P} = 0 \quad (a)$$

方程的物理意义为：基本体系中链杆1切口处相邻两截面相对轴向位移应等于原结构该相邻两截面的相对轴向位移(等于零)。系数与自由项按下式计算：

$$\delta_{11} = \sum_{j=1}^6 \frac{(\bar{N}_1)_j^2 l_j}{EA_j}$$

$$\Delta_{1P} = \sum_{j=1}^6 \frac{(\bar{N}_1)_j (N_P)_j l_j}{EA_j}$$

式中 $j=1\sim 6$ 为图(a)中各杆编号, $(\bar{N}_1)_j$ 、 $(N_P)_j$ 分别为 $X_1=1$ 和荷载 P 单独作用时, 基本结构中链杆 j 的轴力, l_j 、 A_j 为该链杆的长度与截面面积。设各杆材料相同。

2. 对图(c), 力法方程为

$$\delta_{11}^* X_1 + \Delta_{1P}^* = -\frac{X_1 l_1}{EA_1} \quad (b)$$

方程的物理意义为：基本体系中 C 、 D 两点沿 X_1 方向的相对线位移等于原结构中链杆 CD 的缩短量。因为对杆 CD 而言, X_1 为拉力, $\Delta_{CD} = \frac{X_1 l_1}{EA}$ 为杆 CD 的伸长量, 所以方程右边取负值。系数和自由项按下式计算

$$\delta_{11}^* = \sum_{j=2}^6 \frac{(\bar{N}_1)_j^2 l_j}{EA_j}$$

$$\Delta_{1P}^* = \sum_{j=2}^6 \frac{(\bar{N}_1)_j (N_P)_j l_j}{EA_j}$$

比较以上两种基本体系可以看到, 两者力法方程的形式及其物理意义不同; 柔度系数 δ_{11} 与 δ_{11}^* 也不相同, δ_{11} 的计算包括 CD 杆的影响在内, 而 δ_{11}^* 则不包括杆 CD 的影响; 自由项 Δ_{1P} 的计算两者相同, 但物理意义也不同(前者是荷载作用于基本结构时链杆切口两侧的相对轴向位移, 后者是荷载作用于另一基本结构时 C 、 D 两点的相对线位移)。

将式(b)移项可得

$$\left[\sum_{j=2}^6 \frac{(\bar{N}_1)_j^2 l_j}{EA_j} - \frac{l_1^2}{EA_1} \right] X_1 + \Delta_{1P}^* = 0$$

因 $(\bar{N}_1)_1 = 1$, 则上式即成为式(a)。可见与两种基本体系相应的力法方程只是形式上不同, 而内容是等效的。柔度系数关系为

$$\delta_{11} = \delta_{11}^* + \frac{l_1}{EA_1}$$

在实际计算中通常选用图(b)所示的基本体系较为方便。

请读者将两种基本体系的比较推广到 n 次超静定桁架。

4-6 应用力法时, 对超静定结构作了什么假定?

在力法计算中对结构作了两点基本假定:

1. 结构的变形与结构尺寸相比是微小的, 不影响荷载的作用位置与方向。
2. 材料服从虎克定律, 应力与应变成正比。

利用平衡条件计算静定结构内力时, 只需满足第一假定便可应用叠加原理。若结构同

时满足两条假定(称为线性变形体系),则不论其为静定结构或超静定结构,在计算内力和位移时都可以应用叠加原理。

叠加原理的应用贯穿于力法的全部过程。

首先,力法求解荷载作用下的超静定结构时,在选择基本体系后,就是利用叠加原理列出了力法方程

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

方程左边各项叠加,就是荷载与全部未知力共同作用下,在基本体系中沿 X_i 方向引起的位移。

其次,在解出基本未知量 X_j 后,求原结构内力时又应用叠加原理,即

$$M = \sum_{j=1}^n X_j \bar{M}_j + M_P$$

$$N = \sum_{j=1}^n X_j \bar{N}_j + N_P$$

另外,在计算柔度系数和自由项公式

$$\delta_{ij} = \sum \int \bar{M}_i \kappa_j ds + \sum \int \bar{N}_i \epsilon_j ds + \sum \int \bar{Q}_i \gamma_j ds$$

$$\Delta_{iP} = \sum \int \bar{M}_i \kappa_P ds + \sum \int \bar{N}_i \epsilon_P ds + \sum \int \bar{Q}_i \gamma_P ds$$

中,表示应变与内力关系的各式

$$\kappa_j = \frac{\bar{M}_j}{EI}, \quad \epsilon_j = \frac{\bar{N}_j}{EA}, \quad \gamma_j = \frac{\mu \bar{Q}_j}{GA}$$

$$\kappa_P = \frac{M_P}{EI}, \quad \epsilon_P = \frac{N_P}{EA}, \quad \gamma_P = \frac{\mu Q_P}{GA}$$

都是依照线性弹性体系假定导出的。其中 $\kappa_j, \epsilon_j, \gamma_j$ 和 $\kappa_P, \epsilon_P, \gamma_P$ 分别为 $X_j=1$ 和荷载作用在基本结构时各微段产生的弯曲应变 κ 、正应变 ϵ 和剪应变 γ 。

在支座移动、温度变化、制造误差等因素影响下求解超静定结构时,虽然确定自由项 Δ_c, Δ_u 时并不要求满足线弹性条件,但在计算系数 δ_{ij} 时仍要求体系是线弹性的。

4-7 用力法计算超静定结构的解是唯一的吗?

超静定结构满足平衡条件的内力解答有无穷多组。既满足平衡条件,又满足变形协调条件的解则是确定唯一的。

我们来研究力法典型方程的性质。当荷载、温度变化和支座位移诸因素同时作用于超静定结构时,力法方程一般形式如下:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP} + \Delta_{iu} + \Delta_{ic} = \Delta_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

其中 $\Delta_{iP}, \Delta_{iu}, \Delta_{ic}$ 分别为荷载、温度变化、支座位移单独作用在基本结构中沿 X_i 方向引起的位移, Δ_i^0 为原结构中沿 X_i 方向的给定位移。上述方程组表示成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} \quad (a)$$

或 $[\delta]\{X\} = \{\Delta\} \quad (a)$

式中 $\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1^o \\ \Delta_2^o \\ \vdots \\ \Delta_n^o \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta_{1t} \\ \Delta_{2t} \\ \vdots \\ \Delta_{nt} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta_{1c} \\ \Delta_{2c} \\ \vdots \\ \Delta_{nc} \end{Bmatrix}$

式(a)的解答为

$$\{x\} = [\delta]^{-1}\{\Delta\}$$

只要 $[\delta] \neq 0$, 则逆阵 $[\delta]^{-1}$ 存在, 解答 $\{X\}$ 便是确定唯一的。

下面先证明柔度矩阵 $[\delta]$ 中的主系数(即主位移) δ_{ii} 恒大于零。将单位力 $x_i=1$ 加于基本结构上, 因为基本结构沿 x_i 方向的约束已经放松, 在 x_i 方向必产生位移及相应的内力, 即在基本结构各截面上的内力不会处处为零。由位移公式

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{M^2}{EI} ds + \sum \int \frac{N_i^2}{EA} ds + \sum \int \frac{\mu Q_i^2}{GA} ds$$

可知, 必有 $\delta_{ii} > 0$ 。

现在证明矩阵行列式 $|[\delta]|$ 恒大于零。

在基本结构上作用单位力 $x_i=1$, 使其产生变形, 由于变形势能恒为正值, 所以该力将作正功。因此主位移 δ_{ii} 与力 X_i 的方向永远相同。若设 δ_{ii} 方向为正, 则引起 δ_{ii} 的力 X_i 是正的。

对于两次超静定结构[如图4-7-1(a)], 给以沿多余未知力 x_1 方向的单位位移 $\Delta_1=1$ (可看作单位支座位移), 相应的基本体系

如图(b)所示, 力法方程为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 1 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \end{cases}$$

由此解得

$$X_1 = \frac{\delta_{22}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\delta_{22}}{|[\delta]_2|}$$

$$|[\delta]_2| = \frac{\delta_{22}}{X_1}$$

由于 $X_1 > 0, \delta_{22} > 0$, 故 $|[\delta]_2| > 0$

图4-7-2(a)为三次超静定结构。仍令其沿 X_1 方向发生单位位移, 对图(b)所示的基本体系写出力法方程为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 1 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0 \end{cases}$$

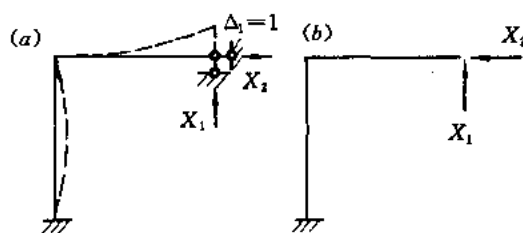


图 4-7-1

由此可解得

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}} = \frac{|[\delta]_2|}{|[\delta]_3|}$$

由于 $X_1 > 0$ ，且已证明 $|[\delta]_2| > 0$ ，则由上式可知 $|[\delta]_3| > 0$ 。

依此类推，可证明对于 n 次超静定结构的力法典型方程(a)的系数行列式 $|[\delta]| > 0$ 。

只要基本体系是几何不变的，柔度系数 δ_{ij} 都是确定的有限值，且不会同时为零，行列式则具有上述性质，表明力法典型方程的解答 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是唯一确定的。

$$X_i = \frac{|[\delta]_i|}{|[\delta]|}$$

式中 $|[\delta]_i|$ 为行列式 $|[\delta]|$ 中第 i 列系数用相应的自由项取代后所得到的行列式。

既然基本未知力 X_i 唯一确定，则结构的全部内力和位移就是唯一确定的。

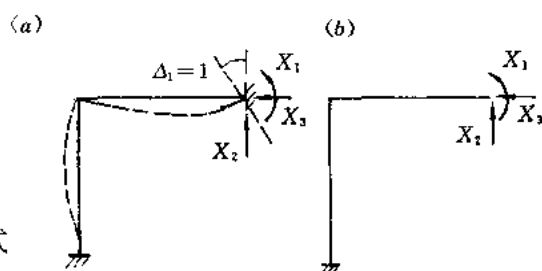


图 4-7-2

4-8 满足力法方程能使基本体系与原结构在所有截面的对应位移都相同吗？

能。为了叙述方便，这里只讨论线弹性超静定结构在荷载作用下的情况。

满足力法方程说明基本体系和原结构沿基本未知力 $X_j (j=1, 2, \dots, n)$ 方向的对应位移相同。这时其它各截面的对应位移也相同吗？下面加以说明。

由力法方程可以求得基本未知力 X_j 的唯一解(见 4-7)，根据平衡条件证明基本体系与原结构的内力完全相同。不失一般性，总可找到基本体系与原结构具有相同位移的杆端(如支座处杆端)，又因在两种结构中该杆所受荷载相同，而且另一端力的边界条件相同，则根据积分法求位移可以证明两种结构杆间各对应截面位移相同。如此逐一推广到其它杆段，即可证明基本体系与原结构的所有对应截面位移均相同。

图 4-8-1(a) 示一超静定梁，由积分法，即由

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q$$

利用边界条件：

$$x = 0, \text{ 有 } y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x = l, \text{ 有 } y = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

求得
$$EI y = \frac{qx^4}{24} - \frac{5}{48} qlx^3 + \frac{1}{16} ql^2 x^2$$

取悬臂梁为基本体系，由力法方程解得

$$X_1 = \frac{3}{8} ql \uparrow$$

且 $y_B = 0$ 。这样，基本体系与原结构有相同的荷载和相同的上述边界条件，或有如下的相同边界条件：

$$x=0, \text{ 有 } y=0, \quad y'=0$$

$$x=l, \text{ 有 } EIy'' = Q_B = -\frac{3}{8}ql, \quad y''=0$$

则 AB 间各截面竖向位移两者完全相同。

如图(b)和图(c)所示，基本体系各截面挠度也可看成 q 和 X_1 分别单独作用于基本结构时所产生的挠度 y_q 和 y_1 之和。不难求得

$$EIy_q = \frac{qx^4}{24} - \frac{1}{6}qlx^3 + \frac{1}{4}ql^2x^2$$

$$EIy_1 = \frac{1}{16}qlx^3 - \frac{3}{16}ql^2x^2$$

$$EI(y_q + y_1) = \frac{qx^4}{24} - \frac{5}{48}qlx^3 + \frac{1}{16}ql^2x^2$$

综上所述，满足了力法方程，基本体系与原结构不但沿 X_1 方向位移相同，且所有对应截面位移也相同。对于线性变形的超静定结构，不但求内力可以用叠加原理，即

$$M = M_p + \sum X_j \bar{M}_j$$

而且求位移也可用叠加原理，即

$$\Delta = \Delta_p + \sum X_j \bar{\Delta}_j$$

其中 Δ 为原结构某位移， Δ_p 和 $\bar{\Delta}_j$ 分别为荷载和 $X_j=1$ 单独作用在基本结构时产生的同一位移。

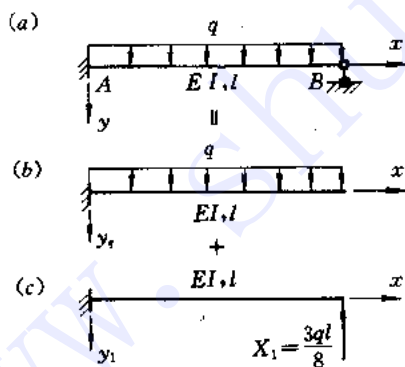


图 4-8-1

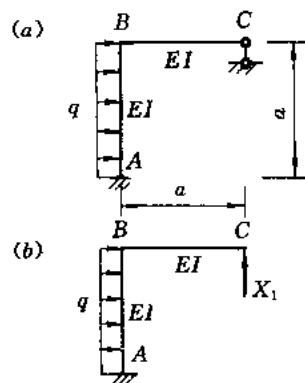


图 4-8-2

又如图 4-8-2(a) 所示的超静定刚架，取基本体系如图(b)所示，由力法方程求得 X_1 。于是，对于杆 AB ，原结构和基本体系有相同的边界条件(A 点位移相同， B 点弯矩和剪力相同)，两者各截面位移相同(B 点水平位移也相同)。对于 BC 杆，两者在 B 点位移相同，在 C 点弯矩和剪力相同，则两者各截面位移(包括水平线位移)相同。

4-9 超静定结构发生支座位移时,选择不同基本体系,力法方程有何不同?

超静定结构在支座移动情况下用力法计算时,选取不同的基本体系,力法方程有的从内容到形式都会不同。

下面先讨论超静定次数 n 与独立的支座位移数 m 相等的情况,一般可以选择三种不同类型的基本体系。

例如图 4-9-1(a)所示刚架,支座 A 发生转角 α 和竖向位移 a ,试用不同基本体系求解。

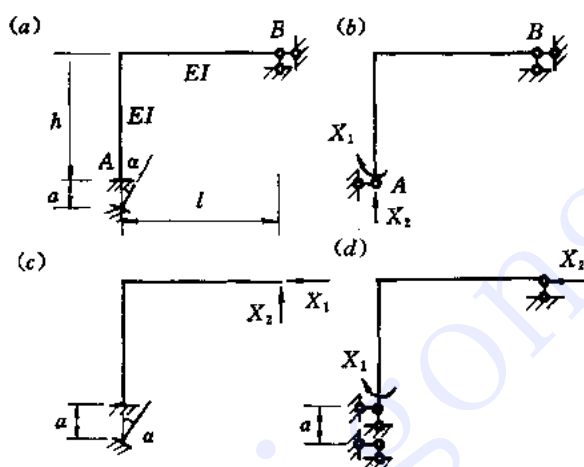


图 4-9-1

1. 基本体系中不保留支座位移。将与支座位移相关的约束全部解除,得基本体系如图(b),力法方程为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = +\alpha \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = -a \end{cases}$$

因基本体系中无支座位移影响,故自由项 $\Delta_{1c} = \Delta_{2c} = 0$ 。而沿基本未知力方向原结构的位移均不为零。

2. 基本体系中保留全部支座位移。选择基本体系如图(c),力法方程为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1c} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2c} = 0 \end{cases}$$

因相应于基本未知力所在的位置和方向上原结构没有支座位移,故方程右边等于零,而基本体系中有支座位移的影响,故自由项不等于零。

3. 基本体系中保留部分支座位移。选择基本体系如图(d),力法方程为

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1c} = -\alpha \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2c} = 0 \end{cases}$$

因为基本体系中还保留了部分支座位移,自由项一般不为零。由于原结构中 X_2 相应的方向无位移,故第二方程右边项为零。

以上分析可推广到 n 次超静定结构。在结构只有支座移动作用时，基本体系的选择可分为三类：

1. 基本体系中不保留任何支座位移。此时力法方程中的自由项全部等于零，而方程的右边项不为零。

2. 基本体系中保留全部支座位移，此时自由项不为零，而总可以通过对多余未知力的恰当选择使力法方程右边项为零。

3. 基本体系中保留部分支座位移。此时自由项不等于零。若与原结构某个支座位移 Δ_i 相关的约束被解除而代以约束力 X_i ，则代表沿 X_i 方向变形协调条件的力法方程式右边必不等于零。当 Δ_i 的方向与 X_i 相同时，等号右边取正值；两者方向相反时，取负值。

由上可见，计算有支座位移的超静定结构，必须对所选择基本体系的性质和力法方程的物理含义十分清楚，才能正确地列出力法方程。从计算的繁简来看，第一类基本结构不必计算自由项，显然比后两类简便。当然，并非任何情况都能获得第一类基本体系。例如上述两次超静定刚架若发生图 4-9-2 所示的三个独立的支座位移时，就无法选取这种体系。一般说来，当支座移动的独立参数多于超静定次数时，就不能获得第一类基本体系。

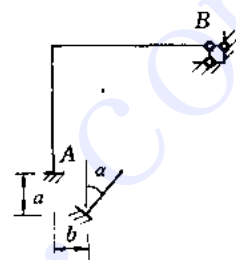


图 4-9-2

4-10 在力法计算中利用组合未知力有何优点？组合未知力能否任意选择？

恰当地选择组合未知力，可使一些单位内力图互相正交（即两个内力图函数的乘积积分和 $\sum \int \frac{M_i M_j}{EI} ds = 0$ ），从而使力法方程中的一些副系数为零以简化计算。这种方法既可用于对称结构也可用于非对称结构。

图 4-10-1(a) 示一对称刚架，荷载为任意的。若选择 X'_1 、 X'_2 、 X'_3 和 X'_4 作为基本未知量，如图(b)所示，则力法方程为

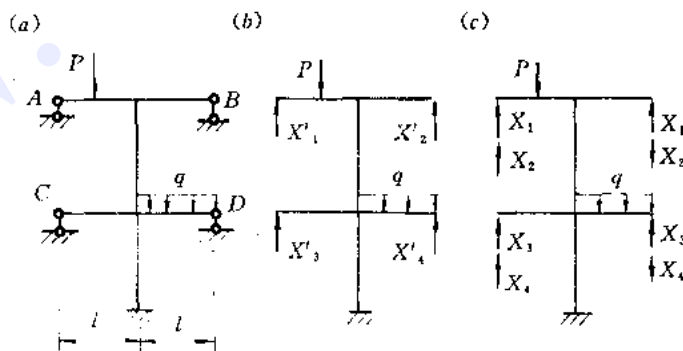


图 4-10-1

$$\left. \begin{aligned} \delta'_{11}X'_1 + \delta'_{12}X'_2 + \delta'_{13}X'_3 + \delta'_{14}X'_4 + \Delta'_{1P} &= 0 \\ \delta'_{21}X'_1 + \delta'_{22}X'_2 + \delta'_{23}X'_3 + \delta'_{24}X'_4 + \Delta'_{2P} &= 0 \\ \delta'_{31}X'_1 + \delta'_{32}X'_2 + \delta'_{33}X'_3 + \delta'_{34}X'_4 + \Delta'_{3P} &= 0 \\ \delta'_{41}X'_1 + \delta'_{42}X'_2 + \delta'_{43}X'_3 + \delta'_{44}X'_4 + \Delta'_{4P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

式中所有副系数均不为零。若选择对称广义未知力 X_1 与 X_3 ，反对称广义未知力 X_2 与 X_4 ，如图(c)所示，则计算将大为简化。这种组合未知力与原未知力的关系为

$$\left. \begin{aligned} X_1 + X_2 &= X'_1, & X_1 - X_2 &= X'_2 \\ X_3 + X_4 &= X'_3, & X_3 - X_4 &= X'_4 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

由于对称的单位组合未知力作用下的组合弯矩图 \bar{M}_1, \bar{M}_3 分别与反对称的组合弯矩图 \bar{M}_2, \bar{M}_4 两两正交，故有

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{14} = \delta_{41} = \delta_{32} = \delta_{23} = \delta_{34} = \delta_{43} = 0$$

同时，由于 \bar{M}_1 图与 \bar{M}_3 图的分布范围互不相关，故

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0$$

于是力法典型方程简化为

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{22}X_2 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0 \\ \delta_{42}X_2 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

显然上述方程易于求解。

力法方程式(c)各式所代表的具体的变形协调条件已与原力法典型方程式(a)的具体含义不同。式(a)的四个方程表示 A、B、C、D 的竖向位移分别为零，即

$$\Delta_A = \Delta_B = \Delta_C = \Delta_D = 0 \quad (d)$$

而式(c)中的四个方程依次表示 A、B 两点 and C、D 两点竖向位移的和与差为零，即

$$\left. \begin{aligned} \Delta_A + \Delta_B &= 0, & \Delta_A - \Delta_B &= 0 \\ \Delta_C + \Delta_D &= 0, & \Delta_C - \Delta_D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

虽然式(c)与式(a)的各式的物理意义不同，但我们可以从式(e)的第一式和第二式解得 $\Delta_A = \Delta_B = 0$ ，从式(e)的第三式和第四式解得 $\Delta_C = \Delta_D = 0$ ，得到了式(d)。可见，两个方程组所代表的变形协调条件是彼此等价的。

不难证明，利用组合未知力计算所得结构内力图与用普通未知力所得的必定相同。如图 4-10-2 所示，根据叠加原理，有

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1 &= \bar{M}_1 + \bar{M}_2 \\ \bar{M}_2 &= \bar{M}_1 - \bar{M}_2 \\ \bar{M}_3 &= \bar{M}_3 + \bar{M}_4 \\ \bar{M}_4 &= \bar{M}_3 - \bar{M}_4 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

对于图 4-10-1(b)，最后弯矩 M' 为

$$M' = X_1\bar{M}_1 + X_2\bar{M}_2 + X_3\bar{M}_3 + X_4\bar{M}_4 + M_P \quad (g)$$

对于图 4-10-1(c)，最后弯矩 M 为

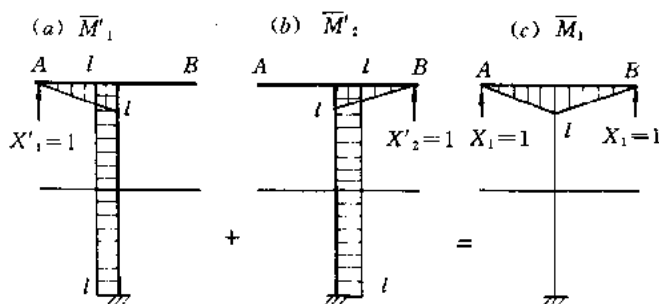


图 4-10-2

$$M = X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 + X_3 \bar{M}_3 + X_4 \bar{M}_4 + M_P \quad (h)$$

两式中 M_P 相同。把式(f)代入式(h),整理后并考虑式(b),

得

$$M = M'$$

得证。

非对称结构也可选取组合未知力。例如图 4-10-3(a)所示刚架,若选用 A、B、C 的竖向反力为基本未知力,计算颇繁。若选用组合未知力及相应的组合单位内力图,如图(b)、(c)、(d)所示,使 \bar{M}_1 、 \bar{M}_2 、 \bar{M}_3 仅限于本层,则若干副系数为零,方程得到简化。

在利用“弹性中心法”解无铰拱和刚架时,实际上也引用了组合未知力。

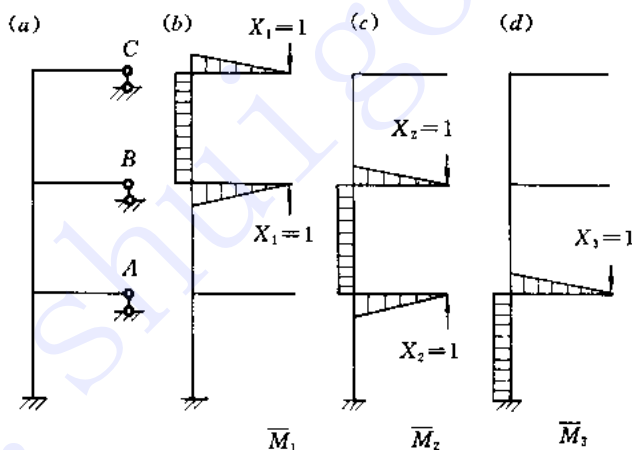


图 4-10-3

下面说明,对于一般超静定结构,任意选择组合未知力,计算结果仍然得到内力的真实解。

设有一 n 次超静定结构,选取了基本体系及基本未知量 X_1, X_2, \dots, X_n , 与其相应的基本单位内力图 $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ 。将它们进行线性组合,可得组合内力图,即

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_1 &= a_1 \bar{M}_1 + a_2 \bar{M}_2 + \dots + a_n \bar{M}_n \\ \bar{M}_2 &= b_1 \bar{M}_1 + b_2 \bar{M}_2 + \dots + b_n \bar{M}_n \\ \dots & \\ \bar{M}_s &= t_1 \bar{M}_1 + t_2 \bar{M}_2 + \dots + t_n \bar{M}_n \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

对于轴力和剪力可有同样形式的组合。总之，组合内力图是基本单位内力图的线性齐次函数。式中的 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots, t_1, t_2, \dots, t_n$ 为任意选取的常数。因而，由 n 个基本单位内力图可以构成无限多种组合内力图。如取 $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ ，可得 $M_1 = \bar{M}_1$ ，这表明单位内力图是组合内力图的一种特殊情形。

根据叠加原理，可将式(i)中的 \bar{M}_1 图看成下列基本未知力

$$X_1 = a_1, \quad X_2 = a_2, \dots, X_n = a_n$$

共同作用的结果。可见，组合内力图反映了组合未知力作用的结果，一个未知力组由各基本未知力组成的方式与相应组合内力图由各基本单位内力图组成的方式相同。

根据简化需要可任意选定组合内力 $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ (对于轴力、剪力也可任意选定，不影响讨论)，其相应的组合未知力 X_1, X_2, \dots, X_n 可组成 n 个力法典型方程：

$$\delta'_{i1}X_1 + \delta'_{i2}X_2 + \dots + \delta'_{in}X_n + \Delta_{iP} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (j)$$

其中
$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} ds \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

式(j)可写成

$$\sum \int \frac{\bar{M}_i}{EI} (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_P) ds = 0 \quad (k)$$

不失一般性，设超静定结构沿基本未知力方向的位移均为零。由式(i)可得下式：

$$\sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds = a_1 \sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds + a_2 \sum \int \frac{\bar{M}_2 M}{EI} ds + \dots + a_n \sum \int \frac{\bar{M}_n M}{EI} ds$$

式中 $\sum \int \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds (i = 1, 2, \dots, n)$ 表示原结构沿基本未知力 X_i 方向的位移，它们均为零，故可得

$$\sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds = 0$$

同理，有

$$\sum \int \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds = 0$$

将上式与式(k)比较，可知

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_P$$

这就证明了利用组合未知力按力法计算超静定结构所得结果，必是内力的真实解。当然，这一结论只适于线性变形体系。

4-11 求力法方程中的系数与自由项时，单位未知力与荷载可否加于不同的基本结构？

能。为了简化计算，可以将单位未知力与荷载加于不同基本结构上，力法方程形式不变，内力图结果也相同。

图 4-11-1(a) 示一刚架，将单位未知力 $X_1 = 1$ 及荷载加在同一基本结构上，如图(b)、(c)所示，力法方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (a)$$

计算可得 $\delta_{11} = \frac{4l^3}{3EI}$, $\Delta_{1P} = -\frac{5ql^4}{8EI}$, $X_1 = \frac{15}{32}ql$

根据 $M = \bar{M}_1 X_1 + M_P$ (b)

可得 M 图如图(d)所示

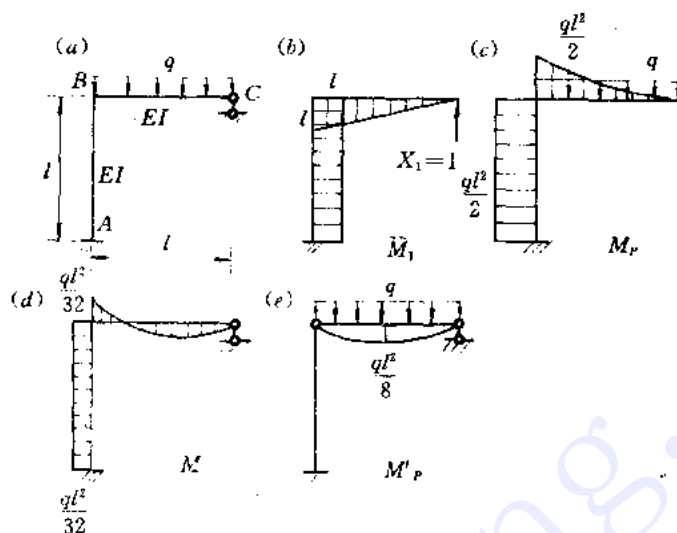


图 4-11-1

现考虑单位未知力仍作用于原基本结构,故 δ_{11} 不变,但将荷载加于另一基本结构,作 M_P 图如图(e)所示。由此可得

$$\Delta'_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} ds = \frac{ql^4}{24EI}$$

力法方程形式为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta'_{1P} = 0 \quad (c)$$

有 $X_1 = -\frac{\Delta'_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{ql}{32}$

由 $M = \bar{M}_1 X_1 + M_P$ (d)

所得 M 图与图(d)所示的完全相同。这样处理的好处是 Δ'_{1P} 的计算比较简单。

从上述计算过程看到,当未知力与荷载加于不同的基本结构时,虽然自由项及未知力的计算值不同,但采用单位弯矩图与基本未知力的乘积 $\bar{M}_1 X_1$ 和荷载弯矩图 M_P 进行叠加,所得内力结果是相同的。

这一结论适用于荷载加于任一不同基本结构的情形。读者可自行验证。

产生上述结果的原因可作如下解释。

设将基本未知力 X_1 分解为 X'_1 与 X''_1 两部分,使

$$X_1 = X'_1 + X''_1,$$

则基本结构由 X_1 与荷载共同产生的内力(真实内力)可分解为两部分(如图 4-11-2 所示):一部分为 X'_1 产生的内力如图(b),一部分为 X''_1 与荷载共同产生的内力如图(c)。在上述计算中,实际上取 $X''_1 = \frac{ql}{2}$,使其与荷载 q 共同作用于基本结构时恰好得到图 4-11-1(e)

的 M_p 图,也就是荷载单独作用于图 4-11-1(e)所示基本结构时的 M_p 图。现在来研究力法

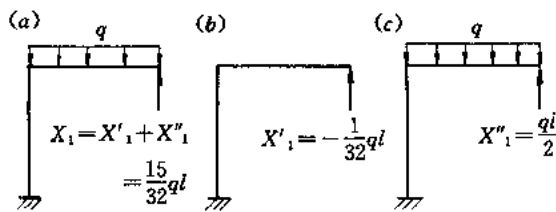


图 4-11-2

方程。将 $X_1 = X_1' + X_1''$ 代入式(a),得

$$\delta_{11}(X_1' + X_1'') + \Delta_{1P} = 0$$

即

$$\delta_{11}X_1' + (\delta_{11}X_1'' + \Delta_{1P}) = 0$$

或写为

$$\delta_{11}X_1' + \Delta_{1P}' = 0 \quad (e)$$

式中, $\delta_{11}X_1'$ 为 X_1' 所引起基本结构沿 X_1 方向的位移, $\delta_{11}X_1'' + \Delta_{1P} = \Delta_{1P}'$ 为 X_1'' 与荷载共同作用引起沿 X_1 方向的位移。新的力法方程(e)表示基本体系中由未知力 X_1' , 已知力 X_1'' 和荷载 q 共同作用下引起沿 X_1 方向的位移等于零。这就是变形协调条件, 与式(a)所代表的协调条件相同。因此, 式(e)与式(a)是等价的, 只是各项内容不同而已。由式(e)求出的 X_1' 不是 C 处的竖向支座反力, 而是反力的一部分 $X_1 - X_1''$, 同时 Δ_{1P}' 与 Δ_{1P} 相差一常数 $\delta_{11}X_1''$ 。

但是力法方程的表达形式相同, 且 Δ_{1P}' 也按 $\sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} ds$ 公式计算。

由式(e)解得 X_1' 后按式(d)计算弯矩结果与式(b)计算的所得相同。可证明如下:

$$\begin{aligned} M &= \bar{M}_1 X_1' + M_P = \bar{M}_1 (X_1 - X_1'') + M_P \\ &= \bar{M}_1 X_1 + M_P - \bar{M}_1 X_1'' \end{aligned} \quad (f)$$

而

$$M_P = \bar{M}_1 X_1'' + M_P$$

代入式(f), 得

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_P$$

证毕。

总之, 将基本未知力与荷载加于不同基本结构上的解法, 其实质仍相当于两者加于同一基本结构上, 而将多余未知力分出一个分量 X_1' 与荷载相匹配, 简化 Δ_{1P} 的计算。

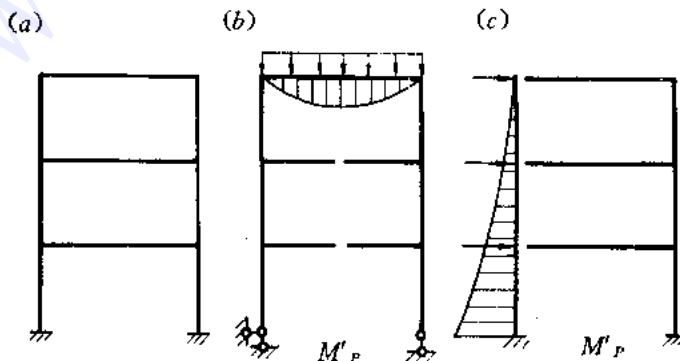


图 4-11-3

根据上述原理，不难推广到 n 次超静定结构的一般情形。

既然荷载可加在任一基本结构上，我们就能选择简单的 M_P 图，使自由项计算简化。例如图 4-11-3(a) 所示的刚架，若荷载作用于刚架顶层横梁上(竖向荷载)，则不论基本未知力作用在何种基本结构上，对于荷载宜选择图(b)所示的基本结构，其 M_P 图只分布于该梁上；若荷载是作用于竖柱上的外力，则选用图(c)所示的基本结构， M_P 只分布于竖柱上。这两种 M_P 图最为简单，使计算简化。

4-12 用变形条件校核超静定结构内力计算结果时应注意什么？

利用变形协调条件校核方法计算所得内力的方法，是利用求出的内力去计算原结构的某几个已知位移(一般选择零位移)，根据计算结果来判断内力图的正确性。

荷载作用下的内力用变形条件校核的公式为

$$\sum \int \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_i N}{EA} ds = 0 \quad (a)$$

式中， M 、 N 为求得的内力， \bar{M}_i 、 \bar{N}_i 为基本结构上在被解除的第 i 个约束相应的未知力 X_i 的作用点沿 i 方向施加广义单位力时所产生的内力。此式可用于各种杆件结构。

对于闭合的无铰刚架或无铰拱，常检验相邻两截面相对转角是否为零，此时 $\bar{M}_i = 1$ ，则变形校核条件为

$$\oint \frac{M}{EI} ds = 0 \quad (b)$$

应用式(a)、(b)时要注意三点：(1) 选择的虚内力 \bar{M}_i 、 \bar{N}_i 是否覆盖了全结构；(2) 式(b)的积分必须限定在无铰的闭合环路中进行；(3) 上两式只适于荷载作用的情况，不适于支座移动和温度变化所引起的自内力。

图 4-12-1(a) 示一刚架与用力法得出的最后 M 图，各杆 EI 和杆长 l 相同。图(b)为 \bar{M}_1 图。则原结构 B 点竖向位移为

$$\Delta_{BV} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds = \frac{1}{EI} \sum \omega_i y_i$$

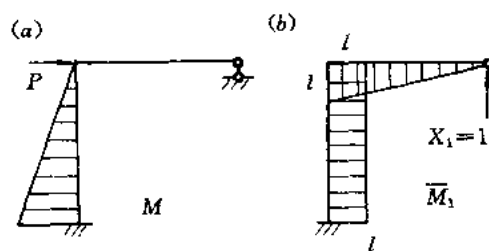


图 4-12-1

由图可见， $\Delta_{BV} \neq 0$ ，而原结构 B 点无竖向位移，因而此 M 图是错误的。观察 \bar{M}_1 图的分布特点，可看到其竖标都在刚架内侧，因此可判定 M 图的竖标必须在内、外两侧分布。

图 4-12-2(a) 示一刚架与用力法得出的 M 图, 各杆 EI, l 相同, 图 (b) 为 \bar{M}_1 图。这里 \bar{M}_1 的竖距均在刚架外侧, M 图的竖标分布在刚架内外两侧, 从图乘法看, M 与 \bar{M}_1 图乘有可能为零, 但需作具体运算。由于

$$\Delta_{BH} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds = 0$$

满足了原结构在 B 点无水平位移的条件, 一般可以说 M 图是正确的。

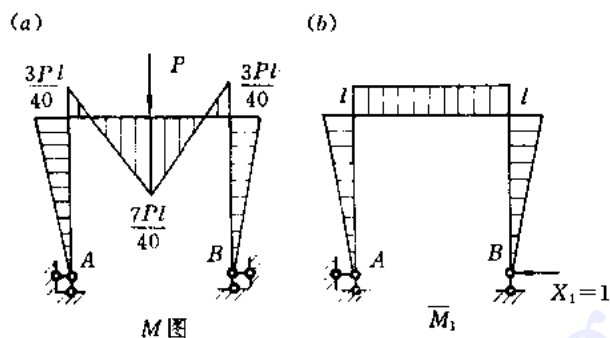


图 4-12-2

在上述两例中, 因 \bar{M}_1 图覆盖了全结构 (即各杆杆间 \bar{M} 图全有竖距), 故由 $\sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds$ 计算的结果 (非零或零) 即可对 M 图的正确性作出判断。

图 4-12-3(a) 示一连续梁用力法计算得出的 M 图, 各杆 EI, l 相同。图 (b) 和 (c) 为 \bar{M}_1 和 \bar{M}_2 图。检验原结构 D 截面转角是否为零, 计算得

$$\theta_D = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds = 0$$

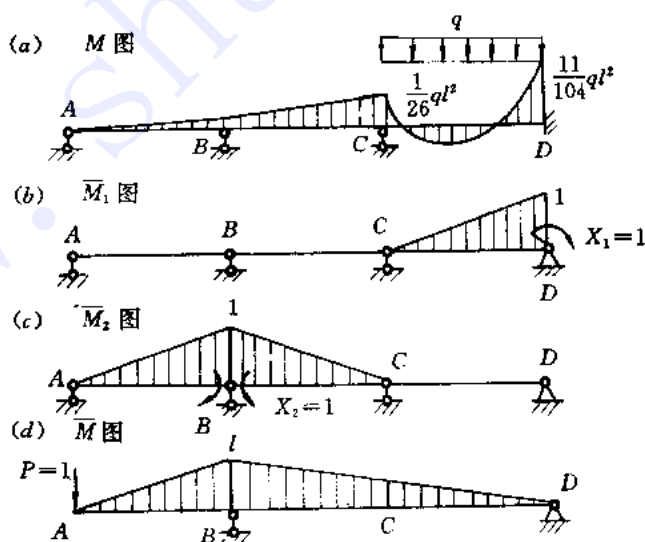


图 4-12-3

这结果只能说明原结构 CD 段 M 图正确，而不能保证全部 M 图都正确。因为在计算中只涉及到 M 图的局部，未涉及到 AC 段。即使 AC 段 M 图是错的，只要 CD 段 M 图正确，也能保证 D 截面无转角（根据转角位移方程，无刚体位移的杆件，只要外力已知，杆端位移也就唯一确定了）。因此，保证某个位移协调，只是保证全结构 M 图正确的必要条件。

由于 AC 段的 M 图和 \bar{M}_2 图都在杆的同一侧，显然

$$\sum \int \frac{\bar{M}_2 M}{EI} ds \neq 0$$

说明根据 M 图计算结果，原结构 B 截面的连续性未被满足， M 图（至少 AC 段 M 图）是错的。

为了迅速准确地检验 M 图的正确性，当各个 \bar{M}_i 图均不能覆盖全结构时，宜另选合适的基本结构，如本例可选图 (d) 所示的 \bar{M} 图。也可以计算几个已知位移，使几个 \bar{M}_i 图综合起来能覆盖全结构，如本例中可同时计算 B 截面相对转角及 D 截面转角，这样， \bar{M}_1 与 \bar{M}_2 合起来可覆盖全梁。

超静定桁架的变形校核，一般是计算某杆（或几个杆）中相邻截面的相对轴向位移是否等于零。选择基本结构时尽可能使 \bar{N}_i 覆盖全部或大部分杆件。图 4-12-4(a) 为一桁架及其内力结果，各杆 EA 相同。校核变形条件时，选择斜杆中相邻截面相对轴向位移进行

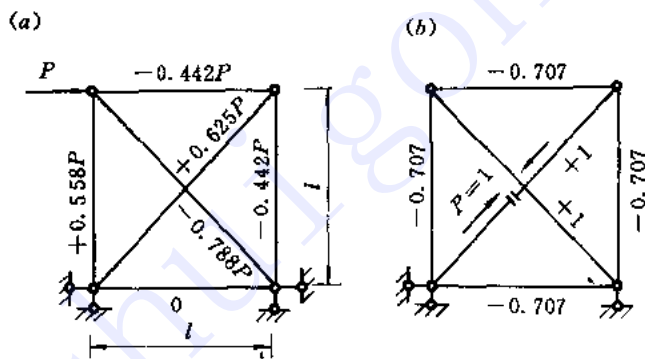


图 4-12-4

计算，单位力加于基本结构如图 (b) 所示。 \bar{N} 值标于杆旁（覆盖全桁架）。计算结果为

$$\sum \frac{\bar{N} N l}{EA} = 0$$

故轴力计算正确。

4-13 支座位移产生的自内力如何校核？

用变形协调条件校核超静定结构因支座位移产生的自内力时，可选择原结构的某些已知位移（含零位移）进行计算，公式为

$$\sum \int \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_i N}{EA} ds - \sum \bar{R}_i C = \Delta_i^0$$

式中， Δ_i^0 为原结构中选定的已知位移。梁和刚架计算时略去第二项，桁架计算舍去第一

项,但均不可漏掉第三项。

图 4-13-1(a)示一超静定梁支座发生位移,其中 $\theta = \frac{2a}{l}$ 。图(b)是用力法求出的弯矩

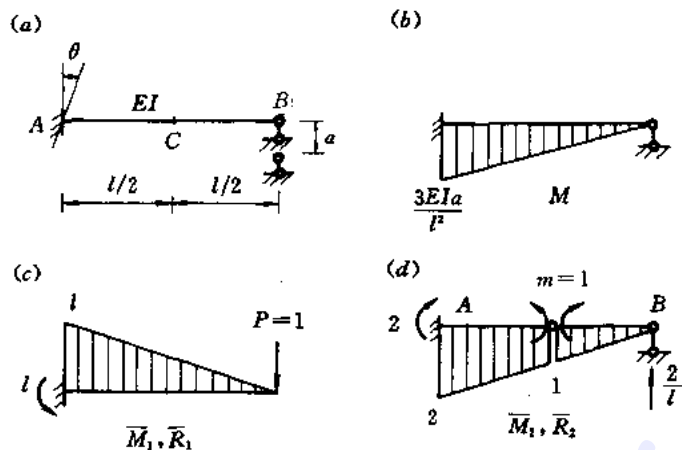


图 4-13-1

图。现计算 B 端竖向位移,为此将相应的单位力加于基本结构(悬臂梁)上,得 \bar{M}_1 图及相应的反力 \bar{R}_1 如图(c)所示。原结构 B 点竖向位移

$$\Delta_{BV} = \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds - \sum \bar{R}_1 C = -a - (-l\theta) = -a + 2a = a \downarrow$$

可见 M 图正确。若只考虑 $\int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds$ 项则得到 $\Delta_{BV} = -a \uparrow$, 位移算错了,就不能说 M 图是错误的。本例也可计算零位移,如跨中截面两侧相对转角 $\Delta\phi_c$ 。为此,相应的单位力偶组加在另一基本结构上,如图(d)所示,求得 \bar{M}_2 及 \bar{R}_2 。则

$$\Delta\phi_c = \int \frac{\bar{M}_2 M}{EI} ds - \sum \bar{R}_2 C = \frac{2a}{l} - \left(2 \times \theta - \frac{2}{l} \times a \right) = \frac{2a}{l} - \frac{2a}{l} = 0$$

同样可判定 M 图正确。

4-14 温度变化引起的自内力如何校核?

超静定结构在温度变化时的自内力计算结果正确与否,一般是利用自内力来计算原结构的零位移加以校核。等矩形截面杆超静定梁与刚架在温度变化时的位移计算公式为

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \sum \frac{\alpha t}{h} \int \bar{M} ds + \sum \alpha t_0 \int \bar{N} ds = 0 \quad (a)$$

超静定桁架(任意形状的等截面杆)位移公式为

$$\Delta = \sum \frac{\bar{N}Nl}{EA} + \sum \alpha t_0 \int \bar{N} ds = 0 \quad (b)$$

式中 \bar{M} 、 \bar{N} 为单位荷载 F (可加在任一基本结构上)产生的弯矩和轴力, h 为截面高度, t 为杆件沿截面高度方向两边缘温度变化差, t_0 为杆件轴线处温度变化量, α 为线膨胀系数。

校核用力法计算温度变化产生的内力的正确性，可利用式(a)、(b)进行判别，但通常虚单位力作用下的内力 \bar{M} 、 \bar{N} 可采用力法计算过程中的 \bar{M}_i 、 \bar{N}_i 。应当注意，不能仅用式 $\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds$ 或 $\Delta = \sum \frac{\bar{N}_i N \cdot l}{EA}$ 进行判别，否则将得到错误的结果。

例 1 试校核图 4-14-1(a)所示刚架的 M 图是否正确。图(b)为 \bar{M}_1 图(\bar{M}_2 图未画出)，各杆 EI 、 l 、 h 相同，截面高 $h = \frac{l}{10}$ 。

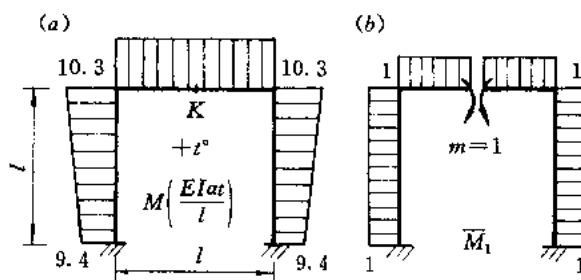


图 4-14-1

解 按式(a)(此时 $\bar{N}_1 = 0$)，原结构 k 处相邻两截面相对转角为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_k &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds - \sum \frac{\alpha t}{h} \int \bar{M}_1 ds \\ &= 30\alpha t - 30\alpha t = 0 \end{aligned}$$

图 \bar{M}_1 已复盖全结构，故此 M 图是正确的。若按下式计算

$$\Delta\varphi_k = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds = 30\alpha t \neq 0$$

就说此 M 图错误则是不对的。

例 2 试校核图 4-14-2(a)所示刚架 M 图是否正确。图(b)、(c)分别为 \bar{M}_1 、 \bar{N}_1 图。各杆 EI 、 l 、 h 相同， $h = \frac{l}{10}$ ，设内侧温度升高 t ，外侧温度不变。

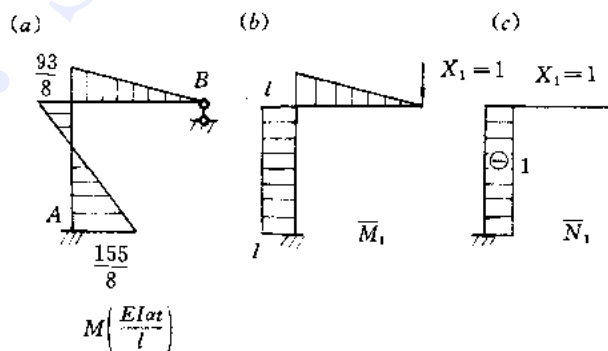


图 4-14-2

解 按题意有 $t' = t$ ， $t_0 = \frac{t}{2}$ 。按式(a)，原结构 B 点竖向位移 Δ_{BV}

$$\begin{aligned}\Delta_{Bv} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds - at \left(\frac{10}{l} \sum \int \bar{M}_1 ds + \frac{1}{2} \sum \int \bar{N}_1 ds \right) \\ &= 0 - \frac{31}{2} atl\end{aligned}$$

这里 $\Delta_{Bv} \neq 0$ ，且 \bar{M}_1 已覆盖全结构，故此 M 图有错。若仅计算

$$\Delta_{Bv} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds = 0$$

就说此 M 图正确则是不对的。

4-15 利用对称性简化力法计算时能否采用半边结构？

一般都能，但有的不方便。

图 4-15-1(a) 示一对称刚架。在对称荷载作用下，由于内力分布对称，通常解除对称轴

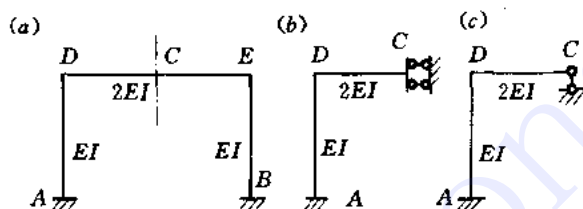


图 4-15-1

上(C 处)的约束作为基本结构。因 $Q_c = 0$ (反对称未知力)，基本未知量只是 M_c 和 N_c ，且计算系数和自由项时可只算半边结构。也可以先取半边结构，如图(b)所示，再用力法原理计算。

若是反对称荷载， $M_c = N_c = 0$ ，基本未知量只是 Q_c 。也可以先取半边结构，如图(c)所示，再用力法原理计算。

图 4-15-2(a) 示一对称刚架，作用水平集中力 P 。此类荷载就反力和弯矩而言是反对

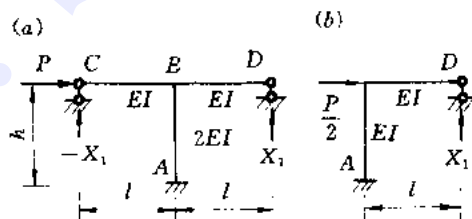


图 4-15-2

称荷载，即它引起的弯矩和反力是反对称分布的。就剪力的实际大小和方向(不是按剪力正负号规定)来说也是反对称分布的。这时宜撤去 C、D 处的支杆后(不在对称轴上)作基本结构。利用反力的反对称分布，可设 $X_1 = R_D = -R_C$ ，此时 $\delta_{11} = \frac{8}{3} \frac{l^3}{EI}$ ， $\Delta_{1P} = -\frac{Pl^3}{2EI}$ ，力法

方程为

$$\frac{8}{3} \frac{l^3}{EI} X_1 - \frac{Pl^3}{2EI} = 0 \quad (a)$$

解得 $X_1 = \frac{3}{16}P$ 。若取图(b)所示的半边结构(柱的抗弯刚度减半)，仍撤去 D 处支杆后作基本结构。

设 $X_1 = R_D$ ，此时 $\delta_{11} = \frac{4l^3}{3EI}$ ， $\Delta_{1P} = -\frac{Pl^3}{4EI}$ ，力法方程为

$$\frac{4l^3}{3EI} X_1 - \frac{Pl^3}{4EI} = 0 \quad (b)$$

解得 $X_1 = \frac{3}{16}P$ 。

图 4-15-3(a) 示一对称结构，受一般荷载作用。宜撤去 C、D 处支杆后作为基本结构，取对称和反对称的组合未知力作为基本未知量，如图(b)所示。利用对称(反对称)未知力在反对称(对称)未知力方向的位移为零，即有 $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$ ，加以简化。于是，力法方程分解为两个单变量方程，即

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (c)$$

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \quad (d)$$

解得 X_1, X_2 后，直接作出 M 图。

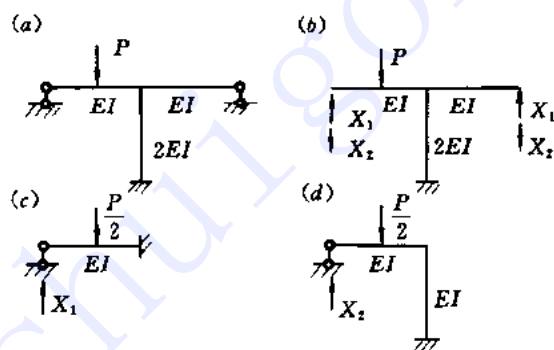


图 4-15-3

若利用半边结构必须把一般荷载分解为对称和反对称，分别再取半边结构。在对称荷载分量的作用下，取半边结构如图(c)所示，力法方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (e)$$

解出 X_1 。在反对称荷载分量作用下，取半边结构如图(d)所示，力法方程为

$$\delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0, \quad (f)$$

解出 X_2 。

非对称的一般荷载可分解为对称和反对称两组分量分别求解，虽然可以只计算半结构，但要画出两个弯矩图，再叠加才得最后弯矩图，因此计算不一定简单。对图 4-15-3(a) 所示刚架，常将多余未知力分解为对称、反对称(X_1 与 X_2) 两组，用图(b)的基本体系，也得到两个独立的力法方程，一次计算出最后弯矩图，更为简便一些。

4-16 在力法计算中,什么情况下可用刚度的相对值?为什么?

在荷载作用下,由各向同性、应力与应变成正比的小曲率杆件组成的超静定结构,在用力法计算内力时,各杆刚度可用相对值。在这种情况下,不论结构形式如何,也不论各杆用何种材料,截面形状和尺寸如何,结构中内力分布只与各杆刚度相对值有关,而与绝对值无关。当各杆绝对刚度按同一比例增减时,不影响内力分布。下面由简及繁加以讨论。假定各杆杆长不变,荷载也不变。

1. 一次超静定结构

(1) 刚架(不计轴向变形和剪切变形)

由 n 个等截面杆段(其中包括曲杆段,阶形变截面杆件按等截面分段)组成的一次超静定结构,各杆抗弯刚度为 $C_i E_0 I_0$, $E_0 I_0$ 为参照抗弯刚度,是一常数。 C_i (i 为杆件序号, $i = 1, 2, \dots, n$) 为各杆相对刚度比例常数或刚度相对值。力法方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

柔度系数与自由项为

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds = \sum \int_i \frac{\bar{M}_{1i}^2}{C_i E_0 I_0} = \frac{1}{E_0 I_0} \sum \int_i \frac{\bar{M}_{1i}^2}{C_i} ds = \frac{1}{E_0 I_0} \xi \quad (a)$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} ds = \sum \int_i \frac{\bar{M}_{1i} M_{Pi}}{C_i E_0 I_0} ds = \frac{1}{E_0 I_0} \sum \int_i \frac{\bar{M}_{1i} M_{Pi}}{C_i} ds = \frac{1}{E_0 I_0} \eta \quad (b)$$

于是
$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\eta}{\xi}$$

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_P = -\frac{\eta}{\xi} \bar{M}_1 + M_P$$

由于 \bar{M} 、 M_P 是基本结构的内力分布,与 $E_0 I_0$ 无关,因此积分值 ξ 和 η 均与 $E_0 I_0$ 绝对值无关,只与 C_i 有关。若 C_i 不变,则 $\frac{\eta}{\xi}$ 不变,内力分布不变。

(2) 桁架

由 n 个等截面杆件组成的一次超静定桁架,设各杆抗拉刚度为 $d_i E_0 A_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $E_0 A_0$ 为参照抗拉刚度, d_i 为各杆抗拉刚度比例常数。柔度系数与自由项分别为

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_1^2 l}{EA} = \frac{1}{E_0 A_0} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_{1i}^2 l_i}{d_i} = \frac{1}{E_0 A_0} \xi_1$$

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\bar{N}_1 N_P l}{EA} = \frac{1}{E_0 A_0} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_{1i} N_{Pi} l_i}{d_i} = \frac{1}{E_0 A_0} \eta_1$$

故
$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\eta_1}{\xi_1}$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + N_P = -\frac{\eta_1}{\xi_1} \bar{N}_1 + N_P$$

由于 \bar{N}_1 、 N_P 不变,故 η_1 、 ξ_1 只与 d_i 有关,若 d_i 不变,则 $\frac{\eta_1}{\xi_1}$ 不变,轴力分布不变。

(3) 组合结构(不考虑剪切变形)

由梁式杆和链杆组成的组合结构，共有 n 个杆件。参照(一)、(二)，柔度系数与自由项为：

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i^2}{EI} ds + \sum \frac{\bar{N}_i^2 l}{EA} = \frac{1}{E_0 I_0} \sum_{i=1}^n \int_i \frac{\bar{M}_{i1}^2}{c_i} ds + \frac{1}{E_0 A_0} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{N}_{i1}^2 l_i}{d_i} \\ &= \frac{\xi}{E_0 I_0} + \frac{\xi_1}{E_0 A_0}\end{aligned}$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} ds + \sum \frac{\bar{N}_i N_P l}{EA} = \frac{\eta}{E_0 I_0} + \frac{\eta_1}{E_0 A_0}$$

设 $I_0 = \alpha A_0$ ， α 为常数

$$\text{则 } \delta_{11} = \frac{1}{E_0 I_0} (\xi + \alpha \xi_1), \quad \Delta_{1P} = \frac{1}{E_0 I_0} (\eta + \alpha \eta_1)$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\eta + \alpha \eta_1}{\xi + \alpha \xi_1}$$

可见内力分布与 $E_0 I_0$ 和 $E_0 A_0$ 绝对值无关，与比例常数 c_i 、 d_i 及 α 有关。若 c_i 、 d_i 及 α 均不变，而只按 $\frac{I_0}{A_0} = \alpha$ 的比例改变 I_0 与 A_0 的绝对值，则 X_1 不变，内力不变。

(4) 变截面杆件结构

把上述中各杆的 $EI = c_i E_0 I_0$ 和 $EA = d_i E_0 A_0$ 改为 $EI = c_{ii} E_0 I_0$ 和 $EA = d_{ii} E_0 A_0$ 就可得出同样的结论。这里 c_{ii} 和 d_{ii} 是各杆轴线坐标 S 的连续函数，它反映连续变截面各杆 (i 为杆号) 各截面刚度的相对比值。

(5) 对于各杆截面形状不同，且同时考虑弯曲变形、轴向变形和剪切变形的情况

当同时考虑弯曲变形、轴向变形和剪切变形对内力影响时，柔度系数的计算公式为

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_i^2}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_i^2}{EA} ds = \sum \int \frac{k \bar{Q}_i^2}{GA} ds \\ &= \sum \int \frac{\bar{M}_i^2}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_i^2}{EI} \frac{I}{A} ds + \sum \int \frac{k \bar{Q}_i^2}{EI} \frac{E}{G} \frac{I}{A} ds\end{aligned} \quad (c)$$

对于各向同性材料，拉伸模量与剪切模量之比为

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \mu)$$

μ 为横向变形系数，对于各种形状的截面，如图 4-16-1 所示，惯性矩与截面积之比可表示为

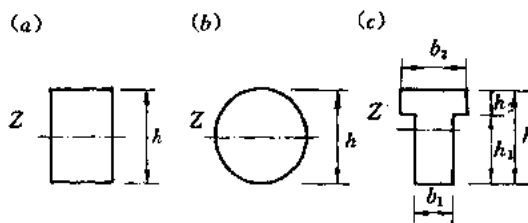


图 4-16-1

$$\frac{I_i}{A_i} = a_i h_i^2 = \alpha_i \quad (d)$$

其中 h_i 为截面与中性轴 Z 正交方向的最大尺寸, a_i 为形状常数, 矩形截面 $a_i = \frac{1}{12}$, 圆形截面 $a_i = \frac{1}{16}$, T 形截面 a_i 可由 b_1, b_2, h_1, h_2 按式(d)算得, 对其它形状的截面均可算出 a_i 值。

令
$$\frac{k_i E_i}{G_i} = \mu_i, \quad E_i I_i = c_i E_0 I_0 \quad (e)$$

将式(d)、(e)代入式(c), 得

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{E_0 I_0} \left[\sum_{i=1}^n \int \frac{\overline{M}_{1i}^2}{c_i} ds + \sum_{i=1}^n \int \frac{\alpha_i \overline{N}_{1i}^2}{c_i} ds + \sum_{i=1}^n \int \frac{\mu_i \alpha_i \overline{Q}_{1i}^2}{c_i} ds \right] \\ &= \frac{1}{E_0 I_0} (\xi + \xi_1 + \xi_2) \end{aligned} \quad (f)$$

同理得
$$\Delta_{1P} = \frac{1}{E_0 I_0} (\eta + \eta_1 + \eta_2)$$

于是
$$X_1 = \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = - \frac{\eta + \eta_1 + \eta_2}{\xi + \xi_1 + \xi_2} \quad (g)$$

当超静定结构各杆截面形状、尺寸比例和所用材料确定后, 各杆的 α_i 和 μ_i 保持不变, c_i 也不变。因此不管 $E_0 I_0$ 的绝对值如何, 只是影响各杆 $E_i I_i$ 按同一比例增减, 使式(g)中分子和分母按同一比例增减, X_1 保持不变。

当各杆为连续变截面杆件, 且同时考虑弯曲变形, 轴向变形和剪切变形时, 经同样推理, 可得相同结论。不再赘述。

2. n 次超静定结构

荷载作用下的力法方程为

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

参照式(f), 有

$$\delta_{ij} = \frac{1}{E_0 I_0} (\xi + \xi_1 + \xi_2)_{ij} = \frac{1}{E_0 I_0} \xi_{ij} \quad (h)$$

$$\Delta_{iP} = \frac{1}{E_0 I_0} (\eta + \eta_1 + \eta_2)_{iP} = \frac{1}{E_0 I_0} \eta_{iP} \quad (i)$$

基本未知力为

$$X_j = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1,j-1} & -\Delta_{1P} & \delta_{1,j+1} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2,j-1} & -\Delta_{2P} & \delta_{2,j+1} & \cdots & \delta_{2n} \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{n,j-1} & -\Delta_{nP} & \delta_{n,j+1} & \cdots & \delta_{nn} \end{vmatrix}$$

将式(h)、(i)代入并提出公因子 $\left(\frac{1}{E_0 I_0}\right)^n$ 后消去, 得

$$X_j = \frac{\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \eta_{1P} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \eta_{2P} & \cdots & \xi_{2n} \\ & & & \cdots & & \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \eta_{nP} & \cdots & \xi_{nn} \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1j} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2j} & \cdots & \xi_{2n} \\ & & & \cdots & & \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nj} & \cdots & \xi_{nn} \end{vmatrix}}{D_0} = \frac{D_j}{D_0} \quad (j)$$

因 ξ_{ij} 和 η_{iP} 与刚度绝对值无关，只与刚度相对值有关，则行列式 D_0 和 D_j 以及 X_j 也具有相同性质。

对于具有连续变截面杆的 n 次超静定结构，同样可推出上述结论。

以上全部讨论都限定在不改变杆长，只改变截面刚度的情况。如果杆长也改变，则须引入线刚度 $i = \frac{EI}{l}$ ，讨论内力分布与线刚度的关系。只要将各式中 $E_0 I_0$ 改成 $i_0 = \frac{E_0 I_0}{l}$ ，就能得出同样的结论。

应当指出，超静定结构在支座位移、温度变化、装配误差等非荷载因素下，用力法计算时，不能用刚度相对值。就一次超静定结构而言，力法方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1c} + \Delta_{1t} + \Delta_{1s} = \Delta_1^0$$

式中 Δ_1^0 为原结构沿 X_1 方向的已知位移，与刚度无关； Δ_{1c} 、 Δ_{1t} 、 Δ_{1s} 分别为基本结构中由于支座位移、温度变化、装配误差引起的沿 X_1 方向的位移，其中

$$\Delta_{1c} = - \sum \bar{R}_c$$

$$\Delta_{1s} = \sum \int \bar{M}_1 d\theta + \sum \int \bar{N}_1 d\lambda + \sum \int \bar{Q}_1 d\gamma$$

均与杆件截面刚度无关。而

$$\Delta_{1t} = \sum \int \bar{N} \alpha t_0 ds + \sum \int \bar{M}_1 \frac{\alpha t}{h} ds$$

中第二项与截面高度 h 有关，但不能分离出独立因子 $\frac{1}{E_0 I_0}$ 。

柔度系数 δ_{11} 参照式 (f) 可写为

$$\delta_{11} = \frac{1}{E_0 I_0} (\xi + \xi_1 + \xi_2)$$

$$\text{则 } X_1 = \frac{\Delta_1^0 - \Delta_{1c} - \Delta_{1t} - \Delta_{1s}}{\delta_{11}} = \frac{\Delta}{\delta_{11}} = \frac{E_0 I_0 \Delta}{\xi + \xi_1 + \xi_2}$$

说明内力取决于 $E_0 I_0$ 的绝对值。

同样，用非线性材料制成的超静定结构，用力法计算时不能用相对刚度值。如用理想弹塑性材料（参见 4-17），当杆中有塑性区出现，其基本结构的位移 Δ_1 要取决于截面的具体尺寸。

当用位移法计算时，以上一切结论都适用。

4-17 非弹性体系的超静定结构能否用力法求解？

可以。用力法解非弹性体系超静定结构的方法仍然是：解除多余约束代以基本未知力 $X_j (j=1, 2, \dots, n)$ ，确定基本体系；基本体系在 X_j 和外界因素共同作用下沿 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 方向产生的位移 Δ_i 应等于原结构沿 X_i 方向的位移 Δ_i^0 ，由这些变形协调条件建立力法方程；解方程求得 X_j ，最后求得原结构内力。力法方程为

$$\Delta_i = \Delta_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

因叠加原理不适于非弹性体系的位移计算， Δ_i 应在 $X_j (j=1, 2, \dots, n)$ 和外界因素（荷载、支座移动、温度变化等）共同作用下一起计算，不能分项计算后再叠加，即不能按下式计算：

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP}$$

或
$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} + \Delta_{iP}$$

其中 Δ_{ij} 为 X_j 作用在基本结构上沿 X_i 方向产生的位移， n 为超静定次数。下面举例作进一步讨论。

图 4-17-1(a) 示一矩形截面梁，理想弹塑性材料，应力-应变曲线如图(b)所示。已知梁截面屈服弯矩（弹性极限弯矩） M_y 、极限弯矩 M_u 、惯性矩 I 及弹性模量 E ，支座 B 下沉量为 a 。求梁的内力。

取基本体系如图(c)所示。建立力法方程

$$\Delta_1 = a$$

这里 Δ_1 是基本结构在支座移动和 X_1 共同作用下沿 X_1 方向产生的位移，它应等于原结构相应的位移 a 。基本结构由于支座移动产生的位移与材料无关，故此可分别求支座移动和 X_1 作用沿 X_1 方向产生的位移，叠加得 Δ_1 。但前者在这里为零，故 Δ_1 仅为基本结构在 X_1 作用下产生的沿 X_1 方向的位移。

设 $M_y < X_1 l < M_u$ ，即设由于支座下沉在梁上不出现塑性铰但出现塑性区（梁上 AC 段）。如图(c)所示，离 B 支座 x_y 处弯矩为 M_y ，根据单位荷载法，有

$$\Delta_1 = \int_0^{x_y} \frac{\bar{M} M_1}{EI} ds + \sigma_y \int_{x_y}^l \frac{\bar{M}}{E y_0} dx \quad (a)$$

其中 \bar{M} 为单位荷载作用在 B 点（竖向向下）时梁中各截面的弯矩， $\bar{M} = x$ ； M_1 为 X_1 作用下梁中各截面的弯矩， $M_1 = X_1 x$ 。上式中右边第一项为仍处在线弹性阶段的 BC 段变形对 Δ_1 的贡献；第二项为塑性区 CA 段变形对 Δ_1 的贡献（见 3-14）。对于矩形截面，有

$$\sigma_y = \frac{M_y h}{2I}, \quad M_y = \frac{2}{3} M_u, \quad y_0 = \sqrt{\frac{3}{4} h^2 - \frac{3M_1}{b\sigma_y}} = \frac{\sqrt{3}}{2} h \sqrt{1 - \frac{M_1}{M_u}}$$

其中 h 为截面高度，将上式连同

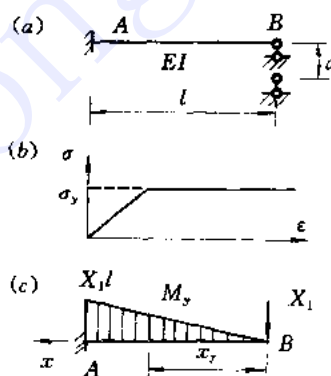


图 4-17-1

$$\bar{M} = x, \quad M_1 = X_1 x, \quad x_y = \frac{M_y}{X_1}$$

代入式(a), 积分、整理后得

$$\Delta_1 = \frac{8}{81} \frac{M_y^2}{X_1^2 EI} \left[\left(1 + \frac{4}{3} \sqrt{5} \right) - \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{X_1 l}{M_y} \right) \sqrt{1 - \frac{X_1 l}{M_y}} \right]$$

由力法方程 $\Delta_1 = a$ 解得 X_1 。 X_1 求出后, 按平衡条件可求得梁的内力。

解上述力法方程 $\Delta_1 = a$ 可用试算。 x_y 的上限为 $\frac{M_y}{l}$, ($X_1 l = M_y$, A 点出现塑性铰), 下限为 $X_1 = \frac{M_y}{l}$ ($X_1 l = M_y$, 梁上不出现塑性区)。若在此范围内 X_1 无解, 可能存在两种情况:

(1) 全梁截面均未达到弹性极限弯矩 M_y , 即全部截面均处在线弹性变形阶段, 这时 $X_1 = \frac{3EI}{l^2} a$ 。若

$$X_1 l = \frac{3EI}{l^2} a < M_y$$

即属此情形, 否则应属下面情形。

(2) 在 A 点出现塑性铰, A 点弯矩保持 M_y 值, 则 X_1 应取 $\frac{M_y}{l}$ 值。

第五章 位 移 法

5-1 位移法如何体现结构力学应满足的三方面条件(平衡条件、几何条件与物理条件)?

结构力学中的计算方法有多种,但所有各种方法都需考虑下列三方面条件:

1. 力系的平衡条件或运动条件;
2. 变形的几何连续条件;
3. 应力与变形间的物理条件。

位移法的两种计算方式(利用基本体系建立典型方程和直接列杆端力建立平衡方程)都是按两大步骤进行,即单杆分析和整体分析。单杆分析是利用转角位移方程和固端力表得到杆端力与杆端位移和荷载的关系,或得到 \bar{M} 和 M_0 图;整体分析得到位移法基本方程。

在整体分析中,确定位移法的基本未知量,考虑了交于结点的诸杆端间的变形条件,而基本方程反映结点平衡条件。因此,整体分析是在结点处考虑了上述三方面条件。

单杆分析的直接依据是转角位移方程和固端力表。它们可以从不同途径(如静力法和能量法)推导而得。但不管哪种途径,都要对杆间各微段考虑上述三方面条件。下面我们从考虑上述三方面条件的线性变形等直杆挠曲线微分方程

$$EIy'''' = -q(x)$$

推导出转角位移方程。

图 5-1-1 示一线性变形等直杆。设 $y_A=0, y_B=\Delta$ (Δ 为 A、B 两杆端相对侧移)。图中示出各量的正值方向。

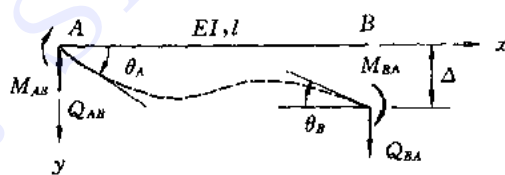


图 5-1-1

在这里, $q(x)=0$, 对挠曲线微分方程积分, 得

$$EIy'''' = -Q = c_1$$

$$EIy''' = -M = c_1x + c_2$$

$$EIy'' = EI\theta = \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3$$

$$EIy = \frac{c_1}{6}x^3 + \frac{c_2}{2}x^2 + c_3x + c_4$$

其中 M 以下侧纤维受拉为正。

利用边界条件,有

$$x=0, \quad y=y_A=0 \quad ; \quad \text{得} \quad c_4=0 \quad (a)$$

$$M=M_{AB} \quad ; \quad \text{得} \quad c_2=-M_{AB} \quad (b)$$

$$y'=\theta_A \quad ; \quad \text{得} \quad c_3=EI\theta_A \quad (c)$$

$$Q=Q_{AB} \quad ; \quad \text{得} \quad c_1=-Q_{AB} \quad (d)$$

$$x=l, \quad y=y_B=\Delta \quad ; \quad \text{得} \quad \frac{l^3}{6}c_1 + \frac{l^2}{2}c_2 + lc_3 = EI\Delta \quad (e)$$

$$M=-M_{BA} \quad ; \quad \text{得} \quad c_1l + c_2 = M_{BA} \quad (f)$$

$$y'=\theta_B \quad ; \quad \text{得} \quad \frac{l^2}{2}c_1 + lc_2 + c_3 = EI\theta_B \quad (g)$$

$$Q=Q_{BA} \quad ; \quad \text{得} \quad c_1 = -Q_{BA} \quad (h)$$

联立式(a)、(c)、(e)和(g),解得

$$c_1 = \frac{EI}{l^2} \left(6\theta_A + 6\theta_B - 12 \frac{\Delta}{l} \right),$$

$$c_2 = \frac{EI}{l} \left(4\theta_A + 2\theta_B - 6 \frac{\Delta}{l} \right),$$

$$c_3 = EI\theta_A, \quad c_4 = 0$$

将它们代入式(b)、(d)、(f)和(h),并令 $i = \frac{EI}{l}$, 得到转角位移方程

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i\theta_A + 2i\theta_B - \frac{6i}{l}\Delta \\ M_{BA} &= 2i\theta_A + 4i\theta_B - \frac{6i}{l}\Delta \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = -\frac{6i}{l}\theta_A - \frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l^2}\Delta \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

另外,固端力表中各项结果也都可由挠曲线微分方程求得。

因为挠曲线微分方程是对等直杆综合考虑上述三方面条件而得,所以位移法的解满足上述三方面条件。

5-2 弯曲杆件刚度方程中的刚度矩阵在什么情况下存在逆阵?

上节中的转角位移方程可写成

$$\begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ Q_{AB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 2i & -\frac{6i}{l} \\ 2i & 4i & -\frac{6i}{l} \\ -\frac{6i}{l} & -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \Delta \end{Bmatrix} \quad (a)$$

上式称自由体的弯曲杆件的刚度方程,其中矩阵称刚度矩阵。利用式(a),只要已知杆端位移 $[\theta_A \quad \theta_B \quad \Delta]^T$, 就能唯一确定杆端力 $[M_{AB} \quad M_{BA} \quad Q_{AB}=Q_{BA}]^T$, 其中

$$Q_{AB} = Q_{BA} = -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{l}$$

但是已知杆端力，不能唯一确定杆端位移。这是因为可能存在刚体位移。从式(a)来看，因

$$\begin{vmatrix} 4i & 2i & -\frac{6i}{l} \\ 2i & 4i & -\frac{6i}{l} \\ -\frac{6i}{l} & -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} \end{vmatrix} = 0$$

所以刚度矩阵的逆阵不存在。

只有当弯曲杆件的刚体位移已知，或当两端支承条件已确定，这时刚度方程中的刚度矩阵才是可逆的。如图 5-2-1(a)所示结构，刚体位移为零，且杆端线位移 $\Delta=0$ 。这时刚度方程为

$$\begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix}$$

其刚度矩阵可逆。

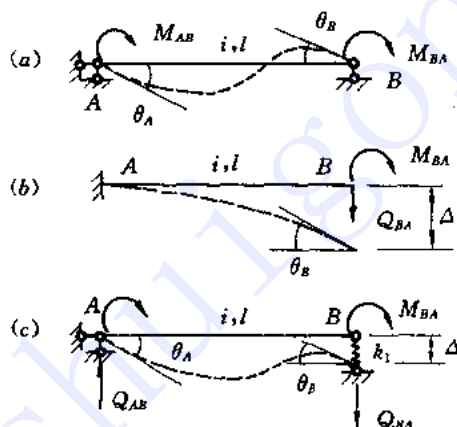


图 5-2-1

又如图(b)所示的结构，刚体位移为零，且杆端转角 $\theta_A=0$ ，这时刚度方程为

$$\begin{Bmatrix} M_{BA} \\ Q_{AB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & -\frac{6i}{l} \\ -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \Delta \end{Bmatrix}$$

其刚度矩阵可逆。

又如图(c)所示的结构，其刚体位移为零，其中 k_1 为弹性支座弹簧系数。因 $Q_{BA} = -k_1\Delta$ ，代入式(a)第三式，有

$$\Delta = \frac{(6i/l)(\theta_A + \theta_B)}{k_1 + 12i/l^2}$$

将上式代入式(a)的第一、二式，得刚度方程为

$$\begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4i \left(1 - \frac{9i}{k_1 l^2 + 12i} \right) & 2i \left(1 - \frac{18i}{k_1 l^2 + 12i} \right) \\ 2i \left(1 - \frac{18i}{k_1 l^2 + 12i} \right) & 4i \left(1 - \frac{9i}{k_1 l^2 + 12i} \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix}$$

其刚度矩阵可逆。

5-3 铰结端角位移和滑动支承端线位移为什么不作为位移法的基本未知量？

在转角位移方程中，铰结端的角位移和滑动支承端的线位移都不是独立的杆端位移分量，而与其它杆端位移分量保持确定的关系。为了减少基本方程数目，上述位移分量不引入基本未知量。如图 5-3-1(a) 所示的等截面直杆 (B 端铰结) 具有杆端位移 $\theta_A, \theta_B, \Delta$ 。利用两端刚结杆转角位移方程，有

$$\begin{cases} M_{AB} = 4i\theta_A + 2i\theta_B - \frac{6i}{l}\Delta + m_{AB} \\ M_{BA} = 2i\theta_A + 4i\theta_B - \frac{6i}{l}\Delta + m_{BA} \end{cases} \quad (a)$$

式中 m_{AB} 和 m_{BA} 分别指两端固定时 A 端和 B 端的固端弯矩。若 B 端的铰结，则有 $M_{BA} = 0$ 。由式 (a) 第二式，有

$$\theta_B = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{l}\Delta - \theta_A - \frac{m_{BA}}{2i} \right) \quad (b)$$

代入式 (a) 第一式，得

$$\begin{cases} M_{AB} = 3i\theta_A - 3i\frac{\Delta}{l} + m'_{AB} \\ M_{BA} = 0 \end{cases} \quad (c)$$

其中 $m'_{AB} = m_{AB} - m_{BA}/2$ (其值为 A 端固结 B 端铰结时的固端弯矩)。当使用式 (c) 时，铰结端角位移不再作为独立未知量而隐含于 θ_A 和 Δ 之中。

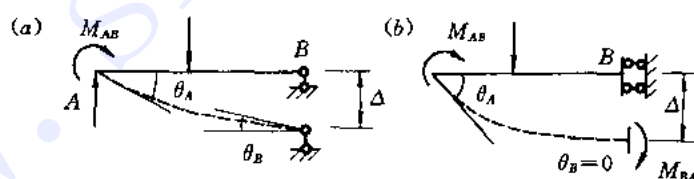


图 5-3-1

再如图 5-3-1(b) 所示的等截面直杆，B 端为滑动支承。将 $Q_{BA} = 0$ 和 $\theta_B = 0$ 代入两端刚结的转角位移方程中，有

$$Q_{BA} = -\frac{6i}{l}\theta_A + \frac{12i}{l^2}\Delta - \frac{m_{AB} + m_{BA}}{l} - \frac{M_A^c}{l} = 0$$

$$\text{即} \quad \Delta = \frac{l}{2}\theta_A + \frac{l}{12i}(m_{AB} + m_{BA} + M_A^c) \quad (d)$$

其中 M_A^c 为杆上荷载对 A 点力矩代数和 (顺时针为正)。将上述关系代入式 (a)，得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= i\theta_A + m_{AB}^* \\ M_{BA} &= -i\theta_A + m_{BA}^* \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

其中
$$m_{AB}^* = \frac{1}{2}(m_{AB} - m_{BA} - M_A^0)$$

$$m_{BA}^* = \frac{1}{2}(m_{BA} - m_{AB} - M_A^0)$$

它们为一端固定一端滑动杆的固端弯矩。

在位移法计算中使用式(e)时，滑动支承端的侧移 Δ 便不作为基本未知量而隐含于 θ_A 中。

若不引入式(b)和式(d)，则铰结端角位移和滑动支承端线位移仍作为独立未知量。此时杆端弯矩一律采用式(a)。基本未知量增多，基本方程数目也相应增多，但计算结果相同。下面以图 5-3-2 所示刚架为例，说明这两种计算的异同。

1. 基本未知量取 θ_B 和 Δ (B、C 结点水平位移)，则

$$M_{BA} = 4i\theta_B - \frac{6i}{l}\Delta + \frac{ql^2}{12}, \quad M_{BC} = 3i\theta_B$$

$$Q_{BA} = -\frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l^2}\Delta - \frac{ql}{2}, \quad Q_{CD} = \frac{3i}{l^2}\Delta + \frac{5}{16}ql$$

由结点 B 的力矩平衡条件和两柱的剪力平衡条件建立基本方程

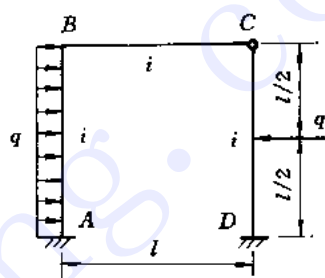


图 5-3-2

$$\left. \begin{aligned} 7i\theta_B - \frac{6i}{l}\Delta + \frac{ql^2}{12} &= 0 \\ -\frac{6i}{l}\theta_B + \frac{15i}{l^2}\Delta - \frac{3}{16}ql &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

解得
$$\theta_B = -\frac{ql^2}{552i}, \quad \Delta = \frac{13ql^3}{1104i}$$

2. 考虑铰结端转角作为独立未知量，取基本未知量为 $\theta_B, \theta_{CB}, \theta_{CD}$ 和 Δ ，则杆端弯矩表达式为

$$M_{AB} = 2i\theta_B - \frac{6i}{l}\Delta - \frac{ql^2}{12}, \quad M_{BA} = 4i\theta_B - \frac{6i}{l}\Delta + \frac{ql^2}{12}$$

$$M_{BC} = 4i\theta_B + 2i\theta_{CB}, \quad M_{CB} = 2i\theta_B + 4i\theta_{CB}$$

$$M_{CD} = 4i\theta_{CD} - \frac{6i}{l}\Delta - \frac{ql^2}{8}, \quad M_{DC} = 2i\theta_{CD} - \frac{6i}{l}\Delta + \frac{ql^2}{8}$$

柱上端剪力为

$$Q_{BA} = -\frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l^2}\Delta - \frac{ql}{2}, \quad Q_{CD} = -\frac{6i}{l}\theta_{CD} + \frac{12i}{l^2}\Delta + \frac{ql}{2}$$

应列出四个基本方程。由结点 B 的力矩平衡条件、 $M_{CB} = 0, M_{CD} = 0$ 和立柱 BA、CD 上端剪力平衡条件分别列出：

$$8i\theta_B + 2i\theta_{CB} - \frac{6i}{l}\Delta - \frac{ql^2}{12} = 0 \quad (g)$$

$$2i\theta_B + 4i\theta_{CB} = 0 \quad (h)$$

$$4i\theta_{CD} - \frac{6i}{l}\Delta - \frac{ql^2}{8} = 0 \quad (i)$$

$$-\frac{6i}{l}\theta_B - \frac{6i}{l}\theta_{CD} + \frac{24}{l^2}\Delta = 0 \quad (j)$$

联立解得 $\theta_B = -\frac{ql^2}{552i}$, $\theta_{CB} = \frac{ql^2}{1104i}$, $\theta_{CD} = \frac{3ql^2}{92i}$, $\Delta = \frac{13ql^3}{1104i}$

若由式(h)直接可得

$$\theta_{CB} = -\frac{\theta_B}{2} \quad (k)$$

由式(i)得 $\theta_{CD} = \frac{3}{2l}\Delta + \frac{ql^2}{32i}$ (l)

分别代入式(g)和式(j),便得到与式(f)完全相同的两个方程。

上述两种计算不同之处在于:前者是在杆件转角位移方程中事先引入平衡条件式(b)及式(d),使不独立的杆端位移不列入基本未知量,而在建立基本方程时使用修改后的杆端弯矩表达式(c)和式(e);后者是对所有杆件使用统一的转角位移方程式(a),所有杆端位移均作为基本未知量。显然,前者的基本未知量和基本方程数目少于或等于后者。但在矩阵分析中由于杆件单元标准化,后者将获得某些方便。

5-4 固端力表中三类杆件的固端力之间有何关系?

固端力表中列出了三类杆件(两端固定杆、一端固定一端简支杆、一端固定一端滑动支承杆)在各种不同荷载及温度变化作用时的固端弯矩和固端剪力。这三类杆件固端力之间有何关系?能否由第一类杆件的固端力导出二、三类杆件的固端力?能否由最简单荷载下的固端力导出一般荷载下的固端力?下面回答这些问题。

在杆件长度 l , 截面抗弯刚度 EI 及荷载不改变的条件下,三类杆件的相应固端力之间只相差一个常数。利用第一类杆的固端力可以导出二、三类杆的相应固端力,但必须将它们和杆端位移所产生的杆端力放在一起加以分析。各种分布规律的荷载所产生的固端力,可以由单位荷载下的固端力导出,但温度变化作用需另行考虑。

图 5-4-1(a)示两端固定梁上作用有单位荷载,可用力法解出杆端弯矩与剪力:

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= -\frac{x(l-x)^2}{l^2}, & m_{BA} &= \frac{x^2(l-x)}{l^2} \\ Q_{AB} &= \frac{(l-x)^2}{l^2} \left(1 + \frac{2x}{l} \right), & Q_{BA} &= -\frac{x^2}{l^2} \left[1 + \frac{2(l-x)}{l} \right] \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

根据式(a)可导出两端固定梁在各种荷载作用下的固端力。如图 5-4-1(b)所示局部范围均布荷载,可视为无数微段集中力 qdx 作用的总和,故

$$\begin{aligned} m_{AB} &= -\frac{q}{l^2} \int_0^a x(l-x)^2 dx = -\frac{qa^2}{12} \left[6 - 8\frac{a}{l} + 3\left(\frac{a}{l}\right)^2 \right] \\ m_{BA} &= \frac{q}{l^2} \int_0^a x^2(l-x) dx = -\frac{qa^2}{12} \left[4\frac{a}{l} - 3\left(\frac{a}{l}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

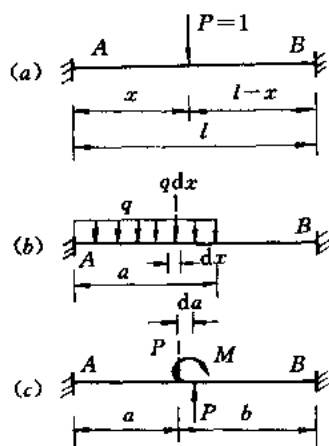


图 5-4-1

$$Q_{AB} = \frac{q}{l^2} \int_0^a (l-x)^2 \left(1 + \frac{2x}{l}\right) dx = \frac{qa}{2} \left[2 - 2\left(\frac{a}{l}\right)^2 + \left(\frac{a}{l}\right)^3\right]$$

$$Q_{BA} = -\frac{q}{l^2} \int_a^l x^2 \left(3 - 2\frac{x}{l}\right) dx = -\frac{qa}{2} \left[2\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \left(\frac{a}{l}\right)^3\right]$$

再如图 5-4-1(c) 所示的集中力偶, 可将它看作一对相距为 da 的反向集中力, 即 $M = Pda$ 。

令式(a)中的 $x=a, l-x=b$, 得

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{Pab^2}{l^2} - \frac{P(a+da)(b-da)^2}{l^2} \\ &= \frac{P}{l^2} [(2ab - b^2) - (a-2b)da + da^2] da \end{aligned}$$

令 $da \rightarrow 0$, 略去高阶微量, 得

$$m_{AB} = \frac{Mb}{l^2} (2a - b)$$

同理求得

$$m_{BA} = \frac{Ma}{l^2} (2b - a), \quad Q_{AB} = Q_{BA} = -\frac{6M}{l^3} ab$$

现在讨论利用第一类杆件的固端力导出二、三类杆件固端力。设在某组荷载作用下, 两端固定杆件的固端弯矩为 m , A 端固定、B 端简支(或滑动支承)杆件在同样荷载作用下的固端力为 m' (或 m'')。由上节讨论可知它们之间有如下关系

$$\left. \begin{aligned} m'_{AB} &= m_{AB} - \frac{m_{BA}}{2} \\ m''_{AB} &= \frac{1}{2} (m_{AB} - m_{BA} - M_A^0) \\ m'_{BA} &= \frac{1}{2} (m_{BA} - m_{AB} - M_A^0) \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

其中 M_A^0 为杆上荷载对 A 的力矩代数和, 顺时针为正。

如图 5-4-2(a) 所示的第一类杆件的固端弯矩为

$$m_{AB} = -\frac{Pab^2}{l^2}, \quad m_{BA} = \frac{Pa^2b}{l^2}$$

则图(b)所示的第二类杆件固端弯矩为

$$m_{AB} = -\frac{Pab^2}{l^2} - \frac{1}{2} \frac{Pa^2b}{l^2} = -\frac{Pab}{2l^2}(l+b) = -\frac{Pb(l^2-b^2)}{2l^2}$$

图(c)所示的第三类杆件固端弯矩为

$$m_{AB}^* = \frac{1}{2} \left(-\frac{Pab^2}{l^2} - \frac{Pa^2b}{l^2} - Pa \right) = -\frac{Pa}{2l}(l+b)$$

$$m_{BA}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{Pa^2b}{l^2} + \frac{Pab^2}{l^2} - Pa \right) = -\frac{Pa^2}{2l}$$

相应的固端剪力可由杆件平衡条件求得, 不必再导出换算公式。

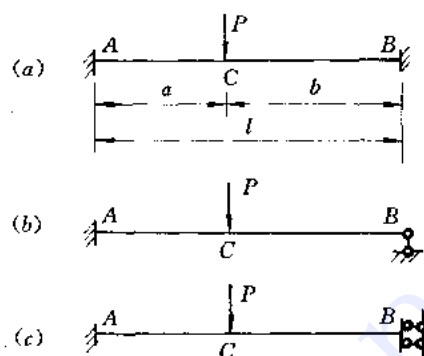


图 5-4-2

当有温度变化时, 可用同样方法由第一类杆件的固端弯矩导出二、三类杆件的固端弯矩。读者可自己推导。

5-5 弹性支座处杆端位移是否应作为位移法基本未知量?

弹性支座处的杆端位移既可以列入也可以不列入基本未知量。如果不列入, 则需事先找出它们与作为基本未知量的杆端位移之间的关系, 并导出相应的转角位移方程。

图 5-5-1(a) 示杆的 B 端有弹性抗转支座的角位移, 图(b) 示杆 B 端有弹性支座线位移, 图(c) 示杆 B 端既有弹性支座线位移又有角位移。下面分别推导转角位移方程。

1. 一端刚结一端弹性抗转支承 [图(a)]

在这里, $\Delta=0$ 。当 B 端角位移为 θ_B , 弹性支承反力矩为 $k\theta_B$, 方向恒与 θ_B 相反。抗转刚度 k_r 为杆端有单位转角时, 弹性支承中的反力矩大小。

在两端刚结杆件的转角位移方程

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i\theta_A + 2i\theta_B + m_{AB} \\ M_{BA} &= 2i\theta_A + 4i\theta_B + m_{BA} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

中引入结点 B 的平衡条件 $M_{BA} = -k_r\theta_B$, 得

$$\theta_B = \frac{1}{4i + k_r} (2i\theta_A + m_{BA}) \quad (b)$$

再代入式(a), 得

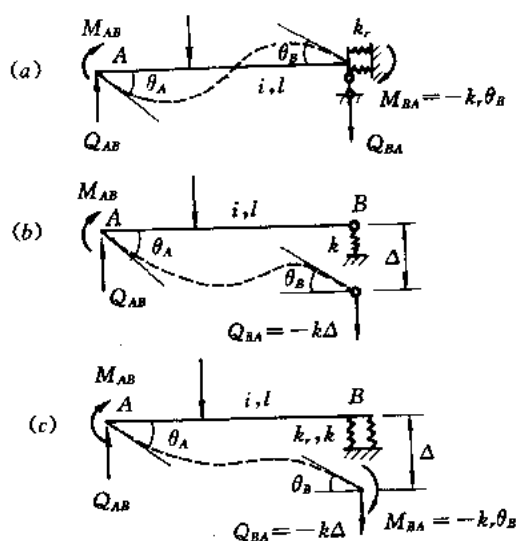


图 5-5-1

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \left(\frac{1 + 0.75\alpha}{1 + \alpha} \right) 4i\theta_A + m_{AB} - \frac{0.5\alpha}{1 + \alpha} m_{BA} \\ M_{BA} &= \frac{1}{1 + \alpha} (2i\theta_A + m_{BA}) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

其中

$$\alpha = \frac{4i}{k_r}$$

式(c)就是一端刚结一端弹性抗转支承的杆端弯矩公式。利用杆的平衡条件可求得

$$Q_{AB} = -\frac{1}{l(1 + \alpha)} \left[(2 + \alpha)3i\theta_A + (1 + \alpha)(m_{AB} + M_B^0) + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)m_{BA} \right]$$

$$Q_{BA} = -\frac{1}{l(1 + \alpha)} \left[(2 + \alpha)3i\theta_A + (1 + \alpha)(m_{BA} + M_A^0) + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)m_{BA} \right]$$

其中 M_A^0, M_B^0 分别为杆上荷载对 A、B 点力矩的代数和，顺时针为正。

2. 一端刚结一端带铰弹性支承杆[图(b)]

利用 5-3 的式(c)，杆端弯矩

$$M_{AB} = 3i\theta_A - 3i \frac{\Delta}{l} + m_{AB} \quad (d)$$

则杆端剪力
$$Q_{BA} = -\frac{3i}{l}\theta_A + \frac{3i}{l^2}\Delta - \frac{m_{AB} + M_A^0}{l}$$

由结点 B 的平衡条件 $\sum Y = 0$ ，有

$$Q_{BA} = -k\Delta$$

代入上式，得

$$\Delta = \frac{l}{3i + kl^2} (3i\theta_A + m_{AB} + M_A^0) \quad (e)$$

代入式(d)，得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{1}{1+\beta}(3i\theta_A + m'_{AB}) - \frac{\beta}{1+\beta}M_A^e \\ M_{BA} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

式中 $\beta = \frac{3i}{kl^2}$

杆端剪力为 $Q_{AB} = -\frac{1}{(1+\beta)l} \left(3i\theta_A + m_{AB} - \frac{\beta}{1+\beta}M_A^e + M_B^e \right)$

$$Q_{BA} = -\frac{1}{(1+\beta)l} (3i\theta_A + m'_{AB} + M_A^e)$$

3. 一端刚结一端为可侧移弹性抗转支承杆[图(c)]

利用 5-3 式(a), 并引入结点 B 的两个平衡条件 $\sum M_B = 0$ 和 $\sum Y = 0$, 可得只含 θ_A 的杆端弯矩公式, 读者可自行推导。

例 图 5-5-2(a) 示一刚架。B 端为弹性支座, $k = \frac{3i}{l^2}$, D 端为弹性抗转支座, $k_r = 2i$ 。试用两种解法加以对照。

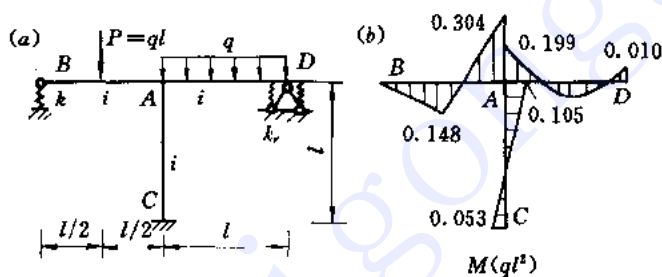


图 5-5-2

解 1. 只取 θ_A 作基本未知量
由给定条件可知

$$\alpha = \frac{4i}{k_r} = 2, \quad \beta = \frac{3i}{kl^2} = 1$$

则各杆端弯矩为

$$M_{AB} = \frac{1}{1+\beta}(3i\theta_A + m'_{AB}) - \frac{\beta}{1+\beta}M_A^e = \frac{1}{2} \left(3i\theta_A + \frac{3}{16}Pl \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{Pl}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{2}i\theta_A + \frac{11}{32}ql^2$$

$$M_{AC} = 4i\theta_A, \quad M_{CA} = 2i\theta_A$$

$$M_{AD} = \left(\frac{1+0.75\alpha}{1+\alpha} \right) 4i\theta_A + m_{AB} - \frac{0.5\alpha}{1+\alpha}m_{BA}$$

$$= \frac{2.5}{3}4i\theta_A - \frac{ql^2}{12} - \frac{2}{3} \frac{ql^2}{12} = \frac{10}{3}i\theta_A - \frac{ql^2}{9}$$

$$M_{DA} = \frac{1}{1+\alpha}(2i\theta_A + m_{BA}) = \frac{2}{3}i\theta_A + \frac{ql^2}{36}$$

列出结点 A 的力矩平衡方程 $\sum M_A = 0$ ，即

$$M_{AB} + M_{AC} + M_{AD} = 0$$

得
$$\left(\frac{3}{2} + 4 + \frac{10}{3}\right)i\theta_A + \left(\frac{11}{32} - \frac{1}{9}\right)ql^2 = 0$$

上式即为基本方程。解方程得

$$\theta_A = -\frac{67}{2544i}ql^2$$

于是可算得各杆端弯矩。弯矩图如图(b)所示。

2. 取 θ_A, θ_D 和 $\Delta_{BV} = \Delta$ 作基本未知量

杆端弯矩和剪力表达式为

$$M_{AB} = 3i\theta_A - \frac{3i}{l}\Delta + \frac{3}{16}Pl, \quad M_{AC} = 4i\theta_A, \quad M_{CA} = 2i\theta_A$$

$$M_{AD} = 4i\theta_A + 2i\theta_D - \frac{1}{12}ql^2, \quad M_{DA} = 2i\theta_A + 4i\theta_D + \frac{1}{12}ql^2$$

$$Q_{BA} = \frac{1}{l}\left(M_{AB} - \frac{1}{2}ql^2\right) = -\frac{3i}{l}\theta_A + \frac{3i}{l^2}\Delta + \frac{5}{16}ql$$

由结点 A 的 $\sum M_A = 0$ ，结点 B 的 $\sum Y = 0$ 和结点 D 的 $\sum M_D = 0$ ，分别得

$$11i\theta_A + 2i\theta_D - \frac{3i}{l}\Delta + \frac{5}{48}ql^2 = 0$$

$$\frac{3i}{l}\theta_A - \left(k + \frac{3i}{l^2}\right)\Delta - \frac{5}{16}ql = 0 \quad (Q_{BA} + k\Delta = 0)$$

$$2i\theta_A + (4i + k_r)\theta_D + \frac{ql^2}{12} = 0 \quad (M_{DA} + k_r\theta_D = 0)$$

将 $k = \frac{3i}{l^2}, k_r = 2i$ 代入，联立解得

$$\theta_A = \frac{67}{2544i}ql^2, \quad \theta_D = -\frac{145}{15264i}ql^2, \quad \Delta = -\frac{83}{1272i}ql^3$$

最后求得的弯矩图与图(b)相同。

5-6 用“铰化法”确定结点独立线位移时应注意些什么？

位移法解刚架时需要确定结点独立线位移个数。有一种方法是刚架中刚结点(包括固定端)变成铰结点，成为铰结体系，其自由度数为独立线位移数。我们把这种方法称为“铰化法”。

利用这种方法应注意它只适用于杆件的边界端(不与内部结点相交的杆端)为固定端、铰支端和垂直杆轴的滚轴支承端。若边界端是自由端、滑动支承端和沿杆轴方向的滚轴支承端，利用此方法会得出错误的结论。

图 5-6-1(a)、(b)表示两种不同的刚架。铰化后均为图(c)所示铰结体系，其自由度为 2，而原刚架独立结点线位移数为 1。图 5-6-2(a)、(b)所示的两种不同刚架，铰化后也均为其图(c)所示铰结体系。其自由度数为原刚架的独立线位移数。这是为什么呢？原来前

者在 D 端不可能有沿杆轴方向位移而发生垂直于杆轴的线位移,但此种线位移不属

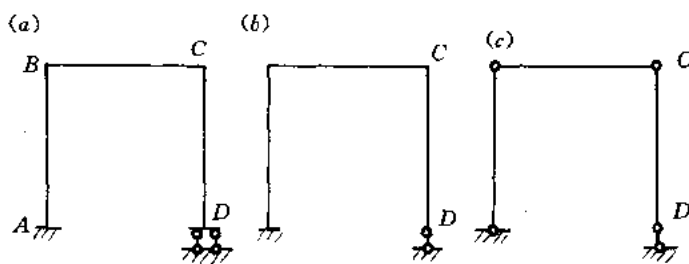


图 5-6-1

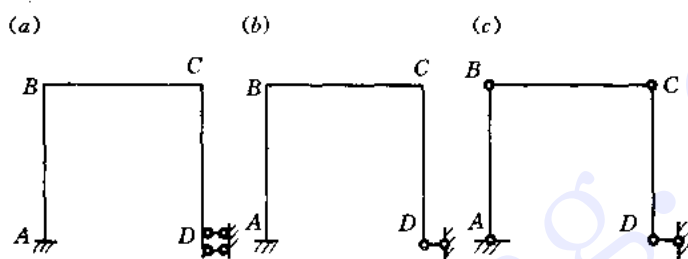


图 5-6-2

于独立的结点线位移;后者在 D 端有沿杆轴方向的线位移,导致结点 C 产生竖向线位移,因而独立的结点线位移有两个。图 5-6-1(c)与图 5-6-2(c)所示铰结体系虽然自由度相同,但前者 D 端所保留的运动自由度在原刚架中不是独立线位移,而后者相反。

这里顺便指出,判定结点线位移的另一种方法——“附加支杆法”,不存在这种问题,无论边界端属于什么性质,该方法都适用。因为“附加支杆”是为阻止结点的线位移,而不必阻止自由端、滑动支承端或辊轴支承端的与杆轴相垂直方向的线位移。例如对图 5-6-1(a)、(b)所示刚架,只需在结点 B 附加一水平支杆即可阻止全部结点线位移。对图 5-6-2(a)、(b)所示刚架,在结点 B 附加一水平支杆后,阻止了结点 B 、 C 的水平位移,但未能阻止结点 C 的竖向位移,须在结点 C 附加一竖向支杆。故结点的独立线位移数为 2,在刚结点上附加转动约束,在结点上附加必要的支杆约束后,即得到位移法基本结构。“附加支杆法”确定独立结点线位移时,不受杆件边界端约束状况的影响。

5-7 什么情况下独立结点线位移可以不作为位移法基本未知量?

若刚架的有侧移杆都是剪力静定杆,则用位移法求解时,独立的结点线位移也可以不作为位移法的基本未知量。这时刚架中杆件分为两类,一类是无侧移杆件,其杆端弯矩计算公式照旧。一类是有侧移但剪力静定杆,这类杆件无论其杆端连接刚结点还是固定端,其转角位移方程一律与一端刚结一端滑动约束杆(如图 5-7-1 所示)的相同。杆端弯矩公式为

$$M_{AB} = i\theta_A - i\theta_B + m_{AB}$$

$$M_{BA} = -i\theta_A + i\theta_B + m_{BA}^*$$

值得注意的是：无论滑动端在 A 端还是 B 端，上式中的系数矩阵相同，而在同样荷载下两者的固端弯矩 m_{AB}^* 和 m_{BA}^* 是不同的。

由于这类杆件的杆端相对侧移 Δ 与杆端截面转角 θ_A, θ_B 线性相关[见 5-3 式(d)]，因此在位移法中可以不作基本未知量。

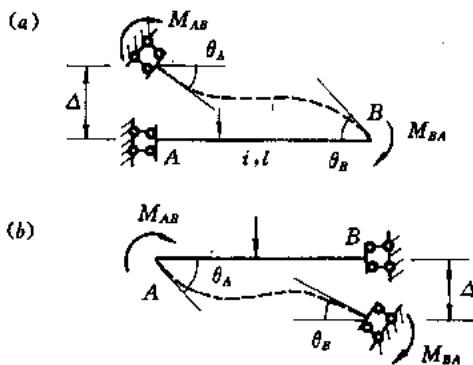


图 5-7-1

图 5-7-2(a) 示一有侧移刚架。用普通位移法求解时，基本未知量有 4 个： $\theta_B, \theta_C, \Delta_B, \Delta_C$ 。分析此刚架特点后，发现支座反力 Y_D, Y_E 都与有侧移杆 AB、BC 相平行而对它们剪力无影响，AB 和 BC 均为剪力静定杆。因此可只取 θ_B, θ_C 为基本未知量。杆端弯矩表达式，对无侧移杆为

$$M_{CD} = 3i\theta_C - \frac{1}{8}ql^2, \quad M_{BE} = 3i\theta_B - \frac{3}{16}Pl$$

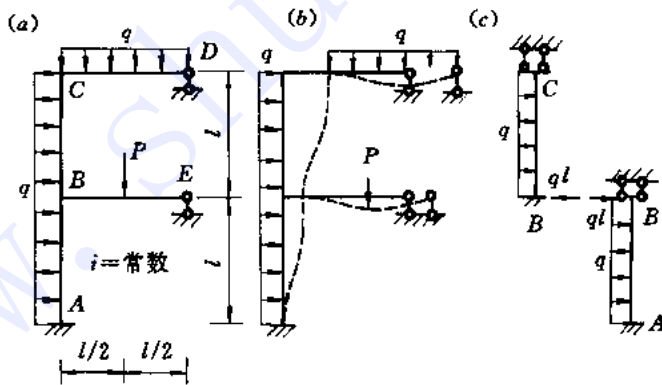


图 5-7-2

对于有侧移杆为

$$\begin{aligned} M_{CB} &= i\theta_C - i\theta_B + m_{CB}^*, & M_{BC} &= i\theta_B - i\theta_C + m_{BC}^* \\ M_{BA} &= i\theta_B + m_{BA}^*, & M_{AB} &= -i\theta_B + m_{AB}^* \end{aligned}$$

其中，固端弯矩 m^* 是在结点 C、B 加转动约束(但不约束侧移)后，荷载作用下各杆端的弯矩，如图(b)。 $m_{CB}^*, m_{BC}^*, m_{BA}^*$ 和 m_{AB}^* 应是一端固定一端滑动杆的固端弯矩，但要确定杆的哪

一端作为滑动端。

先看杆BC，由平衡条件可知C端剪力 $Q_{CB}=0$ ，B端剪力 $Q_{BC}=ql$ 。其受力和变形状态与B端固定、C端滑动杆相同(刚体平移不引起内力和变形)。因此，求固端弯矩时应按图(c)所示的BC杆处理，而不能把B端作为滑动端。同理，杆AB应按B端滑动、A端固定杆处理。同时，还应注意BC杆上的荷载对AB杆的影响。由结点B的平衡条件可知 $Q_{BA}=Q_{BC}=ql$ ，所以在求AB杆的固端弯矩时，除杆上直接作用的荷载外，还应在B端施加一集中力 ql 以保证 $Q_{BA}=ql$ ，如图(c)AB杆所示。于是固端弯矩

$$m_{CB}^{\circ} = -\frac{ql^2}{6}, \quad m_{BC}^{\circ} = -\frac{ql^2}{3}$$

$$m_{BA}^{\circ} = -\frac{ql \cdot l}{2} - \frac{ql^2}{6} = -\frac{2}{3}ql^2, \quad m_{AB}^{\circ} = -\frac{ql \cdot l}{2} - \frac{ql^2}{3} = -\frac{5}{6}ql^2$$

由结点B、C的力矩平衡条件，可列出位移法基本方程为

$$4i\theta_C - i\theta_B - \frac{7}{24}ql^2 = 0$$

$$5i\theta_B - i\theta_C - ql^2 - \frac{3}{16}ql^2 = 0$$

解出 θ_B 、 θ_C 后，即可求得各杆弯矩。由于结点线位移不计入基本未知量，求解过程简便得多。

需要说明的是，上述刚架中按一端固定一端滑动杆处理的剪力静定杆，并不包括下述两种特殊情况。一种是一端刚结一端自由杆(如图5-7-3(a)中的杆CD)，这种杆应按静定杆处理。另一种是一端刚结一端铰支杆(如图中杆AB)，这种杆应按一端铰支一端滑动杆处理，如图(b)所示。由于杆端弯矩 $M_{AB}=i\theta_A - i\theta_B + m_{AB}^{\circ} = 0$ ，则 $i\theta_B = i\theta_A + m_{AB}^{\circ}$ ，所以有 $M_{BA} = i\theta_B - i\theta_A + m_{BA}^{\circ} = m_{AB}^{\circ} + m_{BA}^{\circ}$ 。可见这种杆的杆端弯矩与杆端转角无关，只与荷载有关。实际上由于忽略轴向变形，该杆的杆端弯矩与图(c)所示静定杆的杆端弯矩相同。

有的刚架有三类杆件：无侧移杆；有侧移但剪力静定杆；有侧移且剪力静不定杆。如图5-7-4所示，杆AC、BC无侧移，杆DE有侧移但剪力静定，杆CD、EF有侧移且剪力静不

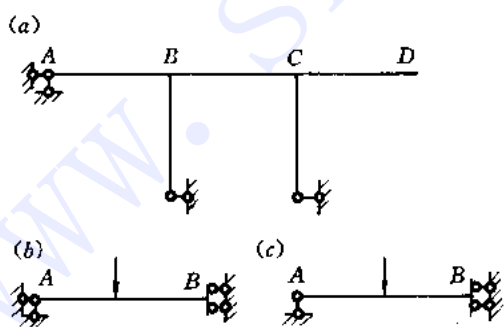


图 5-7-3

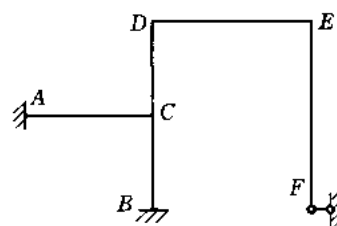


图 5-7-4

定。这时，E点水平线位移 $\Delta_{E,H}$ 要作为位移法基本未知量，而E点竖向线位移 $\Delta_{E,V}$ 可不作为基本未知量。

5-8 非结点处的截面位移可作为位移法的基本未知量吗？

可以。就位移法的原理来说，任何截面的位移均可作为未知量。虽然这会增加未知量数目，但可直接获得更多截面的内力，对绘制内力图方便些，尤其在采用电子计算机计算时，可减少机外的计算量(见 9-2)

如图 5-8-1(a)所示的结构，可以把截面 C 的转角 Z_1 、竖向位移 Z_2 和结点 D 的转角

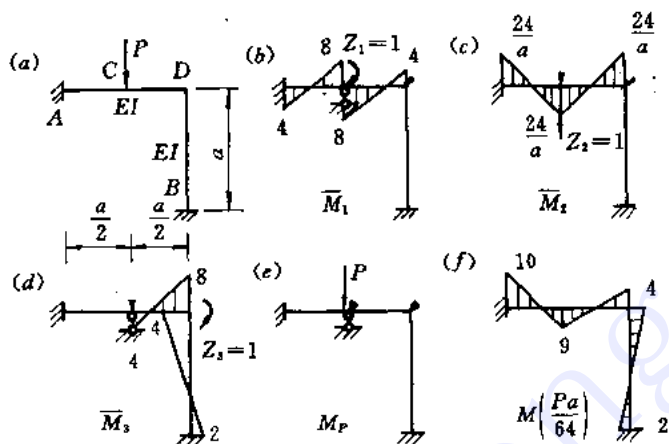


图 5-8-1

Z_3 作为基本未知量。其计算结果可直接得到所有控制截面的弯矩。计算如下。设 $\frac{EI}{a} = 1$,

由 M_1 图得	$r_{11} = 16,$	$r_{21} = 0,$	$r_{31} = 4$
由 M_2 图得	$r_{22} = \frac{192}{a^2},$	$r_{12} = 0,$	$r_{32} = \frac{24}{a}$
由 M_3 图得	$r_{33} = 12,$	$r_{13} = 4,$	$r_{23} = \frac{24}{a}$
由 M_P 图得	$R_{1P} = 0,$	$R_{2P} = -P,$	$R_{3P} = 0$

位移法典型方程为

$$\left. \begin{aligned} 16Z_1 + 0Z_2 + 4Z_3 &= 0 \\ 0 \cdot Z_1 + \frac{192}{a^2}Z_2 + \frac{24}{a}Z_3 &= P \\ 4Z_1 + \frac{24}{a}Z_2 + 12Z_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

联立解得

$$Z_1 = \frac{Pa}{256}, \quad Z_2 = \frac{11}{1536}Pa^2, \quad Z_3 = -\frac{Pa}{64}$$

由

$$M = Z_1\bar{M}_1 + Z_2\bar{M}_2 + Z_3\bar{M}_3 + M_P$$

直接得 M 图如图(f)所示。

5-9 位移法可否求解静定结构？

可以。因为在静定结构中总是存在具有角位移或线位移的结点，其位移就可作位移法基本未知量；对应于每个结点角位移或线位移可建立一个平衡方程；而对于任意单杆总可建立相应的刚度方程。下面通过例题加以讨论。

图 5-9-1(a) 示一静定梁，试用位移法求解。设以 B 端线位移 Z_1 为基本未知量。沿 Z_1 方向附加支杆得基本体系。 \bar{M}_1 图和 M_P 图分别如图 (b) 和 (c) 所示，有

$$r_{11} = \frac{3i}{l^2}, \quad R_{1P} = -\frac{11}{16}P$$

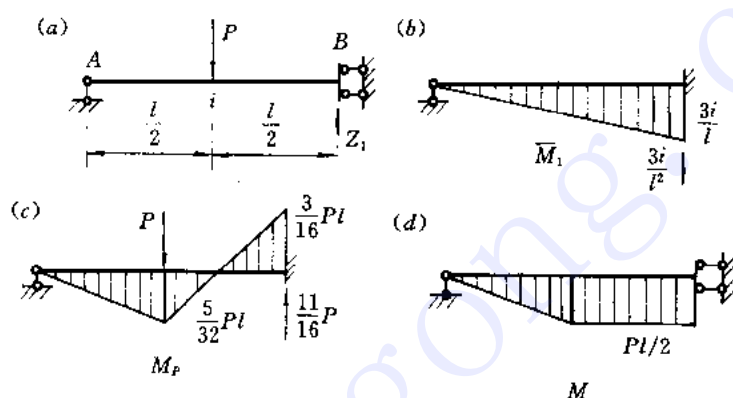


图 5-9-1

由基本方程

$$\frac{3i}{l^2}Z_1 - \frac{11}{16}P = 0$$

解得

$$Z_1 = \frac{11}{48i}Pl^2$$

由

$$M = Z_1\bar{M}_1 + M_P$$

得图 (d) 所示的 M 图。

本例也可将 A 端转角作为基本未知量求解，也可将 A 端转角、B 端线位移同时作基本未知量求解。读者可一试。

图 5-9-2(a) 示一静定刚架，试用位移法求解。取 θ_A 为基本未知量（横梁水平位移可不作基本未知量，见 5-7）

杆端弯矩为

$$M_{AD} = ql^2, \quad M_{AB} = 3i\theta_A - \frac{1}{8}ql^2, \quad M_{AC} = -2ql^2$$

由 $\sum M_A = 0$ ，得基本方程

$$3i\theta_A - \frac{9}{8}ql^2 = 0$$

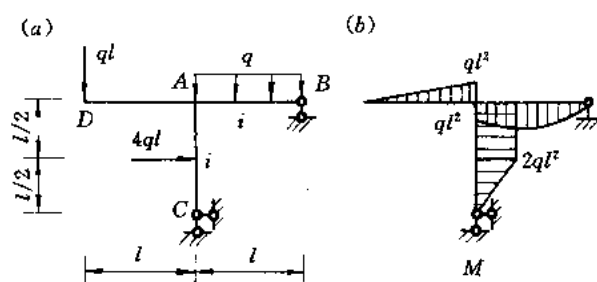


图 5-9-2

解得

$$\theta_A = \frac{3}{8i} ql^2$$

最后求出杆端弯矩，画出 M 图如图 (b) 所示。

当然，静定结构在手算中用位移法只会更冗繁，没有必要。只有在矩阵位移法中利用通用程序计算时，不分静定和超静定会带来方便。

5-10 位移法的两种计算方法的基本方程是否相同？它们的关系是什么？

位移法有两种计算方法，一种是利用基本体系建立典型方程，一种是直接列杆端力平衡条件建立位移法基本方程。

利用基本体系建立典型方程的方法（方法一），是先求出当各单位基本未知量 $Z_i = 1$ 单独作用（其余基本未知量与荷载均为零）时的各杆端力和荷载单独作用（基本未知量均为零）时的杆端力，再分别由结点或截面平衡条件求得的刚度系数 r_{ij} 及自由项 R_{iP} ，列出典型方程求解。杆端力直接平衡法（方法二），是先写出包含各有关基本未知量及荷载影响的杆端力表达式，再直接建立由这些杆端力参与的结点或截面的平衡条件，列出基本方程求解。对同一问题，两种方法的基本未知量相同，所列出的基本方程也完全相同。下面通过具体结构讨论两种方法的关系。

图 5-10-1(a) 所示刚架的基本未知量为结点 A 转角 Z_1 ，水平线位移 Z_2 。用方法一求解时，基本体系如图 (b) 所示，基本方程 $R_1 = 0$ 和 $R_2 = 0$ 的展开式为

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} &= 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$Z_1 = 1, Z_2 = 1$ 分别单独作用时，基本结构的弯矩图如图 (c)、(d) 所示。各杆端弯矩用符号 \bar{M}_i^{**} 表示，“* *”表示杆端名，如 \bar{M}_1 图中 AB 杆 A 端弯矩写为 \bar{M}_1^{AB} 。其相应的杆端剪力用 \bar{Q}_i^{**} 表示。荷载单独作用时，基本结构弯矩图如图 (e) 所示，各杆端固端弯矩和固端剪力分别用 m^{**} 和 Q_0^{**} 表示。

由图 (c) 中结点 A 及截面的平衡条件可得

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= \bar{M}_1^{AB} + \bar{M}_1^{AC} = \sum_A \bar{M}_1 \\ r_{21} &= \bar{Q}_1^{AB} + \bar{Q}_1^{CD} = \sum \bar{Q}_1 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

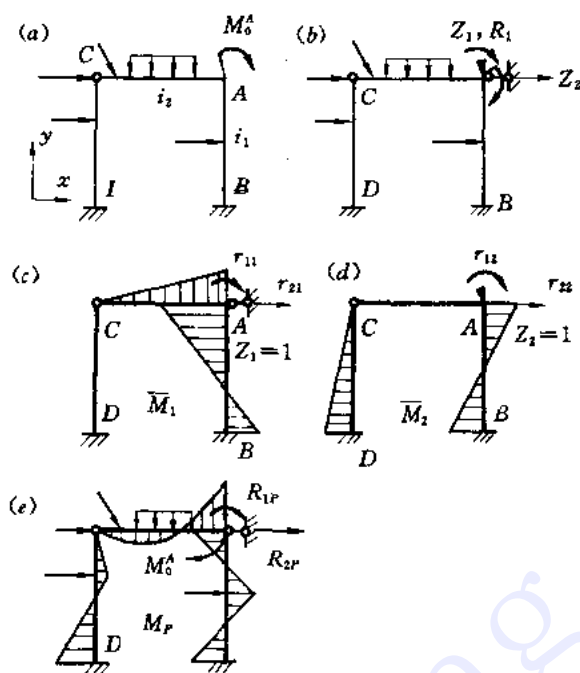


图 5-10-1

由图(d)中结点 A 及立柱截面平衡条件可得

$$\left. \begin{aligned} r_{1c} &= \bar{M}_2^{AB} + \bar{M}_2^{AC} = \sum_A \bar{M}_2 \\ r_{2c} &= \bar{Q}_2^{AB} + \bar{Q}_2^{CD} = \sum \bar{Q}_2 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

由图(e)中结点 A 及截面平衡条件可得

$$\left. \begin{aligned} R_{1P} &= m^{AB} + m^{AC} - M_0^A = \sum_A m - M_0^A \\ R_{2P} &= Q_P^{AB} + Q_P^{CD} - \sum P_x = \sum Q_P - \sum P_x \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

式中 M_0^A 为结点 A 上作用的外力偶, 顺时针为正; $\sum P_x$ 为截面上侧所有荷载在 x 方向投影的代数和。

用方法二求解时, 先列出含 Z_1, Z_2 及荷载影响的杆端弯矩和剪力表达式:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \bar{M}_1^{AB} Z_1 + \bar{M}_2^{AB} Z_2 + m^{AB} \\ M_{AC} &= \bar{M}_1^{AC} Z_1 + \bar{M}_2^{AC} Z_2 + m^{AC} \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{AB} &= \bar{Q}_1^{AB} Z_1 + \bar{Q}_2^{AB} Z_2 + Q_P^{AB} \\ Q_{CD} &= \bar{Q}_1^{CD} Z_1 + \bar{Q}_2^{CD} Z_2 + Q_P^{CD} \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

结点 A 的平衡条件为 $\sum M_A = 0$, 即

$$M_{AB} - M_{AC} - M_0^A = 0$$

将式(e)代入, 整理后得

$$(\bar{M}_1^{AB} + \bar{M}_1^{AC}) Z_1 + (\bar{M}_2^{AB} + \bar{M}_2^{AC}) Z_2 + (m^{AB} + m^{AC}) - M_0^A = 0$$

即
$$\left(\sum_A \bar{M}_1\right)Z_1 + \left(\sum_A \bar{M}_2\right)Z_2 + \sum_A m - M_0^A = 0$$

将式(b)、(c)、(d)的第一式代入上式,就得到式(a)的第一式。

通过柱顶端作截面,截面上部平衡条件为 $\sum X=0$,即

$$Q_{AB} + Q_{CD} - \sum P_x = 0$$

将式(f)代入后可得

$$\left(\sum \bar{Q}_1\right)Z_1 + \left(\sum \bar{Q}_2\right)Z_2 + \sum Q_P - \sum P_x = 0$$

将式(b)、(c)、(d)的第二式代入上式,就得到式(a)的第二式。

为了形象地说明两种方法的关系。以结点 A 的平衡条件为例列出表格式的计算关系图如下。

方法二的基本方程	$M_{AP} = \bar{M}_1^{AB}Z_1 - \bar{M}_2^{AB}Z_2 + m^{AB}$	+	+	-	+	
	$M_{AC} = \bar{M}_1^{AC}Z_1 + \bar{M}_2^{AC}Z_2 + m^{AC}$	+	+	+	+	
	$-M_0^A$				-	M_0^A
	$0 = r_{11}Z_1 + r_{21}Z_2 + R_{1P}$					
	方法一的基本方程					

由此看出,方法二是先按叠加原理列出含基本未知量的杆端力表达式(横式)再列平衡方程(竖式);方法一是先分别用平衡条件求出刚度系数和自由项(竖式)再按叠加原理列出基本方程(横式)。两种方法殊途同归。

5-11 在一般情形下如何用位移法计算在求结构自振频率时所用的结构刚度系数?

以两个自由度体系的自由振动为例,若用刚度法求自振频率,其频率方程为

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

其中 k_{11} 、 $k_{12} = k_{21}$ 、 k_{22} 为结构的刚度系数。这些系数可用位移法求得。例如图 5-11-1(a)所示体系,求 k_{11} 、 k_{21} 相当于求解图(b)所示的问题,即求当 $y_1=1$ 、 $y_2=0$ 时所需施加的主动力 k_{11} 和约束反力 k_{21} ; 求 k_{22} 、 k_{12} 相当于求解图(c)所示的问题,即求当 $y_2=1$ 、 $y_1=0$ 时所需施加的主动力 k_{22} 和约束反力 k_{12} 。

对于图(b),先用位移法求得 $y_1=1$ 、 $y_2=0$ 所产生的弯矩图 \bar{M}_1 , 并求得相应杆端剪力,再由平衡条件 $\sum Y=0$ 求得 k_{11} , 由 CD 杆 $\sum X=0$ 求得 k_{21} 。为此,设截面 B 转角 θ_B 和结点 C 转角 θ_C 为位移法基本未知量, 并设 $i = \frac{EI}{l}$ 。于是

$$M_{CA} = 3i\theta_C, \quad M_{CB} = 8i\theta_C + 4i\theta_B - \frac{24i}{l}$$

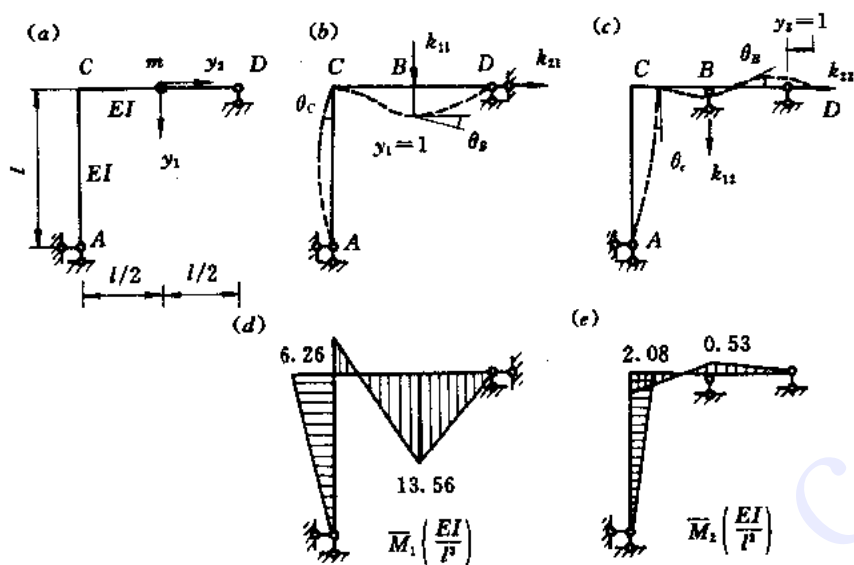


图 5-11-1

$$M_{BC} = 4i\theta_C + 8i\theta_B - \frac{24i}{l}, \quad M_{BD} = 6i\theta_B + \frac{12i}{l},$$

$$\left. \begin{aligned} \text{位移法方程 } \sum M_C = 0 & \quad 11\theta_C + 4\theta_B - \frac{24}{l} = 0 \\ \sum M_B = 0 & \quad 4\theta_C + 14\theta_B - \frac{12}{l} = 0 \end{aligned} \right\}$$

联立解得 $\theta_B = \frac{0.261}{l}, \quad \theta_C = \frac{2.087}{l}$

回代求得各杆端弯矩，作出的 \bar{M}_1 图如图(d)所示，由其求得

$$Q_{CA} = -6.26 \frac{EI}{l^3}, \quad Q_{BC} = 39.64 \frac{EI}{l^3}, \quad Q_{BD} = -27.12 \frac{EI}{l^3}$$

取 B 处微段，由 $\sum Y = 0$ ，有

$$k_{11} = Q_{BC} - Q_{BD} = 66.76 \frac{EI}{l^3}$$

取杆 CD，由 $\sum X = 0$ ，有

$$k_{21} = Q_{CA} = -6.26 \frac{EI}{l^3}$$

对于图(c)，仍设 θ_C, θ_B 为位移法基本未知量，于是

$$M_{CA} = 3i\theta_C - \frac{3i}{l}, \quad M_{CB} = 8i\theta_C + 4i\theta_B$$

$$M_{BC} = 4i\theta_C + 8i\theta_B, \quad M_{BD} = 6i\theta_B$$

$$\left. \begin{aligned} \text{由 } \sum M_C = 0 & \quad 11\theta_C + 4\theta_B - \frac{3}{l} = 0 \\ \sum M_B = 0 & \quad 4\theta_C - 14\theta_B = 0 \end{aligned} \right\}$$

联立解得 $\theta_B = -0.087 \frac{1}{l}, \theta_C = 0.304 \frac{1}{l}$

回代求得各杆端弯矩，作出 \bar{M}_2 图如图(e)，由其求得

$$Q_{CA} = 2.08 \frac{EI}{l^3}, \quad Q_{BC} = -5.20 \frac{EI}{l^3}, \quad Q_{BD} = 1.06 \frac{EI}{l^3}$$

则 $k_{22} = 2.08 \frac{EI}{l^3}, \quad k_{12} = -6.26 \frac{EI}{l^3}$

5-12 具有刚性杆件的结构用位移法求解时应注意些什么？

图 5-12-1(a)所示结构中 DE 为刚性杆，其余各杆截面惯性矩 I 的相对值写于杆侧。求解时，可取图(b)所示的计算简图计算。在这里，杆 DE 惯性矩 I 取无穷大值，不影响计算精度，杆 FG 的 I 取无穷大值是近似的，但误差不大。

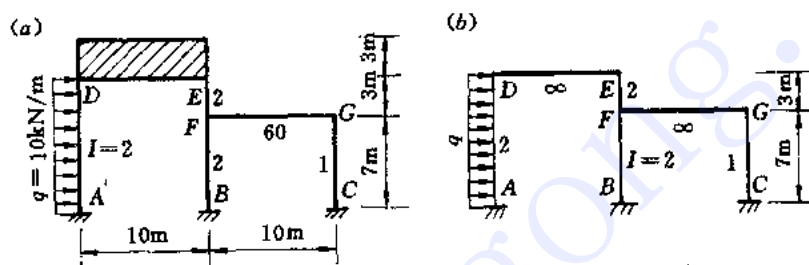


图 5-12-1

用位移法计算图(b)时，应注意两点：(1) 在计算过程中，可不计及其内力；(2) 计算结果要算出刚度近似取为无穷大杆件的内力。如图(b)中，必须根据结点力矩平衡条件求出 M_{FG} 、 M_{GF} ，画出杆 FG 的弯矩图，因为对其进行强度计算时要用到，但杆 DE 不要画出 M 图。下面用位移法作出图(b)的弯矩图。

取结点 E、G 水平位移 Z_1 、 Z_2 作位移法基本未知量，向右为正。作 M_P 、 \bar{M}_1 、 \bar{M}_2 图如图 5-12-2(a)、(b)、(c)所示(设 $E=100$)，求出

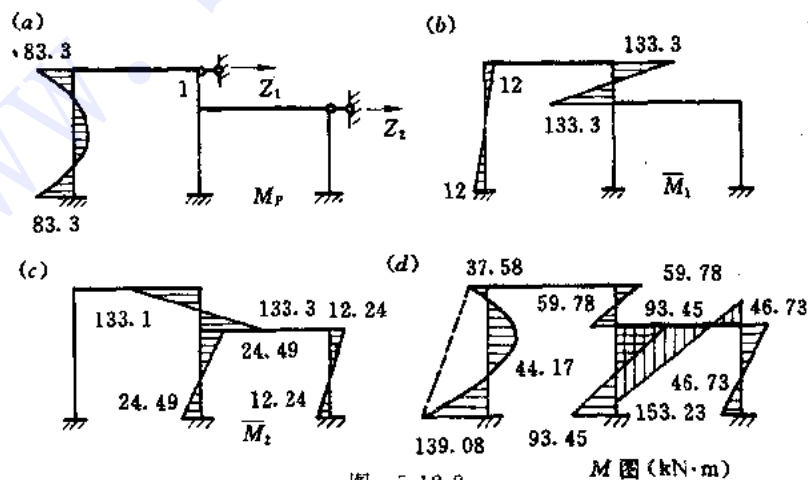


图 5-12-2

$$R_{1P} = -50, \quad R_{2P} = 0$$

$$r_{11} = 91.29, \quad r_{12} = r_{21} = -88.89, \quad r_{22} = 99.39$$

解位移法方程

$$91.29Z_1 - 88.89Z_2 - 50 = 0$$

$$-88.89Z_1 + 99.39Z_2 = 0$$

得

$$Z_1 = 4.24, \quad Z_2 = 3.79$$

柱弯矩由

$$M = M_P + Z_1 \bar{M}_1 + Z_2 \bar{M}_2$$

算得，如图(d)所示。横梁弯矩 M_{FC} 和 M_{GF} 由刚结点 F 和 G 的力矩平衡条件求得。

5-13 位移法与力法混合应用和联合应用有何区别？

位移法和力法混合应用的基本体系，是在结点位移多而多余约束少的结构局部撤去多余约束，在结点位移少而多余约束多的结构局部的结点附加约束，以减少基本未知量，它的基本未知量部分是多余约束力，部分是结点位移，即力和位移的分区混合，这种方法称为混合法。

位移法和力法联合应用的基本未知量是部分多余约束力或部分结点位移。若取部分多余约束力为基本未知量，它是力法。此时力法的基本结构为超静定结构，在求 δ_{ij} 和 Δ_{iP} 时所用 \bar{M}_i 和 M_P 图可利用位移法求得；若取部分结点位移为基本未知量，它是位移法，此时位移法的基本结构不是仅由单杆组成，而是由子结构(包括单杆)组成。在求 r_{ij} 和 R_{iP} 时所用 \bar{M}_i 和 M_P 图可用力法求得。

例 试由位移法和力法的混合应用和联合应用作图 5-13-1(a) 所示结构的 M 图。

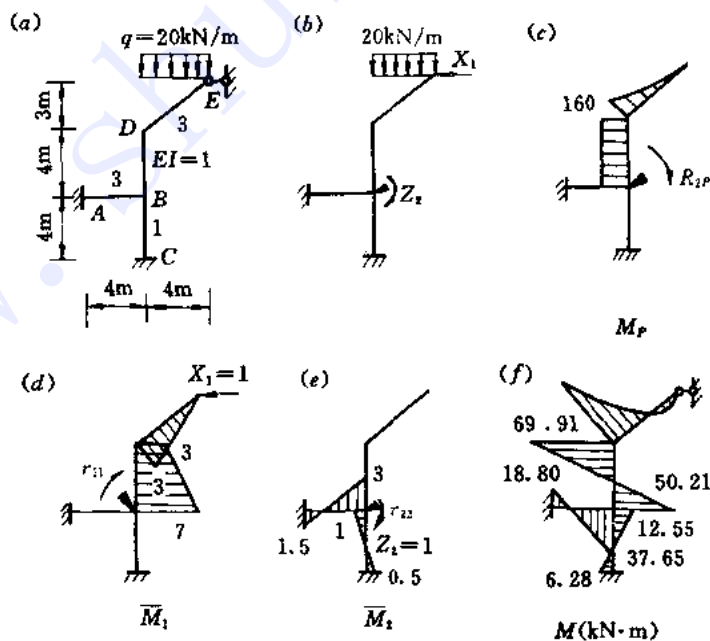


图 5-13-1

解 1. 混合法

此结构若用一般力法求解，有四个基本未知量，用一般位移法求解，有三个基本未知量。其特点是上部结点位移多，外部约束少，下部结点位移少，外部约束多。因此采用混合法时，可撤去 E 端支座约束和在 B 结点附加转动约束作为基本体系，基本未知量为 X_1 和 Z_2 ，如图(b)所示。基本方程为

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}Z_2 + \Delta_{1P} = 0$$

$$r_{21}X_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

作 $M_P, \bar{M}_1, \bar{M}_2$ 图如图(c)、(d)、(e)所示，则

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds = 110.3, \quad \Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} ds = -3400, \quad \delta_{12} = -7$$

$$r_{22} = 3 + 1 = 4, \quad R_{2P} = -160, \quad r_{21} = 7$$

代入基本方程，解得

$$X_1 = 30.02 \text{ kN}, \quad Z_2 = -12.55$$

由

$$M = M_P + X_1 \bar{M}_1 + Z_2 \bar{M}_2$$

作出 M 图如图(f)所示。

2. 方法与位移法联合应用

(1) 按力法求解

取上述 X_1 作力法基本未知量，基本体系如图 5-13-2(a)所示，基本方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

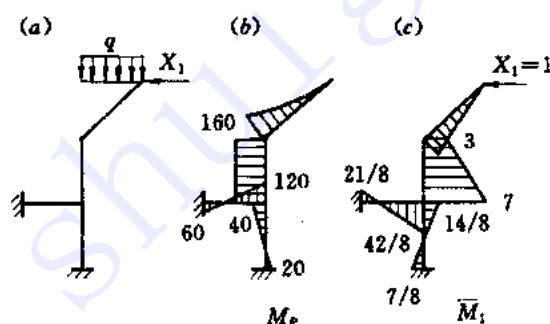


图 5-13-2

求 δ_{11} 和 Δ_{1P} 所用的 \bar{M}_1 和 M_P 图用位移法求解，其结果如图(b)和(c)所示，则

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds = 122.58,$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} ds = -3680$$

代入基本方程解得

$$X_1 = 30.02 \text{ kN}$$

由 $M = M_P + X_1 \bar{M}_1$ 作出 M 图如图 5-13-1(f)所示。

(2) 按位移法求解

取上述 Z_2 为位移法基本未知量，基本体系如图 5-13-3(a)所示。其中 BDE 部分为子结构，AB 和 BC 仍为单杆。基本方程为

$$r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0$$

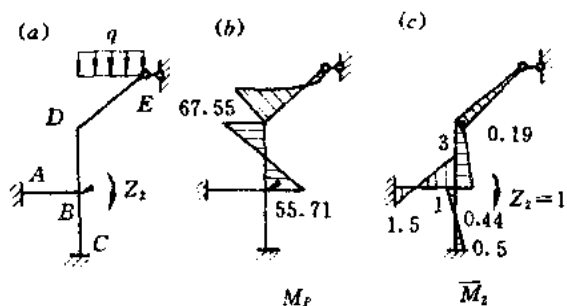


图 5-13-3

求 r_{22} 和 R_{2P} 所用的 \bar{M}_2 和 M_P 图，子结构可用力法求得。 \bar{M}_2 和 M_P 图如图(b)和(c)所示，则有

$$r_{22} = 4.44, \quad R_{2P} = 55.71$$

代入基本方程求得

$$Z_2 = -12.55$$

由 $M = M_P + Z_2 \bar{M}_2$ 作出 M 图如图 5-13-1(f)所示。

在对称结构计算中也可运用联合法以简化计算。如图 5-13-4(a)所示对称刚架，用力法或位移法求解时都有三个基本未知量。若将一般荷载分解为对称与反对称两组分量如图(b)、(c)所示。在对称荷载作用下用位移法计算半刚架，只有一个基本未知量；在反对称荷载作用下用力法计算半刚架，也只有一个基本未知量。分别计算后将两组内力叠加即得最后内力。

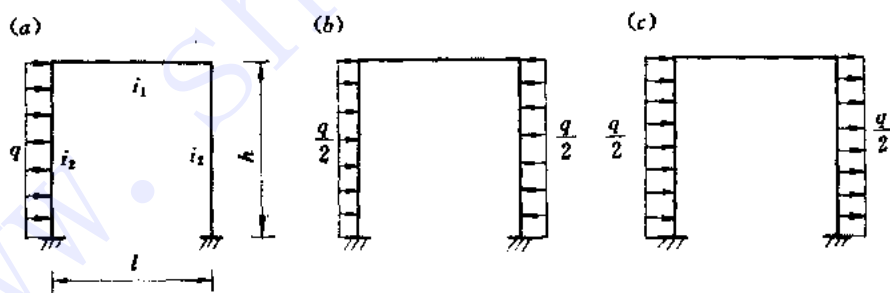


图 5-13-4

第六章 渐近法

6-1 力矩分配法和位移法有何异同?

力矩分配法与按基本体系求解的位移法都是先锁住刚结点角位移, 求得在外界因素影响下的固端弯矩 m , 然后放松、使结点转到真实角位移 Z_i , 求得其所产生的杆端弯矩 M^Z , 最后利用叠加原理, 求得各杆端弯矩 M , 即

$$M = m + M^Z$$

这是两者相同之处。两者不同之处在于如何求得 M^Z 。位移法是同时放松被锁住的刚结点, 同时转到真实角位移 Z_i , 求得 Z_i 产生的杆端弯矩 M^Z_i , 则

$$M^Z = \sum_{k=1}^n M^Z_k = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k Z_k \quad (a)$$

其中 \bar{M}_k 为 $Z_k=1$ (其它角位移 Z 为零) 时产生的杆端弯矩, n 为基本未知量数。 Z_i 通过解位移法基本方程

$$\sum_{k=1}^n r_{ik} Z_k + R_{iP} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

而得, 故位移法是解析解。力矩分配法每次只放松一个结点, 其它结点仍锁住或再锁住 (在已有一定角位移下再锁住), 使该结点产生一定角位移增量 $Z_k^{(j)}$ (j 为结点放松序号, $j=1, 2, 3, \dots, \infty$)。在力矩分配法计算格式中是以分配力矩和传递力矩出现。逐次轮换放松各结点后, 结点 k 所产生的角位移 Z_k^i 为

$$Z_k^i = \sum_{j=1}^{\infty} Z_k^{(j)}$$

而

$$\begin{aligned} M^Z &= \sum_{k=1}^n \bar{M}_k Z_k^i = \sum_{k=1}^n \bar{M}_k \left(\sum_{j=1}^{\infty} Z_k^{(j)} \right) \\ &= \bar{M}_1 (Z_1^{(1)} + Z_1^{(2)} + \dots) + \bar{M}_2 (Z_2^{(1)} + Z_2^{(2)} + \dots) \\ &\quad + \dots + \bar{M}_n (Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)} + \dots) \end{aligned} \quad (b)$$

上式就是力矩分配法求 M^Z 的数学表达式。式中右端项包含有分配力矩和传递力矩。对于结点 k , 设与其相邻的结点为 s , 则 $\bar{M}_{k,s} (Z_k^{(1)} + Z_k^{(2)} + \dots)$ 为杆 ks 的 k 端分配力矩的代数和, 而 $\bar{M}_{s,k} (Z_k^{(1)} + Z_k^{(2)} + \dots)$ 为杆 ks 的 k 端传递力矩的代数和。这里 $\bar{M}_{k,s}$ 和 $\bar{M}_{s,k}$ 分别为单位弯矩图 \bar{M}_k 和 \bar{M}_s 在杆 ks 的 k 端的力矩。

可以证明 (详见 6-2), 上述的 $Z_k^i = Z_k$, 即力矩分配法经过无限次轮换放松后所得到的结点角位移收敛于其真实角位移。这样, 比较式 (a) 和式 (b) 可以看出两者结果相同, 所不同的是位移法的 M^Z 是解析解, 而力矩分配法的 M^Z 是渐近解。

6-2 力矩分配法的计算过程收敛于真实解吗？

力矩分配法的计算过程收敛于真实解。

对于具有一个刚结点角位移的结构，如图 6-2-1(a) 所示，在外载作用下，结点 1 产生

角位移 Z_1 ，按位移法求解， $Z_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}}$ ， $r_{11} = s_{12} + s_{13}$ ， $R_{1P} = m_{12} + m_{13}$ ， s_{ij} 为转动刚度。则杆 12 的 1 端弯矩为 $M_{12} = m_{12} + s_{12}Z_1 = m_{12} - \frac{s_{12}}{s_{12} + s_{13}}R_{1P}$ 。

在力矩分配法中，图 (a) 为图 (b) 和图 (c) 叠加，即有

$$M_{12} = m_{12} - \mu_{12}R_{1P} = m_{12} - \frac{s_{12}}{s_{12} + s_{13}}R_{1P}$$

与位移法结果相同。同样，不难验证其它杆端

截面弯矩与位移法求得的也一样。所以对单结点问题，力矩分配法的解为真实解。

对于具有多结点角位移问题，由于力矩分配法每次只放松一个结点，其它结点仍锁住或再锁住，因此放松后，该结点还没有转动到其真实角位移。经过轮换放松，每放松一次，结点角位移有一新的增量。但这种增量越来越小，最终收敛于真实角位移。下面给予证明。

图 6-2-2(a)(b) 分别表示原状态及锁紧全部结点的状态。图 (c) 至图 (j) 为逐次轮换放松结点 1、2 的计算过程。当放松某一结点时，另一结点锁住。(1)、(2)、...、(j)、... 为放松结点的轮数， $Z_1^{(j)}$ 、 $Z_2^{(j)}$ 为第 (j) 轮计算时分别放松结点 1、2 所得结点角位移的增量， μ_{12} 和 μ_{21} 分别为杆 12 的 1 端和 2 端的力矩分配系数。为了简便，图中只写出杆 12 两端的固端弯矩、分配力矩和传递力矩。设先放松结点 1。第 (1) 轮放松结点 1 后，结点 2 的约束力矩为

$$R_2^{(1)} = R_{2P} - \frac{1}{2}\mu_{12}R_{1P} \quad (a)$$

式中 R_{1P} 和 R_{2P} 分别为原结构被全部锁住后在外载下附加刚臂 1 和 2 的约束力矩。下面各步在图中均用 $R_2^{(j)}$ 表示。计算过程可以无限进行下去，即 $j \rightarrow \infty$ 。

根据叠加原理，图 (a) 所示原结构的结点角位移，各杆弯矩及约束力矩（数值上为零）应分别等于图 (b) 中相应物理量与图 (c) 及其以下各状态相应的角位移增量，弯矩增量和约束力矩增量的代数和。总角位移为

$$\begin{aligned} Z_1' &= Z_1^{(1)} + Z_1^{(2)} + \dots + Z_1^{(j)} + \dots \\ Z_2' &= Z_2^{(1)} + Z_2^{(2)} + \dots + Z_2^{(j)} + \dots \end{aligned} \quad (b)$$

各截面弯矩为

$$M = M_P + \overline{M}_1(Z_1^{(1)} + Z_1^{(2)} + \dots + Z_1^{(j)} + \dots) + \overline{M}_2(Z_2^{(1)} + Z_2^{(2)} + \dots + Z_2^{(j)} + \dots) \quad (c)$$

由图 (i)、(j) 中角位移与附加刚臂约束力矩的关系可知

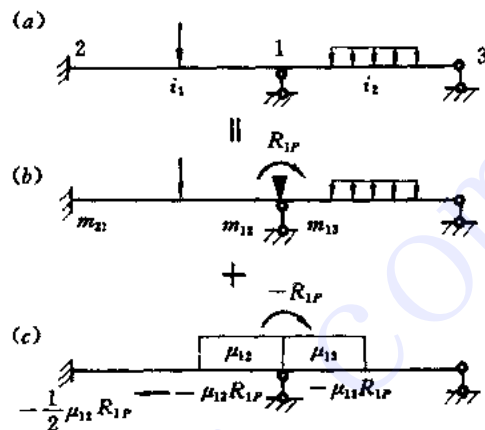


图 6-2-1

(a)	原结构		M
(b)	锁紧结点		M_P
(c)	第(1)轮	放松结点1	$\bar{M}_1 Z_1^{(1)}$
	分配	放松结点2	$\bar{M}_2 Z_2^{(1)}$
(d)	第(2)轮	放松结点1	$\bar{M}_1 Z_1^{(2)}$
	分配	放松结点2	$\bar{M}_2 Z_2^{(2)}$
(e)	第(3)轮	放松结点1	$\bar{M}_1 Z_1^{(3)}$
	分配	放松结点2	$\bar{M}_2 Z_2^{(3)}$
(f)	第(j)轮	放松结点1	$\bar{M}_1 Z_1^{(j)}$
	分配	放松结点2	$\bar{M}_2 Z_2^{(j)}$

图 6-2-2

$$\left. \begin{aligned} Z_1^{(j)} &= \frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{12}^{j-2} \mu_{21}^{j-1} \left(R_{2P} - \frac{1}{2} \mu_{12} R_{1P} \right) \\ Z_2^{(j)} &= -\frac{1}{2^{2j-2}} \mu_{12}^{j-1} \mu_{21}^{j-1} \frac{1}{r_{22}} \left(R_{2P} - \frac{1}{2} \mu_{12} R_{1P} \right) \end{aligned} \right\} (d)$$

(j = 2, 3, \dots, \infty)

这里角位移增量是递减的等比数列，其公比

$$r = \frac{Z_1^{(j+1)}}{Z_1^{(j)}} = \frac{Z_2^{(j+1)}}{Z_2^{(j)}} = \frac{\frac{1}{2^{2j-1}} \mu_{12}^{j-1} \mu_{21}^j}{\frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{12}^{j-2} \mu_{21}^{j-1}} = \frac{1}{4} \mu_{12} \mu_{21} < \frac{1}{4}$$

因此，级数

$$\sum_{j=2}^{\infty} Z_1^{(j)} \text{ 和 } \sum_{j=2}^{\infty} Z_2^{(j)}$$

是无限递减等比级数，是收敛级数，即有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Z_1^{(j)} = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} Z_2^{(j)} = 0$$

这证明力矩分配法的计算过程是收敛的。

另外，附加约束 1、2 中的总约束力矩分别为

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R_{1P} + r_{11}[Z_1^{(1)} + Z_1^{(2)} + \dots + Z_1^{(j)} + \dots] + r_{12}[Z_2^{(1)} + Z_2^{(2)} + \dots + Z_2^{(j)} + \dots] \\ &= R_{1P} + r_{11}Z_1' + r_{12}Z_2' \\ R_2 &= R_{2P} + r_{21}[Z_1^{(1)} + Z_1^{(2)} + \dots + Z_1^{(j)} + \dots] + r_{22}[Z_2^{(1)} + Z_2^{(2)} + \dots + Z_2^{(j)} + \dots] \\ &= R_{2P} + r_{21}Z_1' + r_{22}Z_2' \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

由力矩分配过程可知(见图 6-2-2)：

$$r_{11}Z_1^{(1)} = -R_{1P}, \quad r_{11}Z_1^{(2)} = -r_{12}Z_2^{(1)}, \dots, \quad r_{11}Z_1^{(j)} = -r_{12}Z_2^{(j-1)} \quad (j=2,3,\dots);$$

$$\text{及 } r_{22}Z_2^{(1)} = -r_{21}Z_1^{(1)} - R_{2P}, \quad r_{22}Z_2^{(2)} = -r_{21}Z_1^{(2)}, \dots, \quad r_{22}Z_2^{(j)} = -r_{21}Z_1^{(j)} \quad (j=2,3,\dots)$$

将其代入式(e)，得第(j)轮后的约束力矩

$$R_1 = r_{12}Z_2^{(j)}, \quad R_2 = 0$$

当 $j \rightarrow \infty$, $R_1 = 0$ 。于是，式(e)与位移法基本方程

$$R_{1P} + r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0$$

$$R_{2P} + r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0$$

比较可得

$$Z_1' = Z_1, \quad Z_2' = Z_2$$

即力矩分配法各轮放松所产生的结点角位移总和等于原状态真实角位移。至此，证明图 6-2-2 的计算过程是收敛的，各杆弯矩收敛于真实解。

上述是先放松结点 1 所得的结论。若先放松结点 2，只须将各式中有关下标“1”与“2”对调即可得到同样的结论。

下面顺便分析图 6-2-2 中相邻两轮计算的杆端弯矩增量，从图中看出，在 $j-1$ 轮计算完后，杆 12 的 1 端得到传递力矩为(它成为附加刚臂 1 的约束力矩 $R_1^{(j-1)}$)；

$$-\frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{12}^{j-2} \mu_{21}^{j-1} \left(R_{2P} - \frac{1}{2} \mu_{12} R_{1P} \right) = R_1^{(j-1)}$$

而经过第 j 轮放松后，该杆端得到分配力矩为

$$-\mu_{12} R_1^{(j-1)}$$

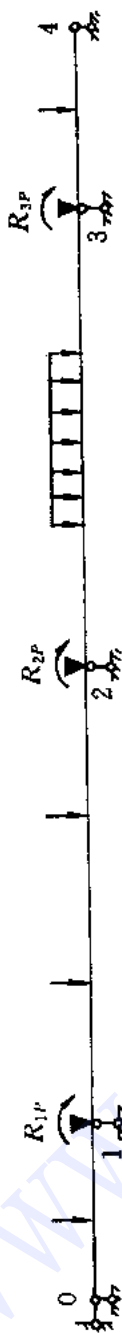
因此，第 j 轮放松后，该杆端得到弯矩增量 $(\Delta M_{12})_j$ ；

$$(\Delta M_{12})_j = \frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{12}^{j-2} \mu_{21}^{j-1} \left(R_{2P} - \frac{1}{2} \mu_{12} R_{1P} \right) (\mu_{12} - 1)$$

同理，有

$$(\Delta M_{21})_j = \frac{1}{2^{2j-2}} \mu_{12}^{j-1} \mu_{21}^{j-1} \left(R_{2P} - \frac{1}{2} \mu_{12} R_{1P} \right) (1 - \mu_{21})$$

(f)



固端弯矩	m_{10}	m_{12}	m_{21}	m_{23}	m_{32}	m_{34}
放松 1, 3	$-\mu_{10}R_{1P}$	$-\mu_{12}R_{1P}$	$-\frac{1}{2}\mu_{12}R_{1P}$	$-\frac{1}{2}\mu_{32}R_{3P}$	$-\mu_{32}R_{3P}$	$-\mu_{34}R_{3P}$
放松 2		$-\frac{1}{2}\mu_{21}R$	$-\mu_{21}\left[R_{2P}-\frac{1}{2}(\mu_{12}R_{1P}+\mu_{32}R_{3P})\right]=-\mu_{21}R$	$-\frac{1}{2}\mu_{23}\left[R_{2P}-\frac{1}{2}(\mu_{12}R_{1P}+\mu_{32}R_{3P})\right]=-\frac{1}{2}\mu_{23}R$		
放松 1, 3	$\frac{1}{2}\mu_{10}\mu_{21}R$	$\frac{1}{2}\mu_{12}\mu_{21}R$	$\frac{1}{23}\mu_{12}\mu_{21}R$	$\frac{1}{23}\mu_{32}\mu_{23}R$	$\frac{1}{2}\mu_{32}\mu_{23}R$	$\frac{1}{2}\mu_{34}\mu_{23}R$
放松 2		$-\frac{1}{23}\mu_{21}\mu_{30}R$	$-\frac{1}{23}\mu_{21}(\mu_{12}\mu_{21}+\mu_{32}\mu_{23})R$ $=-\frac{1}{23}\mu_{21}\mu_{30}R$	$-\frac{1}{23}\mu_{23}(\mu_{12}\mu_{21}+\mu_{32}\mu_{23})R$ $=-\frac{1}{23}\mu_{23}\mu_{30}R$		
放松 1, 3	$\frac{1}{23}\mu_{10}\mu_{21}\mu_{30}R$	$\frac{1}{23}\mu_{12}\mu_{21}\mu_{30}R$	$\frac{1}{24}\mu_{12}\mu_{21}\mu_{30}R$	$\frac{1}{24}\mu_{32}\mu_{23}\mu_{30}R$	$\frac{1}{23}\mu_{32}\mu_{23}\mu_{30}R$	$\frac{1}{23}\mu_{34}\mu_{23}\mu_{30}R$
放松 2		$-\frac{1}{25}\mu_{21}\mu_{30}R$	$-\frac{1}{24}\mu_{21}\mu_{30}R$	$-\frac{1}{24}\mu_{23}\mu_{30}R$	$-\frac{1}{25}\mu_{23}\mu_{30}R$	
放松 1, 3	$\frac{1}{25}\mu_{10}\mu_{21}\mu_{30}R$	$\frac{1}{25}\mu_{12}\mu_{21}\mu_{30}R$	$\frac{1}{20}\mu_{12}\mu_{21}\mu_{30}R$	$\frac{1}{25}\mu_{32}\mu_{23}\mu_{30}R$	$\frac{1}{25}\mu_{32}\mu_{23}\mu_{30}R$	$\frac{1}{25}\mu_{34}\mu_{23}\mu_{30}R$
放松 2		$-\frac{1}{27}\mu_{21}\mu_{30}R$	$-\frac{1}{26}\mu_{21}\mu_{30}R$	$-\frac{1}{26}\mu_{23}\mu_{30}R$	$-\frac{1}{27}\mu_{23}\mu_{30}R$	

第 $j-1$ 轮	放松 1, 3	$\frac{1}{2^{2j-5}} \mu_{10} \mu_{21} \mu_6^{-3} R$	$\frac{1}{2^{2j-5}} \mu_{12} \mu_{21} \mu_6^{-3} R$	$\frac{1}{2^{2j-4}} \mu_{11} \mu_{21} \mu_6^{-3} R$	$\frac{1}{2^{2j-4}} \mu_{22} \mu_{23} \mu_6^{-3} R$	$\frac{1}{2^{2j-5}} \mu_{31} \mu_{23} \mu_6^{-3} R$
	放松 2		$-\frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{21} \mu_6^{-2} R$	$-\frac{1}{2^{2j-4}} \mu_{21} \mu_6^{-2} R$	$-\frac{1}{2^{2j-4}} \mu_{23} \mu_6^{-2} R$	
第 j 轮	放松 1, 3	$\frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{10} \mu_{21} \mu_6^{-2} R$	$\frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{12} \mu_{21} \mu_6^{-2} R$	$\frac{1}{2^{2j-2}} \mu_{12} \mu_{21} \mu_6^{-1} R$	$\frac{1}{2^{2j-2}} \mu_{22} \mu_{23} \mu_6^{-2} R$	$\frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{31} \mu_{23} \mu_6^{-2} R$
	放松 2		$-\frac{1}{2^{2j-1}} \mu_{21} \mu_6^{-1} R$	$-\frac{1}{2^{2j-2}} \mu_{21} \mu_6^{-1} R$	$-\frac{1}{2^{2j-1}} \mu_{23} \mu_6^{-1} R$	
上式中 ${}_2R = R_{2F} - \frac{1}{2} (\mu_{12} R_{1F} + \mu_{32} R_{3F})$, $\mu_6 = \mu_{12} \mu_{21} + \mu_{32} \mu_{23}$						

图 6-2-3

$$(j=2, 3, \dots, \infty)$$

显然这些增量也是无限递减等比数列, 其公比亦为

$$r = \frac{1}{4} \mu_{12} \mu_{21} < \frac{1}{4}$$

当 $j \rightarrow \infty$ 时 $(\Delta M_{12})_j \rightarrow 0, (\Delta M_{21})_j \rightarrow 0$

以上讨论也适用于具有两个刚结点角位移的无侧移刚架。

现在讨论具有三个刚结点角位移情况。如图 6-2-3 所示, 在锁紧全部结点后, 若先放松结点 1, 3, 再放松结点 2, 计算完第 j 轮时, 相邻两轮杆端弯矩的增量可导出如下:

$$\left. \begin{aligned} (\Delta M_{12})_j &= \frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{21} (\mu_{12} - 1) (\mu_{12} \mu_{21} + \mu_{32} \mu_{23})^{j-2} \cdot R \\ (\Delta M_{21})_j &= \frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{21} (\mu_{12} - 1) (\mu_{12} \mu_{21} + \mu_{32} \mu_{23})^{j-1} \cdot R \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

$$(j = 2, 3, \dots, \infty)$$

其中
$$R = R_{2P} - \frac{1}{2} (\mu_{12} R_{1P} + \mu_{32} R_{3P}) \quad (h)$$

将式中下标“1”换成“3”, 即可得到 $(\Delta M_{23})_j$ 和 $(\Delta M_{32})_j$ 的公式。容易证明:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\Delta M_{rs})_j = \lim_{j \rightarrow \infty} (\Delta M_{sr})_j = 0 \quad (r = 1, 3; s = 2)$$

计算过程收敛。

设无侧移刚架有任意个刚结点, 每个结点可连结二至四根杆件, 则任一杆端弯矩的增量可写为下式:

$$(\Delta M_{rs})_j = \frac{1}{2^{2j-3}} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^{j-2} \cdot b \cdot R \quad (i)$$

式中 a_1, a_2, a_3 和 a_4 为有关各结点力矩分配系数的连乘积, 均小于 1; b 为与某些分配系数有关的常数, R 为与各结点约束力矩有关的常数。设

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$$

则必有 $a < 1$ 。式 (i) 可改写成

$$(\Delta M_{rs})_j = \frac{1}{2} a^{j-2} \cdot b \cdot R \quad (j)$$

则有 $\lim_{j \rightarrow \infty} (\Delta M_{rs})_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2} a^{j-2} \cdot b R = 0$, 计算过程收敛。

6-3 怎样估算力矩分配法的计算误差?

力矩分配法通过无限次力矩的分配传递可以得到精确解答。实用上通常只需作 2~4 轮计算, 就可得到符合工程精度要求的结果。

这里先就具有两个刚结点角位移的连续梁和无侧移刚架, 结合图 6-2-2 所示情况进行讨论。从图 6-2-2 的 (h) 和 (i) 可以看出, 在第 $j-1$ 轮计算完后, 杆 12 的 1 端得到传递力矩为

$$-\frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{12}^{j-2} \mu_{21}^{j-1} \left(R_{2P} - \frac{1}{2} \mu_{12} R_{1P} \right)$$

而经过第 j 轮放松，此杆端得到分配力矩为

$$\mu_{12} \left[\frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{12}^{j-2} \mu_{21}^{j-1} \left(R_{2P} - \frac{1}{2} \mu_{12} R_{1P} \right) \right]$$

因此，第 j 轮计算比第 $j-1$ 轮计算此杆端得到弯矩增量 $(\Delta M_{12})_j$ 为

$$(\Delta M_{12})_j = \frac{1}{2^{2j-3}} \mu_{12}^{j-2} \mu_{21}^{j-1} (\mu_{12} - 1) \left(R_{2P} - \frac{1}{2} \mu_{12} R_{1P} \right) \quad (j = 2, 3, \dots, \infty) \quad (a)$$

从图 6-2 的 (b) 及其以下可知，杆 12 的 1 端弯矩的精确值 M_{12} 为

$$M_{12} = m_{12} - \mu_{12} R_{1P} + \sum_{j=2}^{\infty} (\Delta M_{12})_j$$

式中和式项为无限递减等比级数，公比 $r = \frac{1}{4} \mu_{12} \mu_{21}$ ，首项 $a = (\Delta M_{12})_{j=2}$ ，级数和 $S_2 = \frac{a}{1-r}$ ，则

$$M_{12} = m_{12} - \mu_{12} R_{1P} + \frac{\frac{1}{2} \mu_{21} (\mu_{12} - 1) \left(R_{2P} - \frac{1}{2} \mu_{12} R_{1P} \right)}{1 - \frac{1}{4} \mu_{12} \mu_{21}} \quad (b)$$

若计算至 $j=i$ 轮终止（最后放松的结点只分配不传递）， M_{12} 的值为

$$(M_{12})_i = m_{12} - \mu_{12} R_{1P} + \sum_{j=2}^i (\Delta M_{12})_j \quad (c)$$

其绝对误差为

$$(\delta M_{12})_i = M_{12} - (M_{12})_i = \sum_{j=i+1}^{\infty} (\Delta M_{12})_j$$

它是无限递减等比级数的和，此级数公比 $r = \frac{1}{4} \mu_{12} \mu_{21} < 1$ ，首项 $a = (\Delta M_{12})_{j=i+1} = \frac{1}{2^{2i-1}} \cdot \mu_{12}^{i-1} \mu_{21}^i (\mu_{12} - 1) \left(R_{2P} - \frac{1}{2} \mu_{12} R_{1P} \right)$ ，其和为

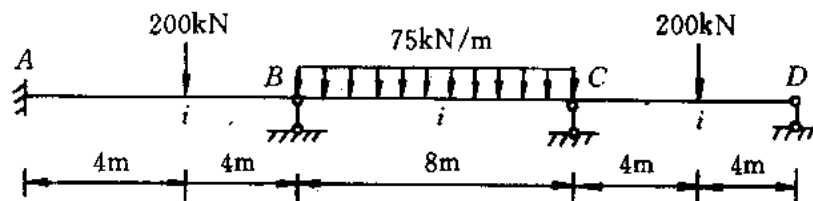
$$(\delta M_{12})_i = \frac{a}{1-r} \quad (d)$$

采用力矩分配法通常不求杆端截面弯矩精确值，只是得到第 i 轮计算完后的值。求相对误差可与此值比较，即杆 12 的 1 端截面弯矩的相对误差 $(\epsilon_{12})_i$ 为

$$(\epsilon_{12})_i = \left| \frac{(\delta M_{12})_i}{(M_{12})_i} \right| \quad (e)$$

下面举两个实例。

例 1 图 6-3-1 示一连续梁，力矩分配计算过程示于图下方的表。图中列出两轮计算和三轮计算的结果，其中



杆端名称	AB	BA	BC	CB	CD	DC
分配系数		0.5	0.5	0.4	0.6	
固端弯矩	-200	200	-400	400	-300	
B 第一轮分配、传递	50 ←	100	100 →	50		
C 第一轮分配、传递			-30 ←	-60	-90	
B 第二轮分配、传递	7.5 ←	15	15 →	7.5		
C 第二轮分配				-3.0	-4.5	
计算两轮后的杆端弯矩	<u>(-142.5)</u>	<u>(315)</u>	<u>(-315)</u>	<u>(394.5)</u>	<u>(-394.5)</u>	
C 第二轮传递			-1.5			
B 第三轮分配、传递	0.38 ←	0.75	0.75 →	0.38		
C 第三轮分配				-0.15	-0.23	
计算三轮后的杆端弯矩	<u>-142.13</u>	<u>315.75</u>	<u>-315.75</u>	<u>394.73</u>	<u>-394.73</u>	

图 6-3-1

$R_{1P} = -200\text{kN} \cdot \text{m}$, $R_{2P} = 100\text{kN} \cdot \text{m}$, $\mu_{12} = 0.5$, $\mu_{21} = 0.4$, $(M_{12})_2 = -315\text{kN} \cdot \text{m}$, $(M_{12})_3 = -315.75\text{kN} \cdot \text{m}$, $m_{12} = -400$, 由式(b)算得 M_{12} 精确值为

$$M_{12} = -400 - 0.5 \times (-200) + \frac{0.5 \times 0.4 \times (0.5 - 1)(100 + 0.5^2 \times 200)}{1 - 0.25 \times 0.5 \times 0.4} = -315.789$$

若不计算 M_{12} 值, 可由式(d)和(e)算得第($j=2$)轮结束后杆 12 的 1 端截面弯矩 $(M_{12})_{i=2}$ 的绝对误差为

$$(\delta M_{12})_2 = \frac{1}{2^{j-1}} \times 0.5 \times 0.4^2 \times (0.5 - 1)(100 + 0.5^2 \times 200) / (1 - 0.25 \times 0.5 \times 0.4) = -0.789\text{kN} \cdot \text{m}$$

相对误差 $(\epsilon_{12})_2 = \frac{(\delta M_{12})_2}{(M_{12})_2} = \left| \frac{-0.789}{-315} \right| = 0.25\%$

而第 3 轮结束后,

$$(\delta M_{12})_3 = -0.039$$

$$(\epsilon_{12})_3 = 0.012\%$$

可见经第 2~3 轮计算所得结果误差已相当小。

根据同样推演可算得其它杆端截面弯矩的计算误差。上述讨论也适合于具有两个刚结点角位移的无侧移刚架。

例 2 图 6-3-2 示一无侧移刚架, 用力矩分配法计算, 先放松结点 1, 试求两轮计算后的 $(M_{12})_2$, $(\delta M_{12})_2$, $(\epsilon_{12})_2$ 。 $EI = \text{常数}$ 。

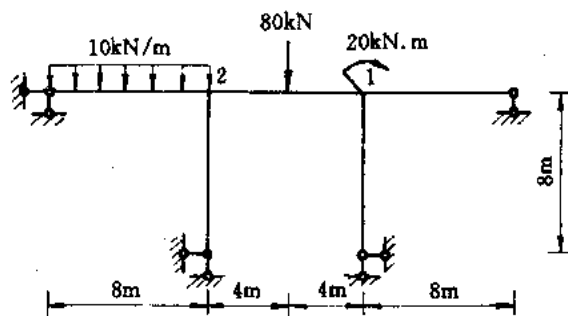


图 6-3-2

解 按题意有 $m_{12} = 80 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $R_{1P} = 80 - 20 = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $R_{2P} = 0$, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0.4$, 则

$$\left(R_{2P} - \frac{1}{2} \mu_{12} R_{1P} \right) = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}。 \text{由式(c),}$$

$$(M_{12})_2 = 80 - 0.4 \times 60 + \frac{1}{2} \times 0.4 \times (0.4 - 1)(-20) = 58.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

由式(d) $(\delta M_{12})_2 = \frac{1}{8} \times 0.4^3 \times (0.4 - 1)(-20) / \left(1 - \frac{1}{4} \times 0.4^2 \right) = 0.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$

由式(e) $(\epsilon_{12})_2 = \frac{0.1}{58.4} = 0.17\%$

显然 $M_{12} = (M_{12})_2 + (\delta M_{12})_2 = 58.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ [也可由式(b)算得]。

顺便指出,在用无剪力分配法计算特殊的有侧移刚架时,零剪力杆 ik 两端弯矩传递系数为 -1 ,因而两轮计算之间杆 ik 的杆端弯矩增量递减率为

$$r = \mu_{ik} \mu_{ki}$$

说明其两轮之间杆端弯矩增量比无侧移刚架要大。因此要得到较小误差的计算结果,无剪力分配法一般宜作三至四轮计算。

在渐近法中,先放松的结点与后放松的结点相比,其计算精度往往要差一些。为此,可将先放松的结点多分配一次,力矩分配法可进行两轮半计算,无剪力分配法作三轮半计算。

6-4 在力矩分配法中结点力偶荷载和约束力矩的正负号怎样规定?

用力矩分配法计算超静定结构时,结点力偶荷载和约束力矩均规定以顺时针方向为正。只有这样,才能与结点角位移和杆端弯矩的正负号规定(均以顺时针为正)相协调。

设结构中任一结点 A 由杆 AB 、 AC 、 \dots 刚结而成,结点上力偶荷载 M_0 及各杆端弯矩如图 6-4-1(a)所示(各杆上没有其他横向荷载)。因杆端弯矩为顺时针方向,由结点平衡条件即得

$$M_0 = \sum_A M_{Aj} = \sum_A \mu_{Aj} M_0 \quad (a)$$

及 $M_0 = \sum_A S_{Aj} \theta_A \quad (b)$

j 代表各杆的远端。式(a)表明,如规定结点力偶荷载顺时针为正,与杆端弯矩一致,则力

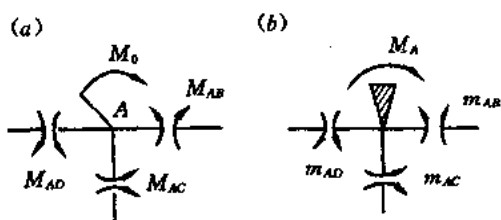


图 6-4-1

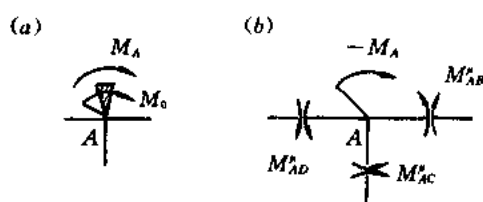


图 6-4-2

矩分配系数 μ 就是正数，同时，因转动刚度 S_{Aj} 恒为正值，式(b)表明结点力偶与结点角位移 θ_A (等于各杆端截面角位移) 方向相同，即均为顺时针方向。

若在刚结点 A 附加转动约束，此时由各杆横向荷载引起的固端弯矩为 m_{Aj} ，以顺时针为正，如图(b)所示。设约束力矩 M_A 也以顺时针为正，则由结点平衡条件得

$$M_A = \sum_A m_{Aj} \quad (c)$$

而式右边不须加负号。

当仅在结点上作用有力偶荷载且在结点上附加转动约束时(如图 6-4-2a 所示)，约束力矩为

$$M_A = -M_0 \quad (d)$$

当放松结点时，应在结点施加力偶 $(-M_A)$ ，如图(b)所示，由此得各杆分配力矩为

$$M'_{Aj} = \mu_{Aj} (-M_A) = \mu_{Aj} M_0 \quad (e)$$

式中 M'_{Aj} 与图 6-4-1(a) 中 M_{Aj} 相同。

根据上述符号规定可得两点结论：

1. 当结点上作用有力偶荷载时，可以直接将力偶按力矩分配系数分配给各杆端，分配时不变号。

2. 锁住后加跨间荷载，附加约束上产生约束力矩，它直接等于该结点各杆端固端力矩的代数和。当放松结点时，将此约束力矩变号后按分配系数分配各杆端。

如果规定力偶荷载和约束力矩以逆时针方向为正也无不可。那时，式(a)、(b)、(c)和(e)的等式右边均应加负号；上述两点结论中，前者成为变号分配，后者成为不变号分配(此时约束力矩等于各杆端固端弯矩代数和的反号)。

以上讨论，对于无剪力分配法同样适用。

6-5 用力矩分配法计算时如何处理结点力偶荷载？

当连续梁或无侧移刚架上同时有结点力偶荷载和跨间荷载作用时，在力矩分配法计算中可采取下列四种不同的处理方法：

1. 锁住结点时，将结点力偶荷载产生的约束力矩计入该结点的总约束力矩中进行变号力矩分配；

2. 锁住结点时，只将跨间荷载产生的固端弯矩计入结点约束力矩，但结点力偶不计入约束力矩而单独在该结点进行不变号力矩分配，再与约束力矩变号分配后所得分配力

矩叠加后同时向远端传递；

3. 在有外力偶荷载的结点上虚拟一远端自由的杆(杆长随意)，将结点力偶移至其自由端，参与力矩分配过程。虚拟杆的转动刚度和分配系数均等于零；

4. 将结点力偶荷载计入交于该结点的某一杆的杆端(即看作此杆上跨间荷载，只不过作用点在杆端)，求出相应的固端弯矩，并与其它跨间荷载产生的固端弯矩叠加后进行计算。

设杆 AB 的 A 端固定，力偶 M_0 作用于杆件 A 端，则无论 B 端的支承性质如何(图 6-5-1(a), (b), (c))，固端力矩均为

$$m_{AB} = -M_0$$

$$m_{BA} = 0$$

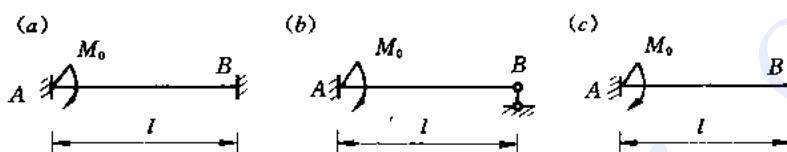


图 6-5-1

下面通过实例说明上述四种处理方法。

图 6-5-2(a) 示一连续梁，试用力矩分配法作弯矩图。

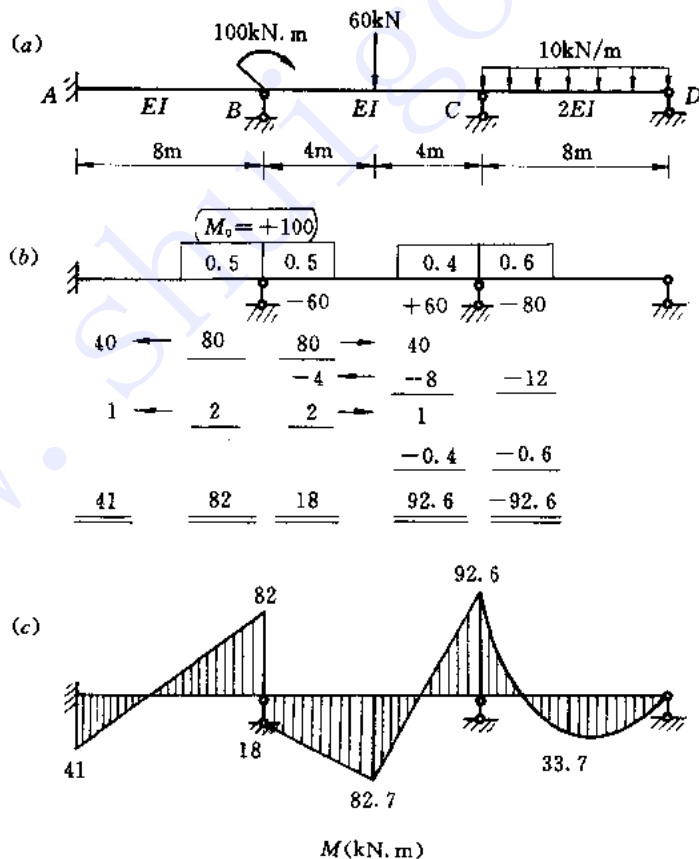


图 6-5-2

解法一：

由各杆的转动刚度算得力矩分配系数为

$$\mu_{BA} = \mu_{BC} = 0.5, \quad \mu_{CB} = 0.4 \quad \mu_{CD} = 0.6$$

跨间荷载产生的固端弯矩

$$m_{BC} = -m_{CB} = -60\text{kN}\cdot\text{m}, \quad m_{CD} = -80\text{kN}\cdot\text{m}$$

先放松结点 B，将 $M_0 = 100\text{kN}\cdot\text{m}$ 反号为约束力矩，故结点 B 的总约束力矩 $M_B = -100 - 60 = -160\text{kN}\cdot\text{m}$ ，计算过程见图 6-5-2(b)，弯矩图示于图 6-5-2(c)。

这里应注意的是：与结点力偶荷载 M_0 相应的约束力矩为 $(-M_0)$ [见 6-4 式(d)]。

解法二：

结点力偶 $M_0 = 100\text{kN}\cdot\text{m}$ 不计入约束力矩，直接在结点 B 不变号分配，跨间荷载所得约束力矩作变号分配，如图 6-5-3 所示。

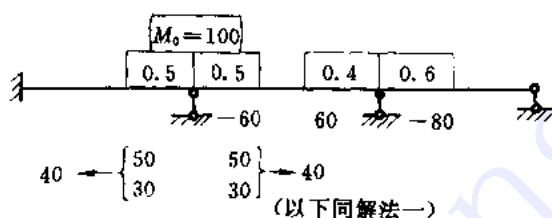


图 6-5-3

这里应注意的是：结点力偶直接分配时不能变号。

解法三：

在结点 B 附加短杆 BE，将 M_0 移至自由端 E，如图 6-5-4 所示。 $\mu_{BE} = 0, m_{BE} = -M_0 = -100\text{kN}\cdot\text{m}$ 。计算过程如图 6-5-4(b) 所示，画 M 图时将杆 BE 除去。

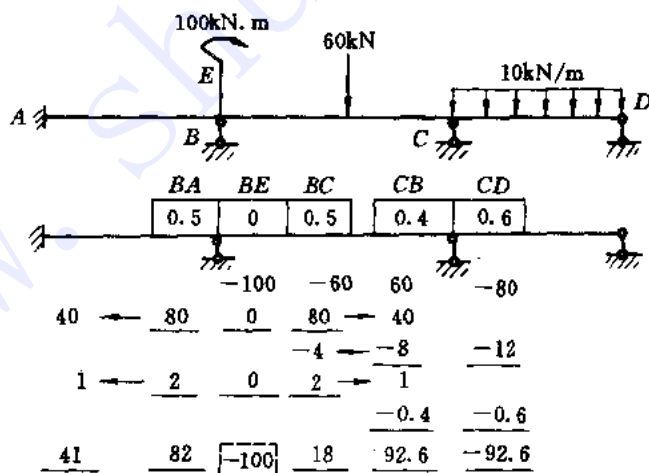


图 6-5-4

解法四：

将力偶荷载 $M_0 = 100\text{kN}\cdot\text{m}$ 作用在杆 AB 或杆 BC 的 B 端求固端弯矩再进行计算。

下面分两种情况加以比较。

1. 力偶 M_0 作用于杆 AB 的 B 端，则 $m_{BA} = -100\text{kN} \cdot \text{m}$, $m_{AB} = 0$, 计算过程示于图 6-5-5。

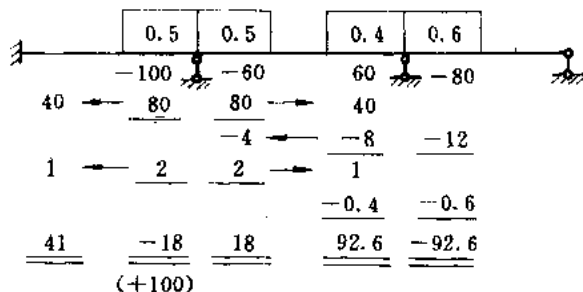


图 6-5-5

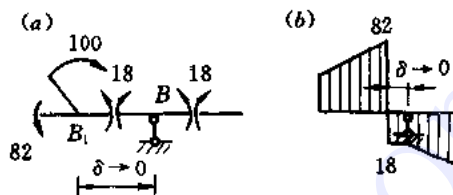


图 6-5-6

用此解法画弯矩图时，杆端弯矩 M_{BA} 极易错取为计算结果 $-18\text{kN} \cdot \text{m}$ ，应特别注意。实际上，结点 B 及其邻近杆端此时受力状态如图 6-5-6(a) 所示，这一小区弯矩图画法应如图 6-5-6(b) 所示。由于力偶作用点与结点 B 的距离 $\delta \rightarrow 0$ ，故最后弯矩仍与图 6-5-2(c) 完全相同。

2. 力偶作用于 BC 杆的 B 端，此时固端弯矩 $m_{BC} = -100$, $-60 = -160\text{kN} \cdot \text{m}$, $m_{CB} = 60\text{kN} \cdot \text{m}$, $m_{CD} = -80\text{kN} \cdot \text{m}$ 。计算过程及结果示于图 6-5-7。画结点 B 的弯矩图时，仍须注意结点 B 右侧邻近截面作用集中力偶，杆端弯矩 M_{BC} 应为 $-82 + 100 = 18\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

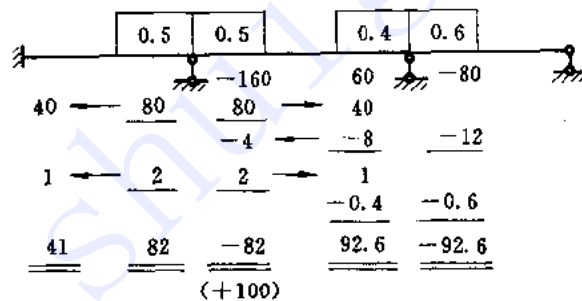


图 6-5-7

上述各种解法在无剪力分配法中处理结点力偶荷载时仍然适用。

6-6 用力矩分配法求出杆端弯矩后，怎样求结点角位移？

可有两种方法，下面分别说明。

1. 利用杆端弯矩与固端弯矩之差计算结点角位移

在等截面梁和无侧移刚架中，除一端为滑动支承杆外，任一杆件 jk 的杆端未知相对线位移 $\Delta_{jk} = 0$ ，杆端弯矩公式为

$$M_{jk} = 4i\theta_j + 2i\theta_k + m_{jk}$$

$$M_{kj} = 2i\theta_j + 4i\theta_k + m_{kj}$$

式中 i 为线刚度, θ_j, θ_k 为杆端角位移, m_{jk}, m_{kj} 为固端弯矩。若有因支座移动引起的杆端已知线位移, 其影响可计入固端弯矩中。由上面两式消去 θ_k , 可得

$$\theta_j = \frac{1}{3i} \left[(M_{jk} - m_{jk}) - \frac{1}{2} (M_{kj} - m_{kj}) \right]$$

引用记号 $\Delta M_{jk} = M_{jk} - m_{jk}, \Delta M_{kj} = M_{kj} - m_{kj}$, 分别表示近端和远端的杆端弯矩精确值与相应固端弯矩之差, 则

$$\theta_j = \frac{1}{3i} \left(\Delta M_{jk} - \frac{1}{2} \Delta M_{kj} \right) \quad (a)$$

在此式中, 用力矩分配法计算所得杆端弯矩代替其精确值, 即可求出 θ_j 的近似值。式(a)对远端为铰的杆同样适用。

对于远端(k 端)为滑动支承的杆, 杆端弯矩公式为

$$M_{jk} = i\theta_j + m_{jk}$$

$$M_{kj} = -i\theta_j + m_{kj}$$

由上两式解得该杆近端角位移的公式

$$\theta_j = \frac{1}{2i} (\Delta M_{jk} - \Delta M_{kj}) \quad (b)$$

2. 利用分配力矩求结点角位移

设有由杆 jk, jm, jn, \dots 汇交的刚结点 j 无线位移, 第 n 轮放松结点 j 时其角位移增量为 $\theta_j^{(n)}$, 各杆近端相应的分配力矩为 $(M_{jk}^n)^{(n)}, (M_{jm}^n)^{(n)}, \dots$ 如图 6-6-1 所示。设各杆转动刚度为 S_{jk}, S_{jm}, \dots , 则有

$$(M_{jk}^n)^{(n)} = S_{jk} \theta_j^{(n)}$$

结点 j 角位移增量 $\theta_j^{(n)}$ 为交于该结点的任一杆杆端在第 n 轮所获分配力矩与转动刚度之比:

$$\theta_j^{(n)} = \frac{(M_{jk}^n)^{(n)}}{S_{jk}}$$

结点 j 的角位移应等于各次放松结点所得角位移增量之和, 即

$$\theta_j = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_j^{(n)} = \frac{1}{S_{jk}} \sum_{n=1}^{\infty} (M_{jk}^n)^{(n)} \quad (c)$$

结点 j 的力矩分配只能进行有限次, 可将杆 jk 的 j 端各次所得分配力矩相加, 再除以该杆转动刚度, 即得结点角位移的渐近值。

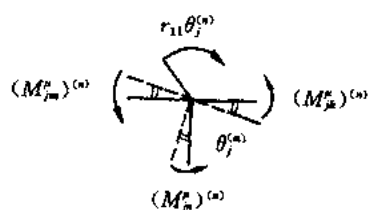


图 6-6-1

6-7 力矩分配法的计算结果怎样用变形协调条件进行校核?

力矩分配法计算结果的校核应包括平衡条件和变形条件两方面。仅满足结点平衡条件并不能保证计算的正确性。即使固端弯矩、分配系数、分配力矩和传递力矩都有错误, 但只要每次放松结点时约束力矩等于分配力矩之和且符号相反, 结点总是平衡的。因此有必要进一步作变形条件的校核。

变形条件的校核，可如通常做法即用单位荷载法计算结构的某些已知位移。此外，还可直接利用杆端计算弯矩或分配力矩求出各结点的角位移以进行校核。现在就后一途径介绍两种校核变形条件的方法。

1. 利用杆端计算弯矩求结点角位移进行校核

远端为刚结或铰结的任一无侧移杆 jk ，利用杆端计算弯矩和固端弯矩求结点 j 角位移公式见 6-6 式(a)。令

$$\eta_{jk} = \Delta M_{jk} - \frac{1}{2} \Delta M_{kj} \quad (a)$$

则

$$\theta_{jk} = \frac{1}{3i} \eta_{jk} \quad (b)$$

远端为滑动支座的杆，求近端角位移的公式见 § 6-6 式(b)。令

$$\eta'_{jk} = \Delta M_{jk} - \Delta M_{kj} \quad (c)$$

则

$$\theta_{jk} = \frac{1}{2i_{jk}} \eta'_{jk} \quad (d)$$

若刚结于结点 j 的各杆为 $jk, jm, jn \dots$ 等，则变形协调条件为：各杆在 j 端的计算角位移应相等。变形校核的步骤是：力矩分配计算结束后，由各杆端计算弯矩、固端弯矩按照式(a)或(c)求出 η (或 η') 值，再由式(b)或(d)求出 θ_{jk} ，然后在每一结点处核查各杆端角位移值是否相等。由于杆端计算弯矩不是精确值，因而 η 与 θ_{jk} 值也允许有一定误差。

例 用力矩分配法求图 6-7-1 所示刚架的弯矩图并进行校核。

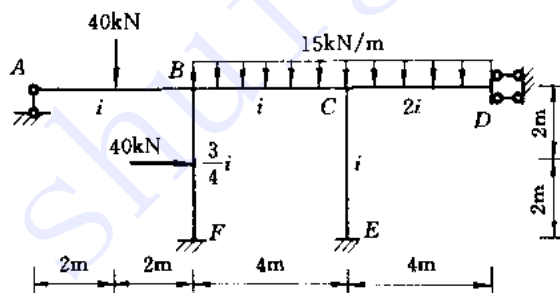


图 6-7-1

解 力矩分配系数

$$\begin{aligned} \mu_{BA} = \mu_{BF} = 0.3, \quad \mu_{BC} = 0.4 \\ \mu_{CB} = \mu_{CE} = 0.4, \quad \mu_{CD} = 0.2 \end{aligned}$$

固端弯矩

$$\begin{aligned} m_{BA} = 30\text{kN} \cdot \text{m}, \quad m_{BF} = 20\text{kN} \cdot \text{m}, \quad m_{FB} = -20\text{kN} \cdot \text{m} \\ m_{BC} = -m_{CB} = -20\text{kN} \cdot \text{m}, \quad m_{CD} = -80\text{kN} \cdot \text{m}, \quad m_{DC} = -40\text{kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

力矩分配计算与变形校核方法(一)过程见表 6-7-1。

其中注意杆 CD 的 η'_{CD} 与 θ_{CD} 应由式(c)、(d)计算。由校核结果可见，结点 B 各杆端计算角

位移基本相等，误差很小，结点 C 情形也一样。故变形条件得到满足。

表 6-7-1

		BA		BF	BC	CB		CE	CD			
μ		A	0.3	0.3	0.4		0.4	0.4	0.2	D		
上部 各 杆 端	m	0	30	20	-20		20	C	-80	-40		
					12	←	24	24	12	→	-12	
			-12.6	-12.6	-16.8	→	-8.4					
					1.68	←	3.36	3.36	1.68	→	-1.68	
			-0.5	-0.5	-0.68	→	-0.34					
	M	0	16.90	6.90	-23.80		38.76	27.49	-66.25	-53.75		
柱 下 端	m	F					E					
	M	-20					13.75					
变形 校核 方法 (一)	ΔM_{jk}	上	0	-13.10	-13.10	-3.80		18.76	27.49	13.75	-13.75	
		下							13.75			
	$-\Delta M_{jk}$		0	6.55	-18.76		3.80	-13.75	13.75			
	η_{jk} 或 η'_{jk}		-13.10	-9.825	-13.18		20.66	20.62	27.50(η')			
	θ_{jk}		-4.37/i	-4.37/i	-4.39/i		6.89/i	6.87/i	6.88/i			
方法 (二)	M_{jk}^n		-13.10	-13.10	-17.48		27.50	27.49	13.75			
	S_{jk}		3i	$4 \times \frac{3}{4}i$	4i		4i	4i	2i			
	θ_{jk}		-4.37/i	-4.37/i	-4.37/i		6.875/i	6.873/i	6.876/i			

2. 利用杆端分配力矩总和求结点角位移进行变形校核

当完成力矩分配计算后，将结点处同一杆端各次所得分配力矩的总和除以该杆在结点近端的转动刚度，便得到该杆近端角位移。设力矩分配次数为 m 次，由 6-6 式(c)，并令

$$M_{jk}^n = \sum_{n=1}^m (M_{jk}^n)^{(n)} \quad (e)$$

则杆端角位移计算值为

$$\theta_{jk} = \frac{1}{S_{jk}} M_{jk}^n \quad (f)$$

若同一刚结点各杆端算出的角位移相等，则变形条件得到满足。

上例在表 6-7-1 中同时列出了按第二种变形校核方法的计算结果。

讨论：上述两种变形校核方法均存在较大缺陷。首先，必须保证固端弯矩计算无误，校核方法才有效。若固端弯矩算错，其余各步计算均正确，则相当于换了一组荷载，两种校核

方法都不能检查出这种错误。其次，第二种方法只用到分配力矩与转动刚度，因此当传递力矩有错误时，它也检查不出来。解决这两个问题的方法就是进一步校核杆件的变形条件，利用杆上的原始荷载和求得的结点转角，借助转角位移方程再计算杆端弯矩，看其是否与力矩分配计算结果相同。下面举例说明。

图 6-7-2 示一连续梁及力矩分配计算杆端弯矩的结果，及用第一种变形校核方法所得杆端转角。看来结点 B、C 的平衡条件及变形协调条件均得到了满足，但只要以杆 CD 为隔离体用 θ_{CD} 值计算杆端弯矩，可得

$$M_{CD} = 3(2i)\theta_{CD} + m_{CD} = 6i \times \left(-\frac{94.7}{i} \right) - \frac{3 \times 200 \times 8}{16} = -868.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

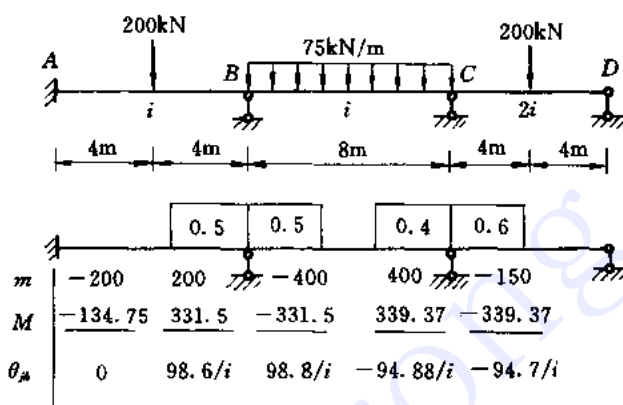


图 6-7-2

此值与力矩分配所得 $-339.37 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 相去甚远，原因是固端弯矩计算错误，正确值应为 $m_{CD} = -300 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。

若固端弯矩正确，而计算过程如表 6-7-2 所示。用第一种变形校核方法可知计算有误（读者自校）。用二种变形校核方法示于图表下方，此结果似已满足变形协调条件，但若取杆 BC 为隔离体，用 θ_{BC} 与 θ_{CB} 值验算 M_{BC} 得

表 6-7-2

		BA	BC		CB	CD	
μ		0.5	0.5		0.4	0.6	
m	-200	200	-400		400	-300	
	50	← 100	100	→	50		
			30	←	-60	-90	
	-7.5	← -15	-15	→	-7.5		
					3.0	4.5	
	-157.5	285	-285		385.5	-385.5	
$\sum M^F$		85	85		-57	-85.5	
S		4i	4i		4i	6i	
θ		21.25/i	21.25/i		-14.25/i	-14.25/i	

$M_{BC} = 4i\theta_{BC} + 2i\theta_{CH} + m_{BC} = 85 - 28.5 - 400 = -343.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \neq -285 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 可见计算错误。原因是第一轮计算中由C向B的传递力矩 $30 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 符号错误。但若验算 M_{BA}, M_{CB} 与 M_{CD} 则仍与计算结果相符，检查不出此错误。可见第二种校核方法的局限性更大些。总之，不论用哪种校核方法，最后均应验算各杆的平衡条件和杆端变形条件，才能保证校核的可靠性。

6-8 具有弹性支座的连续梁和无侧移刚架能否用力矩分配法计算？

可以，只要事先求出杆端具有弹性支承或弹性抗转支承等截面杆的转动刚度、分配系数、传递系数与固端力矩，就可用力矩分配法计算。

有两类弹性支承杆件的转角位移方程前已导出[见 5-5 式(c)、(f)]。现对两端均具弹性支承的等截面杆件进行分析。

1. 近端弹性支承，远端弹性抗转支承(图 6-8-1a)

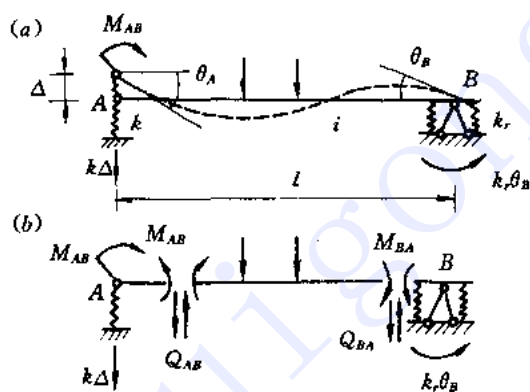


图 6-8-1

杆 AB 的线刚度 i 。A 端弹簧刚度为 k ，B 端抗转刚度为 k_r ，杆端转角 θ_A, θ_B ，弦转角 $\frac{\Delta}{l}$ 及杆端弯矩、剪力正负号规定均同位移法。杆端弯矩与剪力表达式为

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i\theta_A + 2i\theta_B - 6i\frac{\Delta}{l} + m_{AB} \\ M_{BA} &= 2i\theta_A + 4i\theta_B - 6i\frac{\Delta}{l} + m_{BA} \\ Q_{AB} &= -\frac{1}{l}\left(6i\theta_A + 6i\theta_B - \frac{12i}{l}\Delta + m_{AB} - m_{BA} + m_B^o\right) \\ Q_{BA} &= -\frac{1}{l}\left(6i\theta_A + 6i\theta_B - \frac{12i}{l}\Delta + m_{AB} - m_{BA} + m_A^o\right) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

式中， m_{AB}, m_{BA} 为两端固定杆的固端弯矩， m_A^o, m_B^o 分别为荷载对 A、B 两点的力矩代数和，均以顺时针为正。考虑结点 A 的剪力平衡、结点 B 的力矩平衡条件，如图(b)所示，可得

$$Q_{AB} = -k\Delta, \quad M_{BA} = -k_r\theta_B$$

代入式(a)后消去 Δ 和 θ_B ，化简得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{1}{4i(kl^2 + 3i) + k_r(kl^2 + 12i)} \{ 4i\theta_A [3ikl^2 + k(kl^2 + 3i)] \\ &\quad - 6i(k_r + 2i)(m_{AB} + m_{BA} + m_B^0) - 2i(kl^2 - 6i)m_{BA} \} + m_{AB} \\ M_{BA} &= \frac{1}{4i(kl^2 + 3i) + k_r(kl^2 + 12i)} \{ 2i\theta_A(kl^2 - 6i)k_r \\ &\quad - 6ik_r(m_{AB} + m_{BA} + m_B^0) - k_r(kl^2 + 12i)m_{BA} \} \end{aligned} \right\} (b)$$

令 $\theta_A=1$, 荷载为零, 即得转动刚度与传递系数

$$\left. \begin{aligned} S_{AB} &= 4i \left[\frac{3ikl^2 + k_r(kl^2 + 3i)}{4i(kl^2 + 3i) + k_r(kl^2 + 12i)} \right] \\ C_{AB} &= \frac{1}{2} \left[\frac{k_r(kl^2 - 6i)}{3ikl^2 + k_r(kl^2 + 3i)} \right] \end{aligned} \right\} (c)$$

2. 近端刚结, 远端弹性抗转(图 6-8-2(a))

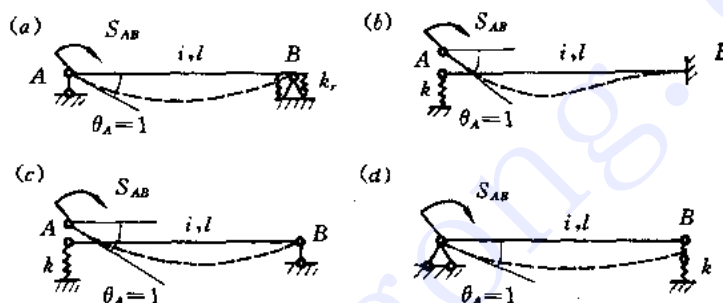


图 6-8-2

在式(c)中取 $k \rightarrow \infty$, 得

$$\left. \begin{aligned} S_{AB} &= 4i \left(\frac{k_r + 3i}{k_r + 4i} \right) \\ C_{AB} &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_r}{k_r + 3i} \right) \end{aligned} \right\} (d)$$

3. 近端弹性支承, 远端固定(图 6-8-2(b))

在式(c)中取 $k_r \rightarrow \infty$, 得

$$\left. \begin{aligned} S_{AB} &= 4i \left(\frac{kl^2 + 3i}{kl^2 + 12i} \right) \\ C_{AB} &= \frac{1}{2} \left(\frac{kl^2 - 6i}{kl^2 + 3i} \right) \end{aligned} \right\} (e)$$

4. 近端弹性支承, 远端铰结(图 6-8-2(c))

在式(c)中取 $k_r=0$, 得

$$\left. \begin{aligned} S_{AB} &= 3i \left(\frac{kl^2}{kl^2 + 3i} \right) \\ C_{AB} &= 0 \end{aligned} \right\} (f)$$

5. 近端刚结, 远端弹性支承(图 6-8-2(d))

由 5-5 式(f)可得 S_{AB} 、 C_{AB} 公式, 与本节式(f)相同。事实上, 图 6-8-2(c)与(d)杆件变

形相同，只相差刚体位移。

6. 近端刚结，远端滑动弹性支承(图 6-8-3)

由式(a)，取 $\theta_B = 0$ ，因此

$$Q_{BA} = -\frac{1}{l} \left(6i\theta_A - \frac{12i}{l}\Delta + m_{AB} + m_{BA} + m_A^o \right)$$

引入结点 B 的剪力平衡条件

$$Q_{BA} = -k\Delta$$

在杆端弯矩式中消去 Δ ，得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{1}{kl^2 + 12i} \left[4i\theta_A(kl^2 + 3i) + (kl^2 - 6i)m_{AB} - 6i(m_{BA} + m_A^o) \right] \\ M_{BA} &= \frac{1}{kl^2 + 12i} \left[2i\theta_A(kl^2 - 6i) + (kl^2 + 6i)m_{BA} - 6i(m_{AB} + m_A^o) \right] \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

转动刚度与传递系数为

$$\left. \begin{aligned} S_{AB} &= 4i \left(\frac{kl^2 + 3i}{kl^2 + 12i} \right) \\ C_{AB} &= \frac{1}{2} \left(\frac{kl^2 - 6i}{kl^2 + 3i} \right) \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

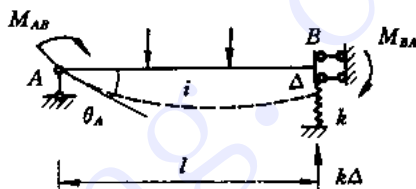


图 6-8-3

现在讨论固端弯矩。在式(b)及式(g)中令 $\theta_A = 0$ ，就得到固端弯矩公式。再根据 k_r 和 k 的不同取值，即可得到各种不同弹性支承杆的固端弯矩。公式列于表 6-8-1。其它各种荷载作用下的固端弯矩均可由式(b)、(g)导出。

表 6-8-1 弹性支承等截面杆固端弯矩表

		m_{AB}	m_{BA}
1		$-\frac{ql^2}{12} \cdot \frac{6i(kl^2 + 12i) + k_r(kl^2 - 24i)}{4i(kl^2 + 3i) + k_r(kl^2 + 12i)}$	$\frac{ql^2}{12} \cdot \frac{k_r(kl^2 + 48i)}{4i(kl^2 + 3i) + k_r(kl^2 + 12i)}$
2		$-\frac{Pl}{8} \cdot \frac{6i(kl^2 - 8i) + k_r(kl^2 - 12i)}{4i(kl^2 + 3i) + k_r(kl^2 + 12i)}$	$\frac{Pl}{8} \cdot \frac{k_r(kl^2 + 36i)}{4i(kl^2 + 3i) + k_r(kl^2 + 12i)}$
3		$-\frac{ql^2 k_r + 6i}{12 k_r + 4i}$	$\frac{ql^2 k_r}{12 k_r + 4i}$

续表

		m_{AB}	m_{BA}
4		$-\frac{Pl k_r + 6i}{8 k_r + 4i}$	$\frac{Pl k_r}{8 k_r + 4i}$
5		$-\frac{ql^2 k l^2 - 24i}{12 k l^2 + 12i}$	$\frac{ql^2 k l^2 + 48i}{12 k l^2 + 12i}$
6		$\frac{Pl k l^2 - 12i}{8 k l^2 + 12i}$	$\frac{Pl k l^2 + 36i}{8 k l^2 + 12i}$
7		$-\frac{ql^2 k l^2 - 12i}{8 k l^2 + 3i}$	0
8		$-\frac{3Pl k l^2 - 8i}{16 k l^2 + 3i}$	0
9		$-\frac{ql^2 k l^2 + 12i}{8 k l^2 + 3i}$	0
10		$-\frac{3Pl k l^2 + 8i}{16 k l^2 + 3i}$	0

在计算过程中，具有弹性抗转支座的刚结点各杆近端的转动刚度，仍按近端刚结杆考虑而在计算分配系数时将弹性抗转刚度计入结点总转动刚度。如图 6-8-4 示一结点 A 发生单位转角时各杆转动刚度 S_{Aj} ($j=B, C, D \dots$) 及弹性支座反力矩 k_r, M_0 为外力偶。由力矩平衡条件可求出各杆力矩分配系数

$$\mu_{Aj} = \frac{S_{Aj}}{k_r + \sum_A S} \quad (i)$$

在计算固端弯矩时，此类结点的杆端按固定端处理。

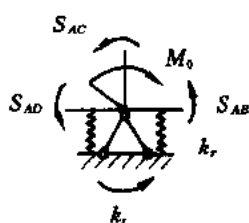


图 6-8-4

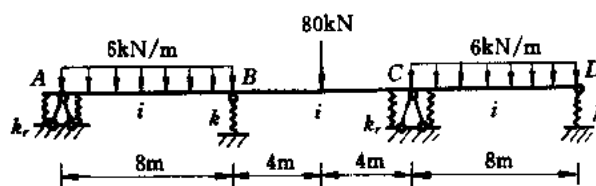


图 6-8-5

例 用力矩分配法计算图 6-8-5 所示梁的弯矩图。\$k_r=2i, k=4i/l^2, l=8m\$。

解 1. 计算分配系数与传递系数

结点 B: 由式(c)有

$$S_{BA} = 4i \cdot \frac{3ikl^2 + k_r(kl^2 + 3i)}{4i(kl^2 + 3i) + k_r(kl^2 + 12i)} = 2i$$

$$C_{BA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k_r(kl^2 - 6i)}{3ikl^2 + k_r(kl^2 + 3i)} = -\frac{1}{13}$$

由式(e)有

$$S_{BC} = 4i \cdot \frac{kl^2 + 3i}{kl^2 + 12i} = \frac{7}{4}i$$

$$C_{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{kl^2 - 6i}{kl^2 + 3i} = -\frac{1}{7}$$

$$\sum_B S = 2i + \frac{7}{4}i = \frac{15}{4}i, \quad \mu_{BA} = \frac{8}{15} = 0.533, \quad \mu_{BC} = \frac{7}{15} = 0.467$$

结点 C: 由式(h)有

$$S_{CB} = S_{BC} = \frac{7}{4}i, \quad C_{CB} = C_{BC} = -\frac{1}{7}$$

由式(f)有

$$S_{CD} = 3i \cdot \frac{kl^2}{kl^2 + 3i} = \frac{12}{7}i, \quad C_{CD} = 0$$

$$k_r + \sum_C S = 2i + \frac{7}{4}i + \frac{12}{7}i = \frac{153}{28}i, \quad \mu_{CB} = \frac{7}{4} \times \frac{28}{153} = 0.320, \quad \mu_{CD} = \frac{12}{7} \times \frac{28}{153} = 0.314$$

2. 计算固端弯矩

由表 6-8-1 第 1 栏有

$$m_{AB} = -\frac{ql^2}{12} \cdot \frac{k_r(kl^2 + 48i)}{4i(kl^2 + 3i) + k_r(kl^2 + 12i)} = -68.57 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$m_{BA} = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{6i(kl^2 + 12i) + k_r(kl^2 - 24i)}{4i(kl^2 + 3i) + k_r(kl^2 + 12i)} = 32 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

由表 6-8-1 第 6 栏有

$$m_{BC} = -\frac{Pl}{8} \cdot \frac{kl^2 - 12i}{kl^2 + 12i} = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$m_{CB} = \frac{Pl}{8} \cdot \frac{kl^2 + 36i}{kl^2 + 12i} = 200 \text{kN} \cdot \text{m}$$

由表 6-8-1 第 9 栏得

$$m_{CD} = -\frac{ql^2}{8} \cdot \frac{kl^2 + 12i}{kl^2 + 3i} = -109.71 \text{kN} \cdot \text{m}, \quad m_{DC} = 0$$

3. 力矩分配计算如下表:

	$\left(-\frac{1}{13}\right)$ ←	0.533	0.467	$\left(-\frac{1}{7}\right)$ ←	0.320	0.314	
A		B		C		D	
-68.57		32	40	200		-109.71	
			4.13	← -28.89		-28.35	
3.12	←	-40.58	-35.55	→ 5.08			
			0.23	← -1.63		-1.60	
0.01	←	-0.13	-0.10				
<u>-65.44</u>		<u>-8.71</u>	<u>8.71</u>	<u>174.56</u>		<u>-139.66</u>	

校核结点 C 的平衡条件时,应考虑弹性支承的反力矩。当放松结点 C 时,弹性抗转支

承的力矩分配系数为 $\mu_{Ck} = \frac{k_r}{k_r + \sum_c S} = 2 \times \frac{28}{153} = 0.366$, 故弹性反力矩为

$$M_{Ck} = -0.366(200 - 109.71 + 5.08) = -34.90 \text{kN} \cdot \text{m}$$

结点 C 的力矩总和为

$$\sum_c M = 174.56 - 139.66 - 34.90 = 0$$

第七章 超静定结构的特性

7-1 超静定结构在荷载作用下的内力分布随各部分刚度比值变化的规律是什么？

一般规律是：相对增加某局部的刚度，则该局部的内力也相对增加，反之则相对减小。在特定情况下，各部分内力分布与刚度分布呈线性关系。

图 7-1-1(a)所示刚架中，梁的线刚度 $i_b = \frac{EI_b}{l}$ ，柱的线刚度 $i_c = \frac{EI_c}{h}$ ，梁柱线刚度比 $\alpha = \frac{i_b}{i_c}$ 。刚架弯矩图如图(b)。弯矩分布随梁柱线刚度比 α 的变化而变化：

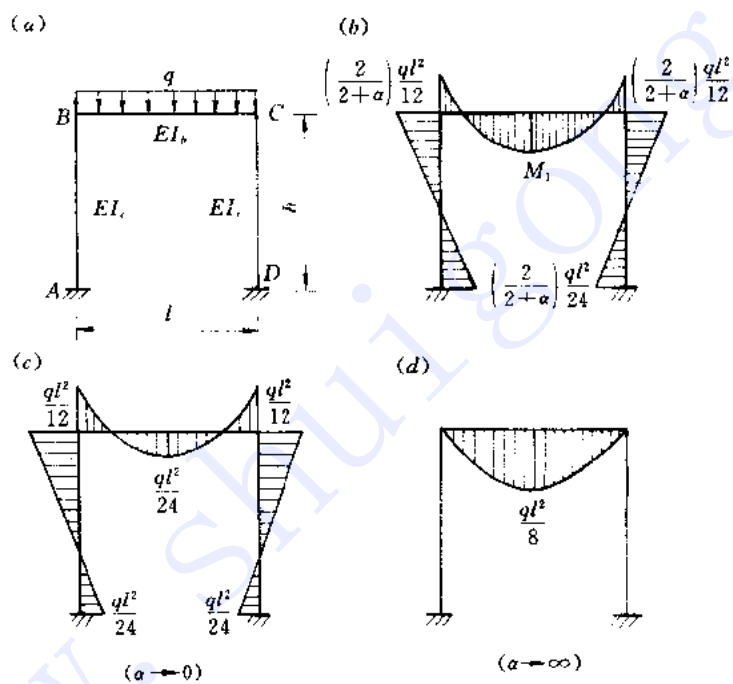


图 7-1-1

1. 当 $\alpha \rightarrow 0$ ，即柱刚度很大时，弯矩图如图(c)所示。此时柱对梁的约束相当于固端约束，梁的弯矩图与两端固定梁相同。

2. 当 $\alpha \rightarrow \infty$ ，即横梁刚度很大时，弯矩图如图(d)所示。此时柱刚度相对很小，对梁的转动约束作用极小，横梁相当于简支梁。

3. 当 α 由零开始逐渐增加至很大时，横梁跨中弯矩 M_1 不断增大（由 $\frac{ql^2}{12}$ 增至 $\frac{ql^2}{8}$ ），柱顶弯矩不断减小（由 $\frac{ql^2}{12}$ 减到零）。

图 7-1-2 画出 M_1 、 M_{BA} 随 α 变化的曲线，其函数式为

$$M_1 = \frac{2 + 3\alpha}{3(2 + \alpha)} \frac{ql^2}{8}, \quad M_{BA} = \frac{2}{2 + \alpha} \frac{ql^2}{12} = \frac{4}{3(2 + \alpha)} \frac{ql^2}{8}$$

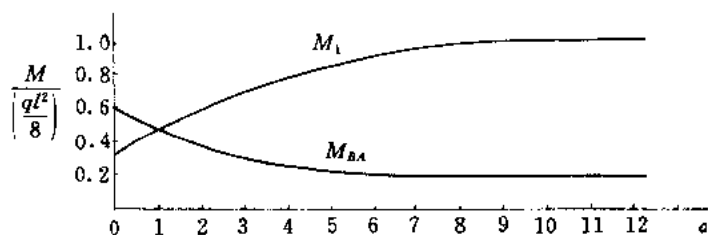


图 7-1-2

显然，随着横梁刚度的相对增加，其跨中最大弯矩相应增加，柱中最大弯矩相应减小，但它们与 α 的关系并非线性的。

上述刚架若受结点水平荷载，其弯矩图如图 7-1-3(a) 所示。当柱相对刚度很大 ($\alpha \rightarrow 0$) 时，弯矩图如图 (b)，此时

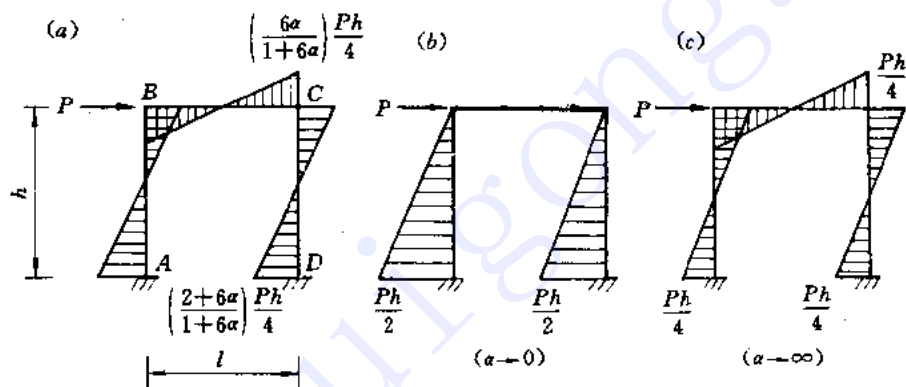


图 7-1-3

横梁对柱的转动约束作用极小，柱顶相当于铰结，横梁无弯矩。当横梁相对刚度很大 ($\alpha \rightarrow \infty$) 时，弯矩图如图 (c)。此时横梁对柱端的约束相当于滑动支承，柱顶不能转动，但可侧移。当 α 由零开始渐增时，梁端弯矩 M_{BC} 不断增加 (由零到 $\frac{Ph}{4}$)，柱底弯矩 M_{AB} 不断减小 (由 $\frac{Ph}{2}$ 到 $\frac{Ph}{4}$)，其变化曲线示于图 7-1-4。M 与 α 间也是非线性关系。

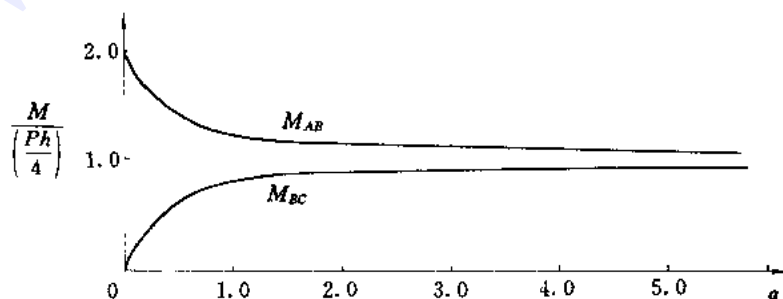


图 7-1-4

在某些特殊情形下，各杆内力分布的比例与线刚度的相应比例呈线性关系。结点荷载作用下的单结点无侧移刚架、等高排架及刚性横梁的单层刚架就具有这种性质。图 7-1-5

(a) 示一单结点无侧移刚架作用结点力偶荷载 M_0 ，各杆近端弯矩为 $M_{Aj} = \frac{i_j}{\sum_A i} M_0$ ($j=1, 2, 3$)，弯矩图示于图 (b)。各杆任意截面的弯矩绝对值均与该杆线刚度成正比。若各杆远端的支承条件不同，则各杆弯矩与该杆 A 端转动刚度成正比。图 7-1-6 所示排架与图 7-1-7 所示具有刚性横梁的刚架，各柱等长，在柱顶水平荷载作用下，各柱柱底截面(或任意截面)弯矩绝对值与该柱线刚度 i_j (或抗弯刚度 EI_j) 成正比。若各柱不等长，则各柱剪力与该柱的侧移刚度 (对于排架柱为 $3 \frac{i_j}{h_j^2}$ ，对于刚架柱为 $12 \frac{i_j}{h_j^2}$) 成正比。

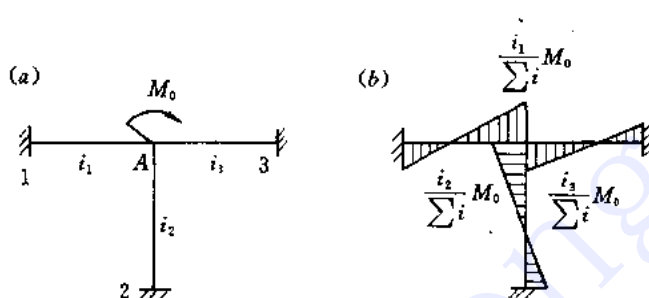


图 7-1-5

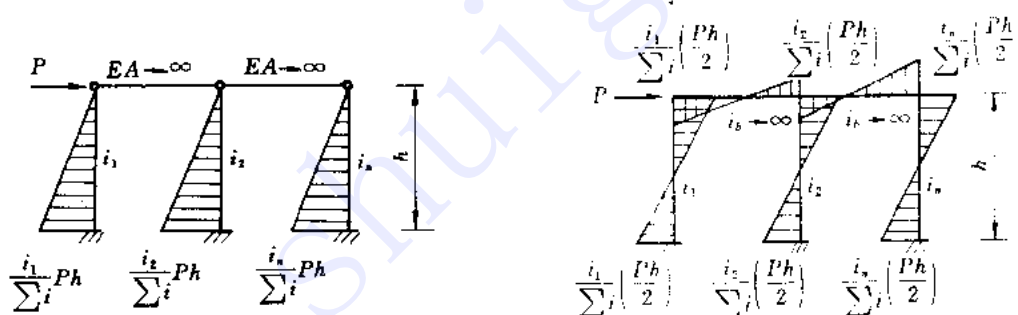


图 7-1-6

图 7-1-7

7-2 在荷载作用下,当超静定结构各部分刚度比值变化时,内力分布是否必定随之变化?

不一定,有例外。当结构的几何形状、支承状况及荷载布置能使结点不发生任何位移时,则各杆视为独立的超静定单杆,每杆上的荷载对其他杆内力无影响。此时各杆刚度的相对变化不会引起内力分布的变化。

图 7-2-1(a) 所示连续梁线刚度 $i_1 = \frac{EI_1}{l_1}$, $i_2 = \frac{EI_2}{l_2}$, 由位移法解得

$$\theta_B = \frac{q_2 l_2^2 - q_1 l_1^2}{24(i_1 + i_2)} \quad (a)$$

杆端弯矩

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} &= \frac{i_1}{i_1 + i_2} \frac{q_2 l_2^2 - q_1 l_1^2}{8} + \frac{q_1 l_1^2}{8} \\ M_{BC} &= \frac{i_2}{i_1 + i_2} \frac{q_2 l_2^2 - q_1 l_1^2}{8} - \frac{q_2 l_2^2}{8} \end{aligned} \right\} (b)$$

结点 B 的平衡条件为 $M_{BA} + M_{BC} = 0$ ，将式 (b) 代入后得到恒等式。弯矩图如图 (b)，其中 $M_B = M_{BA} = -M_{BC}$ 。两跨的跨中截面弯矩分别为

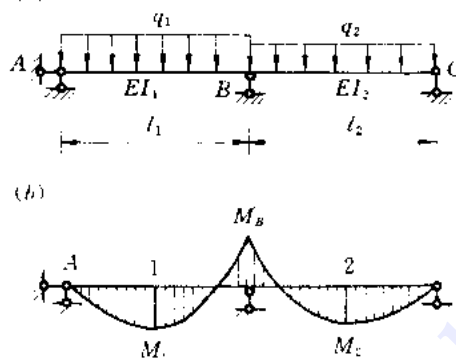


图 7-2-1

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{q_1 l_1^2}{16} - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \left(\frac{q_2 l_2^2 - q_1 l_1^2}{16} \right) \\ M_2 &= \frac{q_2 l_2^2}{16} + \frac{1}{1 + \alpha} \left(\frac{q_2 l_2^2 - q_1 l_1^2}{16} \right) \end{aligned} \right\} (c)$$

上式中 $\alpha = \frac{i_1}{i_2}$ 。由式 (b)、(c) 可见，只要 $q_2 l_2^2 - q_1 l_1^2 \neq 0$ ， M_B 、 M_1 、 M_2 值均随线刚度比值 α 改变。但当 $q_2 l_2^2 - q_1 l_1^2 = 0$ 时，上述各弯矩值就与 α 无关。无论 i_1 、 i_2 、 l_1 、 l_2 与 q_1 为何值，只要选择 q_2 使 $q_2 = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 q_1$ ，则由式 (a) 可知 $\theta_B = 0$ 。此时截面 B 与固端等效，其弯矩等于单跨梁的固端弯矩 $m_{BA} = \frac{q_1 l_1^2}{8}$ ， $m_{BC} = -\frac{q_2 l_2^2}{8}$ 。单跨梁固端弯矩与线刚度无关，自然与 α 无关。本例中若 $q_1 = q_2 = q$ ， $l_1 = l_2 = l$ ，则 $|M_B| = \frac{q l^2}{8}$ ， $M_1 = M_2 = \frac{q l^2}{16}$ ，此时任意改变比值 $\frac{l_1}{l_2}$ ，弯矩图都不会改变。

在超静定刚架或组合结构中也可能出现类似情况。图 7-2-2(a)、(b) 示闭合刚架分别受两种特殊分布的荷载，在此两种情形中，刚架各结点的角位移均为零，各杆均为独立的超静定杆，无论各杆线刚度(或抗弯刚度)如何变化，杆端弯矩均为固端弯矩，内力分布不变。再如图 7-2-3 所示刚架，如果荷载之间保持某种特定比例关系，能使结点 A、B 的角位

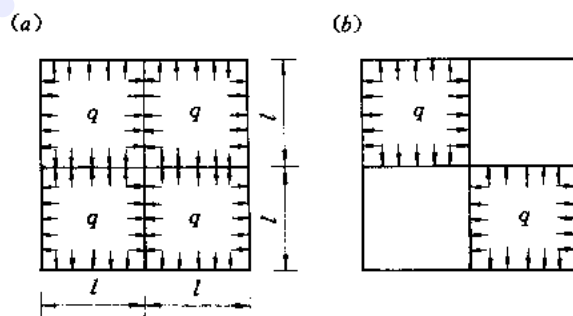


图 7-2-2

移为零，则各杆内力分布也与刚度相对值无关。此例中荷载的特殊关系为

$$P_1 = \frac{4}{9}ql, \quad P_2 + \frac{P_3}{3} = \frac{2}{9}ql$$

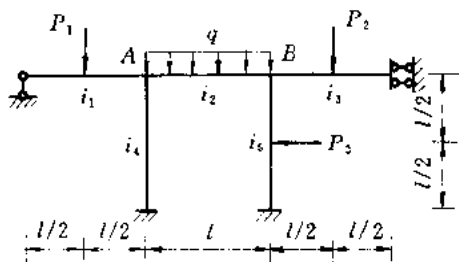


图 7-2-3

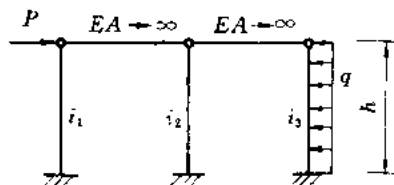


图 7-2-4

图 7-2-4 所示排架,若适当选择荷载 P 与 q 的比例(即 $P = \frac{3}{8}qh$),使柱顶线位移为零,则内力分布也与各柱线刚度相对比值无关。

最后还应指出,在上述各种特殊情况下,各杆的变形仍会随线刚度比值的变化而改变。

7-3 刚架计算中什么情况下需要考虑轴向变形的影响? 决定轴向变形影响大小的主要因素是什么?

刚架中主要内力是弯矩。一般情况下刚架所受轴力不大,杆件轴向变形对弯矩的影响很小,可以忽略。但在高层结构或轴力很大的刚架中,轴向变形的影响不可忽略。决定轴向变形影响大小的主要因素,一是轴力的相对大小,二是杆件长度与横截面尺寸的比例(长细比)。

下面先讨论考虑轴向变形时杆件刚度方程。图 7-3-1 示两端刚结等截面杆的杆端位移与杆端力,其变形曲线微分方程为:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = - (M_{AB} + Q_{AB}x - N_{AB}y)$$

当取 $N_{AB} = N_{BA} = -P$ 时,上式即为分析稳定问题时的压杆刚度方程。当研究刚架杆件强度问题计算内力时,在微小变形条件下,可略去纵向力对横向变形的影响,上式简化为

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = - (M_{AB} + Q_{AB}x)$$

于是有

$$y = - \frac{1}{EI} \left(\frac{Q_{AB}}{6}x^3 + \frac{M_{AB}}{2}x^2 + c_1x + c_2 \right)$$

常数 Q_{AB}, M_{AB}, c_1, c_2 可由四个边界条件

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y' = \theta_A;$$

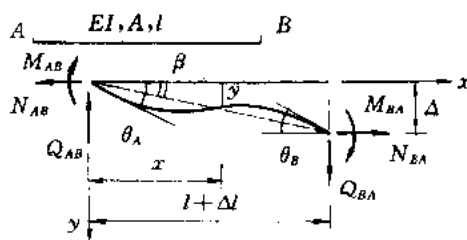


图 7-3-1

$$x = l, \quad y = \Delta, \quad y' = \theta_B$$

确定，最后得横向刚度方程

$$\begin{Bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \\ Q_{AB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i & 2i & -\frac{6i}{l} \\ 2i & 4i & -\frac{6i}{l} \\ -\frac{6i}{l} & -\frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \Delta \end{Bmatrix} \quad (a)$$

轴向力只与轴向变形有关，轴向刚度方程为

$$N_{AB} = N_{BA} = \frac{EA}{l} \Delta l \quad (b)$$

式中轴力以拉为正，杆端轴向相对位移 Δl 以伸长为正。

现在分析轴向变形对刚架内力的影响。图 7-3-2(a) 示一刚架。各杆为矩形等截面杆，

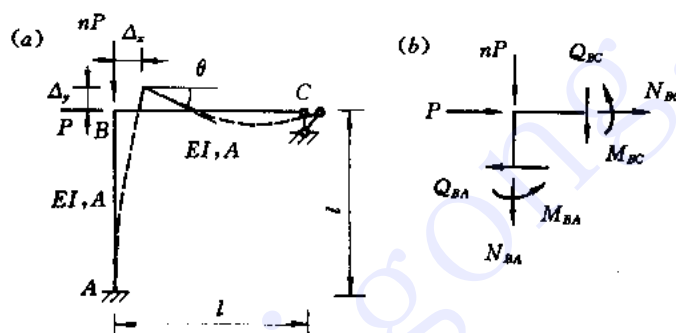


图 7-3-2

截面高 h 。位移法基本未知量为结点 B 的三个位移分量 $\theta, \Delta_x, \Delta_y$ 。杆端力为

$$M_{BA} = 4i\theta - \frac{6i}{l}\Delta_x, \quad M_{AB} = 2i\theta - \frac{6i}{l}\Delta_x, \quad M_{BC} = 3i\theta - \frac{3i}{l}\Delta_y,$$

$$Q_{BA} = -\frac{6i}{l}\theta + \frac{12i}{l^2}\Delta_x, \quad Q_{BC} = -\frac{3i}{l}\theta + \frac{3i}{l^2}\Delta_y,$$

$$N_{BA} = \frac{EA}{l}\Delta_y, \quad N_{BC} = 0 \quad (\text{由 } BC \text{ 杆平衡条件得到})$$

由结点 B 的三个平衡条件(图(b))得位移法方程:

$$\sum M_B = 0, \quad 7i\theta - \frac{6i}{l}\Delta_x - \frac{3i}{l}\Delta_y = 0$$

$$\sum X = 0, \quad \frac{6i}{l}\theta - \frac{12i}{l^2}\Delta_x + P = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad -\frac{3i}{l}\theta + \left(\frac{3i}{l^2} + \frac{EA}{l}\right)\Delta_y + nP = 0$$

解得

$$\theta_B = \frac{Pl}{2i} \left(\frac{1 + 4a^2 - 2n}{1 + 16a^2} \right)$$

$$\Delta_x = \frac{Pl^2}{6i} \left(\frac{2 + 14\alpha^2 - 3n}{1 + 16\alpha^2} \right)$$

$$\Delta_y = \frac{Pl^2}{6i} \left(\frac{3 - 8n}{1 + 16\alpha^2} \right)$$

其中 $\alpha = \frac{l}{h}$ 为杆长与截面高度的比值。最后求出各杆杆端力，内力图如图 7-3-3(a)、(b)、(c) 所示。括号内为不考虑轴向变形影响的计算结果。

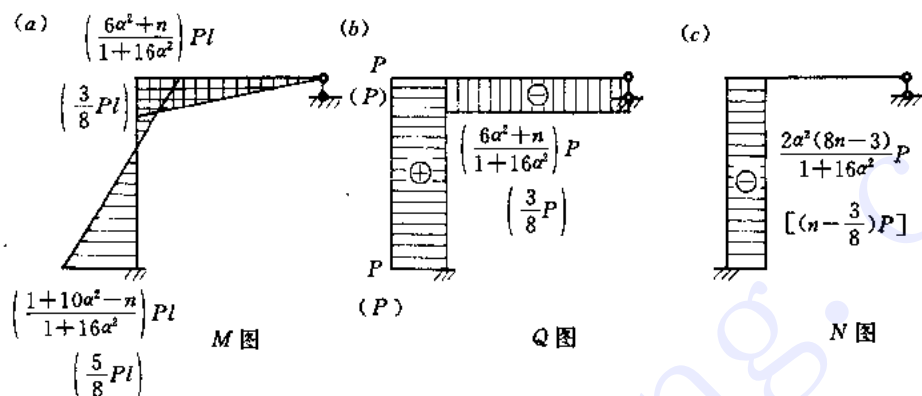


图 7-3-3

由比较可知，考虑轴向变形后的内力分布与杆件所受轴力的大小(取决于 n)以及杆长与截面高度比值 α 有关。例如 M_{BC} 和 Q_{BC} 都是 n 的线性函数，可绘出一组 $M_{BC}-n$ 直线图如图 7-3-4 所示。直线斜率为

$$k = \frac{1}{1 + 16\alpha^2}$$

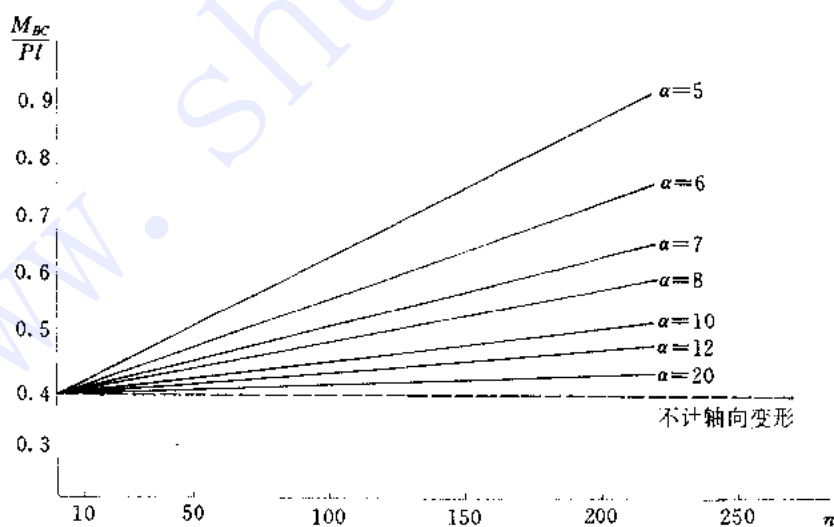


图 7-3-4

α 越小，斜率越大，说明杆件越短粗，轴向变形对内力影响越大。 $Q_{BC}-n$ 图形有相同特点。

考虑轴向变形与不计轴向变形相比, M_{BC} (或 Q_{BC}) 的相对误差为

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{n - \frac{3}{8}}{n + 6\alpha^2}$$

也取决于 n, α 两个常数的值。当不计轴向变形时, 内力与 n, α 无关 (图中的水平线)。

当杆件截面不是矩形截面时, 常数 α 应改为长细比 λ , $\left[\lambda - l \sqrt{\frac{A}{I}} \right]$, 对于矩形截面, $\lambda = 2 \sqrt{3} \alpha$ 。

可以看出, 当考虑轴向变形时, 影响弯曲内力改变的因素有两个:

1. 轴力大小的影响。相对于横向荷载来说, 轴力越大, 轴向变形对弯曲内力的影响就越大。因立柱轴力增大时, 结点线位移 Δ 增大, 导致梁的弯曲变形增大, 上例表明: 在杆长与截面高度比值适当时 (取 $\alpha = 10$), 若竖向力与水平力为同量级, 则轴向变形的影响为千分之几; 若竖向力为水平力的十倍 ($n = 10$), 则轴向变形的影响为百分之几; 若竖向力为水平力的一百倍 ($n = 100$), 则轴向变形对内力的影响为百分之几十。

2. 杆件长细比的影响。设各杆 λ 值按比例改变。当轴力不变时, λ 越小, 轴向变形的影响越大, 而且这种影响随着轴力的增加 (n 增大) 越来越显著。因杆件由细长变为短粗时, 截面抗拉压刚度 EA 的增长比抗弯刚度增长慢, 因而轴向变形对内力的影响相对增加。

现在分析轴力 N_{AB} 受到的影响。考虑与不考虑轴向变形所得轴力之差为

$$\Delta N_{AB} = -\frac{2\alpha^2(8n-3)}{1+16\alpha^2} + \left(n - \frac{3}{8} \right) P = \frac{n - \frac{3}{8}}{1 + 16\alpha^2} P$$

相对误差为

$$\frac{\Delta N_{AB}}{N_{AB}} = \frac{n - \frac{3}{8}}{2\alpha^2(8n-3)} = \frac{1}{16\alpha^2}$$

这一误差与轴力大小 (参数 n) 无关, 而只随 α 变化。现将其相对误差与 α 关系列表如下:

$\alpha = \frac{l}{h}$	5	7	10	15	20
$\frac{\Delta N}{N} (\%)$	0.250	0.128	0.063	0.028	0.016

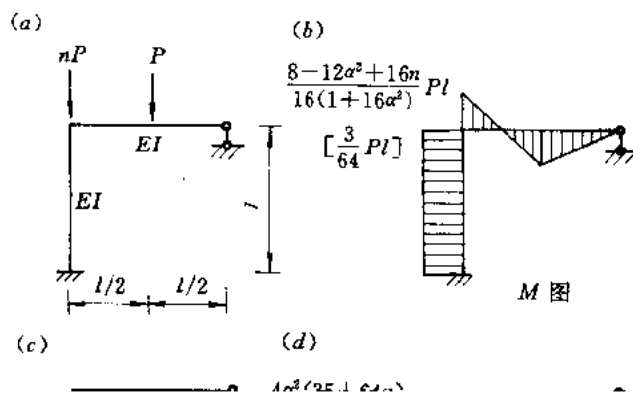
一般刚架受弯杆的 α 值在 7~15 之间, 可见轴向变形对轴力的影响很小。

设上述刚架只受竖向荷载, 如图 7-3-5(a), 其内力图分别示于图(b)、(c)、(d)。方括号内为不计轴向变形时的相应内力。由图可见, 当考虑轴向变形时, 杆端弯矩和剪力仍是参数 n 的线性函数, 函数图形具有与图 7-3-4 相同的性质, 即直线的斜率仍为

$$k = \pm \frac{1}{1 + 16\alpha^2}$$

因而上面得到的关于 n 与 α 对弯曲内力影响的两点性质完全相同。但本例中杆端弯矩和剪力可能变号, 相对误差与上例也不同。对轴力 N_{AB} 来说, 考虑与不考虑轴向变形影响, 其相对误差为

$$\frac{\Delta N_{AB}}{N_{AB}} = \frac{1}{4\alpha^2}$$



www.shuigong.com

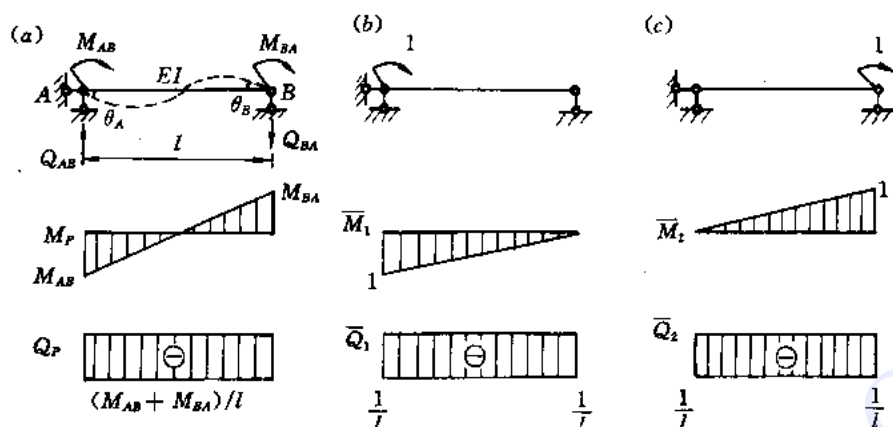


图 7-4-1

$$\theta_B = \left(-\frac{1}{6i} + \frac{k}{GA l} \right) M_{AB} + \left(\frac{1}{3i} + \frac{k}{GA l} \right) M_{BA}$$

解得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{1}{1+\xi} [(4+\xi)i\theta_A + (2-\xi)i\theta_B] \\ M_{BA} &= \frac{1}{1+\xi} [(2-\xi)i\theta_A + (4+\xi)i\theta_B] \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

式中 ξ 称为剪切变形影响系数，

$$\xi = \frac{12EI k}{GA l^2} \quad (b)$$

k 为截面上剪应力不均匀系数。由式(b)可见 ξ 恒为正值。对矩形截面, $k=1.2$,

$$\xi = 1.2 \frac{E}{G} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \quad (c)$$

再分析侧移的作用。图 7-4-2(a) 示杆端相对侧移 Δ 及相应的杆端力。为求杆端弯矩，先设两端为铰，使杆轴顺时针转动 $\beta = \frac{\Delta}{l}$ 至斜直线位置如图(b)，然后在两端施加力偶，使截面 A、B 的法线分别逆时针转动角 β ，从而回到原水平方向。杆端力矩可利用 $\theta_A = \theta_B = -\frac{\Delta}{l}$ 代入式(a)得到：

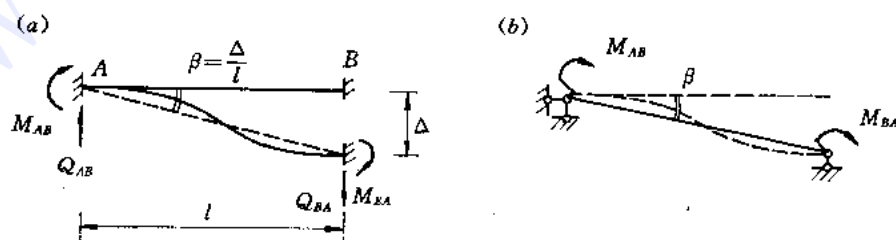


图 7-4-2

$$M_{AB} = M_{BA} = -\frac{6}{1+\xi} i \frac{\Delta}{l}$$

再与式(a)叠加,便得到两端刚结等截面杆考虑剪切变形时的杆件刚度方程如下:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{1}{1+\xi} \left[(4+\xi)i\theta_A + (2-\xi)i\theta_B - 6\frac{i}{l}\Delta \right] \\ M_{BA} &= \frac{1}{1+\xi} \left[(2-\xi)i\theta_A + (4+\xi)i\theta_B - 6\frac{i}{l}\Delta \right] \\ Q_{AB} = Q_{BA} &= \frac{1}{1+\xi} \left(-\frac{6i}{l}\theta_A - \frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l^2}\Delta \right) \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

在上式中令 $M_{BA}=0$, 可得

$$\theta_B = \frac{1}{4+\xi} \left[(-2+\xi)\theta_A + \frac{6}{l}\Delta \right]$$

将其代入式(d)的 M_{AB} 式中, 即得 A 端刚结、B 端铰结等截面杆考虑剪切变形的刚度方程:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \frac{4}{4+\xi} \left(3i\theta_A - 3\frac{i}{l}\Delta \right), \quad M_{BA} = 0 \\ Q_{AB} = Q_{BA} &= \frac{4}{4+\xi} \left(-\frac{3i}{l}\theta_A + \frac{3i}{l^2}\Delta \right) \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

若在式(d)、(e)中取 $\xi=0$, 就得到忽略剪切变形时的刚度方程。

在式(d)中令 $Q_{AB}=Q_{BA}=0$, 可得 $\Delta = \frac{l}{2}(\theta_A + \theta_B)$, 将其代入式(d)的第一、二式, 即得 A 端刚结、B 端滑动约束的等截面杆刚度方程:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= i\theta_A - i\theta_B \\ M_{BA} &= -i\theta_A + i\theta_B \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

因全杆剪力为零, 故上式中没有剪切变形影响。

当考虑剪切变形影响后, 载常数也发生相应变化。表 7-4-1 列出三类不同支承条件的等截面杆在常见荷载作用下的杆端弯矩和剪力。表中第一行两端固定梁的公式是基本公式, 根据此公式和叠加原理, 可得出在集中力系 P_i 和分布荷载 $q(x)$ 作用下(图 7-4-3)的固端弯矩公式为

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= -\sum P_i \frac{a_i(l-a_i)}{l^2(1+\xi)} \left(l-a_i + \frac{\xi l}{2} \right) - \int_{c_1}^{c_2} \frac{q(x)x(l-x)}{l^2(1+\xi)} \left(l-x + \frac{\xi l}{2} \right) dx \\ m_{BA} &= \sum P_i \frac{a_i(l-a_i)}{l^2(1+\xi)} \left(a_i + \frac{\xi l}{2} \right) + \int_{c_1}^{c_2} \frac{q(x)x(l-x)}{l^2(1+\xi)} \left(x + \frac{\xi l}{2} \right) dx \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

式中, a_i 为荷载 P_i 与 A 端的距离, c_1, c_2 分别为 $q(x)$ 分布的起点和终点与 A 端的距离。


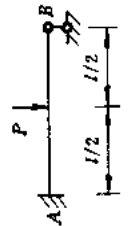
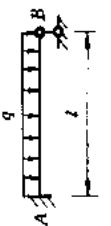
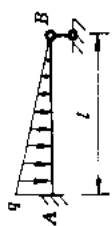
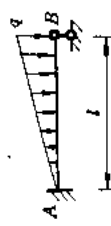
一端固定、他端滑动支承杆的固端力以及温度变化引起的各类杆件的固端力, 都与不计剪切变形时对应的固端力相同, 表中不再列入。产生上述性质的原因, 前者是由于多余未知力(如滑动端弯矩)不引起剪切变形; 后者是因为温度变化不引起杆件剪切变形。

表 7-4-1 中第 2、4 两栏所示对称情形的固端力与不计剪切变形时相同, 因为对称的多余未知力不产生剪切变形。但此时在荷载作用下各截面(跨中截面除外)仍有剪切变形,

表 7-4-1 等截面杆考虑剪切变形时的固端力 $\xi = \frac{12EI_k}{GA^2}$, k 为剪应力不均匀系数

类型	序号	简图	固端弯矩(顺时针方向为正)	固端剪力
两端固定	1		$m_{AB} = -\frac{Pab}{l^2(1+\xi)} \left(b + \frac{\xi l}{2} \right)$ $m_{BA} = +\frac{Pab}{l^2(1+\xi)} \left(a + \frac{\xi l}{2} \right)$	$\bar{Q}_{AB} = +\frac{Pb^2}{l^2(1+\xi)} \left(1 + 2\frac{a}{l} + \xi\frac{l}{b} \right)$ $\bar{Q}_{BA} = -\frac{Pa^2}{l^2(1+\xi)} \left(1 + 2\frac{b}{l} + \xi\frac{l}{a} \right)$
	2		$m_{AB} = -\frac{Pl}{8}$ $m_{BA} = +\frac{Pl}{8}$	$\bar{Q}_{AB} = +\frac{P}{2}$ $\bar{Q}_{BA} = -\frac{P}{2}$
	3		$m_{AB} = -\frac{qa^2}{12(1+\xi)} \left[6\left(1 + \frac{\xi}{2}\right) - 8\left(1 + \frac{\xi}{4}\right)\frac{a}{l} + 3\left(\frac{a}{l}\right)^2 \right]$ $m_{BA} = +\frac{qa^2}{12(1+\xi)} \left[3\xi + 4\left(1 - \frac{\xi}{2}\right)\frac{a}{l} - 3\left(\frac{a}{l}\right)^2 \right]$	$\bar{Q}_{AB} = +\frac{qa}{2(1+\xi)} \left[2 - 2\left(\frac{a}{l}\right)^2 + \left(\frac{a}{l}\right)^3 + \left(2 - \frac{a}{l}\right)\xi \right]$ $\bar{Q}_{BA} = -\frac{qa}{2(1+\xi)} \left[2\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \left(\frac{a}{l}\right)^3 + \frac{a}{l}\xi \right]$
	4		$m_{AB} = -\frac{ql^2}{12}$ $m_{BA} = +\frac{ql^2}{12}$	$\bar{Q}_{AB} = +\frac{ql}{2}$ $\bar{Q}_{BA} = -\frac{ql}{2}$
	5		$m_{AB} = -\frac{ql^2}{1+\xi} \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{24}\xi \right)$ $m_{BA} = +\frac{ql^2}{1+\xi} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{24}\xi \right)$	$\bar{Q}_{AB} = +\frac{ql}{1+\xi} \left(\frac{3}{20} + \frac{1}{6}\xi \right)$ $\bar{Q}_{BA} = -\frac{ql}{1+\xi} \left(\frac{7}{20} + \frac{1}{3}\xi \right)$

续表

类型	序号	简图	固端弯矩(顺时针方向为正)	固端剪力
一端固定他端铰支	6		$m_{AB} = \frac{Pl(l^2 - b^2)}{2l^2 \left(1 + \frac{\xi}{4}\right)}$	$\begin{aligned} \bar{Q}_{AB} &= + \frac{Pb}{2l^3 \left(1 + \frac{\xi}{4}\right)} \left(3l^2 - b^2 + \frac{\xi l^2}{2}\right) \\ \bar{Q}_{BA} &= - \frac{Pa}{2l^3 \left(1 + \frac{\xi}{4}\right)} \left(3la - a^2 + \frac{\xi l^2}{2}\right) \end{aligned}$
	7		$m_{AB} = - \frac{3Pl}{16 \left(1 + \frac{\xi}{4}\right)}$	$\begin{aligned} \bar{Q}_{AB} &= + \frac{11 + 2\xi}{16 \left(1 + \frac{\xi}{4}\right)} P \\ \bar{Q}_{BA} &= - \frac{5 + 2\xi}{16 \left(1 + \frac{\xi}{4}\right)} P \end{aligned}$
	8		$m_{AB} = - \frac{ql^2}{8 \left(1 + \frac{\xi}{4}\right)}$	$\begin{aligned} \bar{Q}_{AB} &= + \frac{5ql}{8} \left(\frac{\xi}{1 + \frac{\xi}{4}} \right) \\ \bar{Q}_{BA} &= - \frac{3ql}{8} \left(\frac{\xi}{1 + \frac{\xi}{4}} \right) \end{aligned}$
	9		$m_{AB} = - \frac{ql^2}{15 \left(1 + \frac{\xi}{4}\right)}$	$\begin{aligned} \bar{Q}_{AB} &= \frac{ql}{1 + \frac{\xi}{4}} \left(\frac{2}{5} + \frac{\xi}{12} \right) \\ \bar{Q}_{BA} &= - \frac{ql}{1 + \frac{\xi}{4}} \left(\frac{1}{10} + \frac{\xi}{24} \right) \end{aligned}$
	10		$m_{AB} = - \frac{7ql^2}{120 \left(1 + \frac{\xi}{4}\right)}$	$\begin{aligned} \bar{Q}_{AB} &= + \frac{ql}{1 + \frac{\xi}{4}} \left(\frac{9}{40} + \frac{\xi}{24} \right) \\ \bar{Q}_{BA} &= - \frac{ql}{1 + \frac{\xi}{4}} \left(\frac{11}{40} - \frac{\xi}{12} \right) \end{aligned}$

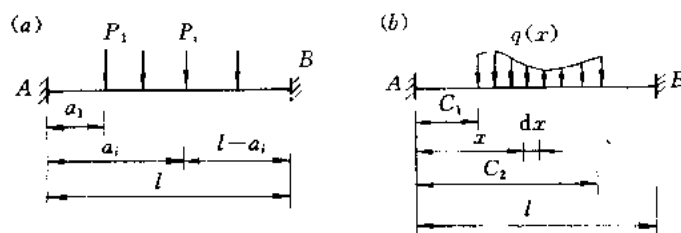


图 7-4-3

因此求位移时仍存在剪切变形的影响。

剪切变形影响系数 ξ 与材料弹性常数比值 $\frac{E}{G}$ 及截面形状(体现在 I/A 比值及 k 值)有关。表 7-4-2 给出几种截面 ξ 的计算公式及 k 值。由此表可看出,随着高跨比的增大,剪切变形的影响迅速增加。

表 7-4-2

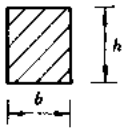
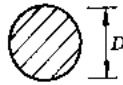
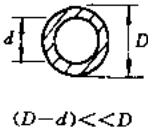
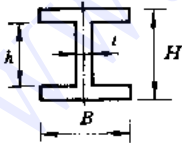
截面形状	ξ 计算公式	系数 k
	$\xi = k \frac{E}{G} \left(\frac{h}{l} \right)^2$	$\frac{6}{5}$
	$\xi = \frac{3}{4} k \frac{E}{G} \left(\frac{D}{l} \right)^2$	$\frac{10}{9}$
	$\xi = \frac{3}{4} k \frac{E}{G} \left(1 - \frac{d^2}{D^2} \right) \left(\frac{D}{l} \right)^2$	2
	$\xi = k \frac{E}{G} \left[\frac{1 + \frac{B-t}{t} \left(1 - \frac{h^3}{H^3} \right)}{1 + \frac{B-t}{t} \left(1 - \frac{h}{H} \right)} \right] \left(\frac{H}{l} \right)^2$	$\frac{A}{A_1}$ (截面面积 / 腹板面积)

图 7-4-4 示一矩形截面的两端固定杆,当发生杆端相对侧移 $\Delta=1$ 时,求其侧移刚度 J 。引用式(d)的剪力公式,令 $\theta_A = \theta_B = 0, \Delta=1$,得

$$J = \frac{1}{1 + \xi} \frac{12EI}{l^3}$$

不计剪切变形时的侧移刚度

$$J_0 = \frac{12EI}{l^3}$$

可见 $J < J_0$ (其力学意义请读者自己分析), 两者的相对误差为

$$\epsilon_J = \frac{J_0 - J}{J} = \xi = \frac{12EI k}{GA \cdot l^2}$$

取 $E/G=2.5, k=1.2$, 则 $\xi = 3 \left(\frac{h}{l} \right)^2$ 。当杆细长时 $\left(h/l \leq \frac{1}{8} \right)$, 不计剪切变形引起的误差在 5% 以下。高跨比增大, 误差随之增大, 见表 7-4-3。高跨比超过 1/3 是深梁问题, 须用弹性力学方法求解。

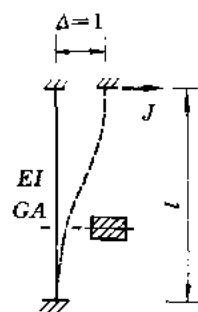


图 7-4-4

在本例中, 不计剪切变形时的杆端弯矩误差与侧移刚度误差相同 [见式 (d)]。

若使两端刚结杆仅发生转角 $\theta_A = 1$, 则计算其转动刚度 S (即 M_{AB}) 时, 不计剪切变形引起的误差为

$$\epsilon_S = \frac{3\xi}{4(1+\xi)}$$

比侧移刚度误差 ϵ_s 略小些。

表 7-4-3

高跨比 $\frac{h}{l}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\epsilon_J = \xi$	0.021	0.030	0.047	0.120	0.188	0.333
$\epsilon_S = \frac{3\xi}{4(1+\xi)}$	0.015	0.020	0.034	0.080	0.118	0.188

由式 (e) 可知, 计算一端刚结他端铰结杆的侧移刚度和转动刚度时, 不计剪切变形引起的误差均为 $\frac{\xi}{4}$, 比两端刚结杆小了很多。可见, 当高跨比相同时, 超静定次数越高, 剪切变形对内力的影响就越大。剪切变形对静定结构的内力无影响, 只对其位移有影响。

例 现举一刚架计算例题。图 7-4-5(a) 所示刚架, 杆件为矩形截面, $E=2.5G$ 。试讨论剪切变形对内力和柱顶位移的影响。

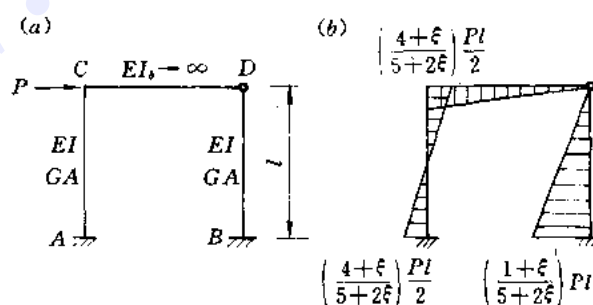


图 7-4-5

解 单柱侧移刚度

$$AC \text{ 柱: } J_1 = \frac{1}{1+\xi} \frac{12EI}{l^3}$$

$$BD \text{ 柱: } J_2 = \frac{4}{4+\xi} \frac{3EI}{l^3}$$

$$\text{总侧移刚度 } J = J_1 + J_2 = \frac{5+2\xi}{(1+\xi)(4+\xi)} \frac{12EI}{l^3}$$

$$\text{剪力分配系数}$$

$$AC \text{ 柱: } \mu_1 = \frac{J_1}{J} = \frac{4+\xi}{5+2\xi}$$

$$BD \text{ 柱: } \mu_2 = \frac{J_2}{J} = \frac{1+\xi}{5+2\xi}$$

两柱剪力分别为

$$Q_1 = \frac{4+\xi}{5+2\xi} P, \quad Q_2 = \frac{1+\xi}{5+2\xi} P$$

弯矩图如图(b)。高跨比对内力分布(以 μ_1, μ_2 的变化表示)的影响见表7-4-4。由于考虑剪切变形后左柱侧移刚度减小量比右柱要多,因而左柱内力相对减小而右柱内力增大,其变化幅度随高跨比的增加而增大。

表 7-4-4

$\frac{h}{l}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	不计剪切变形
ξ	0.021	0.030	0.047	0.120	0.188	0.333	0
μ_1	0.797	0.796	0.795	0.786	0.779	0.764	0.800
μ_2	0.203	0.204	0.205	0.214	0.221	0.236	0.200
α_1	1.021	1.030	1.047	1.120	1.188	1.333	1.000
α_2	1.005	1.008	1.012	1.030	1.047	1.083	1.000
α	1.018	1.025	1.039	1.101	1.157	1.274	1.000

现在分析剪切变形对位移的影响。单柱柱顶侧移柔度:

$$AC \text{ 柱 } \delta_1 = \frac{1}{J_1} = (1+\xi) \frac{l^3}{12EI} = \alpha_1 \delta_{01}$$

$$BD \text{ 柱 } \delta_2 = \frac{1}{J_2} = \frac{4+\xi}{4} \frac{l^3}{3EI} = \alpha_2 \delta_{02}$$

δ_{01}, δ_{02} 为不计剪切变形时的单柱柔度, α_1, α_2 为单柱位移增大系数。由表7-4-4中所列本例的 α_1, α_2 值可见杆件的侧移刚度越大,其剪切变形对位移的影响越大。刚架顶端的侧移柔度为

$$\delta = \frac{1}{J} = \frac{(1+\xi)(4+\xi)}{5+2\xi} \frac{l^3}{12EI}$$

不计剪切变形时,侧移柔度为

$$\delta_0 = \frac{l^3}{15EI}$$

则刚架顶端水平位移增大系数为

$$\alpha = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{5(1 + \xi)(4 + \xi)}{4(5 + 2\xi)}$$

α 值随高跨比增加而增大,见表 7-4-4。

若在本例中对刚架分别作如下变动:(1)结点 D 变为刚结点成为对称刚架;(2)结点 C 变为铰结成为对称排架,则 $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$,且与高跨比无关。这两种情况中两柱受剪切变形的影响相同,因而其内力与不计剪切变形时相同。但位移仍因剪切变形的影响而增大。刚架顶端侧移增大系数对前者为 α_1 ,后者为 α_2 。

7-5 荷载作用下超静定梁和刚架的变形图怎样绘制?

变形图的绘制必须同时满足下面三点要求:

1. 线性变形体系的弯矩与曲率关系为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (a)$$

任一杆段的弯矩竖标在某一侧,则该段变形后必向该侧凸出,而弯矩零点就是变形曲线拐点:

2. 结点处满足变形连续条件;
3. 支座处满足边界约束条件。

为了正确地绘出变形图,有时还需用单位荷载法判定某些特殊截面的转角或线位移方向。下面分别讨论梁和刚架变形图的绘制。

图 7-5-1(a) 示单跨超静定梁作用力偶荷载,弯矩图示于图(b),各杆段弯曲形状如虚线所示。根据 C 、 D 、 E 点的变形应连续及支座 A 、 B 处杆端无位移,画出变形图如图(c)。 C 、 D 、 E 均为反弯点, C 及 E 邻近两侧截面曲率为零,而 D 点邻近两侧截面曲率不为零。虽然 D 截面弯矩有突变,但仍有反弯点,变形曲线在 D 点仍应连续(挠度与转角均为单值)。图 7-5-2(a) 示连续梁在均布荷载作用下弯矩图的轮廓。根据反弯点位置、各段弯曲方向及约束条件,不难画出变形曲线形状如图(b) (杆上黑点表示反弯点)。各中间支座处挠度为零,但截面转角不一定为零。

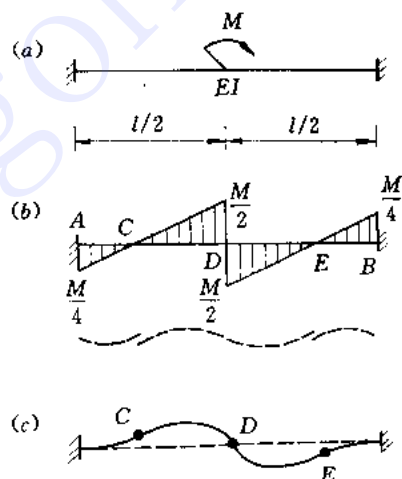


图 7-5-1

若在杆件中出现铰或滑动约束时,在约束处的变形连续条件自有其特点。铰两侧截面的线位移应为单值而转角一般不等;滑动约束两侧截面转角应为单值而线位移一般不等。图 7-5-3(a) 示一梁的弯矩图,图(b) 示其变形图,其中铰 C 两侧截面转角不同而挠度相同。图 7-5-4(a) 示另一梁弯矩图,其变形示于图(b)。由于各截面曲率均为负值且 A 端无转角,滑动约束左侧截面 C_1 必上移且有逆时针转角($\theta_{C_1} = \int_A^{C_1} \kappa ds$),其右侧截面 C_2 必在 C_1 下

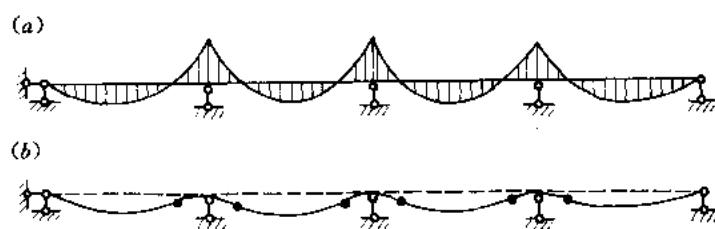


图 7-5-2

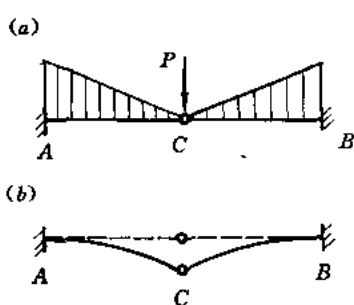


图 7-5-3

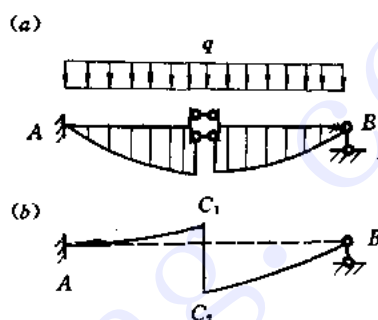


图 7-5-4

方以保持截面 C_1 与 C_2 平行,即转角相同而挠度不同。读者可分别在 C_1 和 C_2 加竖向单位力判定 C_1 和 C_2 的挠度正负号,并可知此时两点挠度绝对值以 C_2 为大。

刚架变形图分无侧移与有侧移两种情况。无侧移刚架变形图的绘制原则和方法与梁基本相同;有侧移刚架在满足弯矩-曲率关系及约束条件的同时,还应判断结点线位移的方向,以利于正确画出变形图。结点转角方向及线位移方向均可用单位荷载法迅速判定(单位荷载加在力法基本结构上)。

图 7-5-5(a) 示一无侧移刚架及其弯矩图轮廓,图 (b) 表示刚架的变形(黑点表示反弯点)。因只有 AB 杆上有集中力作用,结点 A 必有顺时针转角而结点 B 有逆时针转角。在

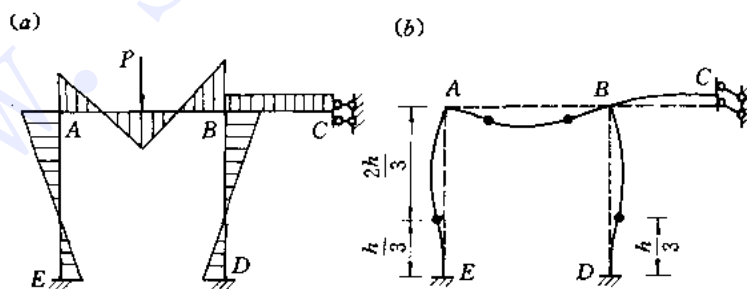


图 7-5-5

荷载复杂的情况下,可将单位力偶 $m=1$ 分别作用于不同的基本结构(悬臂柱 EA 的 A 端及悬臂柱 DB 的 B 端),不难判定结点 A、B 的转角方向。杆 BC 无反弯点,截面 C 又无转角,因此 C 端只能上移。C 端线位移方向也可用单位力加于基本结构(A、B、D、E 均变为

铰)来确定。

图 7-5-6(a)示一有侧移刚架在水平荷载作用下的弯矩图,图(b)示其变形图。容易判定结点线位移向右。同一刚架若仅作用竖向荷载如图 7-5-7(a)所示,其结点线位移方向不易直接看出,它与各杆线刚度比值、荷载分布及支承性质均有关,需用单位荷载法判定。在

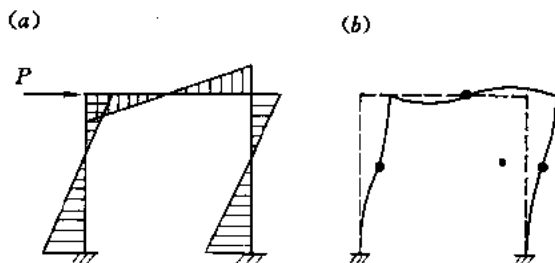


图 7-5-6

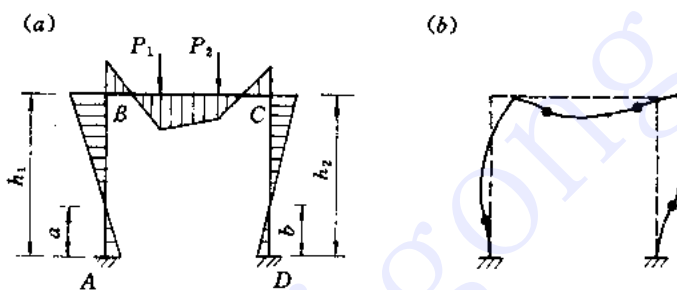


图 7-5-7

图示情形下,柱顶端弯矩 M_{BA} 为正值, M_{CD} 为负值,若能满足条件

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} &> \frac{1}{2} M_{AB} \\ a &< \frac{1}{3} h_1 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

即反弯点高度

$$\left. \begin{aligned} |M_{CD}| &< \frac{1}{2} |M_{DC}| \\ b &> \frac{h_2}{3} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

即反弯点高度

则结点线位移必向右。若式(b)、(c)中不等式均反号,则结点线位移必向左。若 $a = \frac{h_1}{3}$ 或 $b = \frac{h_2}{3}$, 则结点无线位移。式(b)、(c)称侧移方向判别式,对于水平荷载作用(图 7-5-6)情形同样适用。式中 a, b 取值范围包括 $a \leq 0, b \geq h_2$ (位移向右); 或 $a \geq h_1, b \leq 0$ (位移向左)。

对于结点转角(即柱顶转角)方向,可由下述关系式判定。当柱上端弯矩 M_{\uparrow} 与下端弯矩 M_{\downarrow} 均为正值时,若

$$M_{\perp} > M_{\parallel} \quad \left\{ \text{反弯点高度 } a < \frac{h_1}{2} \right\} \quad (d)$$

则柱顶转角为顺时针方向，反之为逆时针方向。当 M_{\perp} 与 M_{\parallel} 均为负值时，若

$$|M_{\perp}| > |M_{\parallel}| \quad \left\{ \text{反弯点高度 } b < \frac{h_2}{2} \right\} \quad (e)$$

则柱顶转角为逆时针方向，反之为顺时针方向。式(d)、(e)称结点转角判别式，可由单位荷载法验证。

判别式(b)、(c)、(d)、(e)可推广应用到单层多跨(包括有斜柱的)有侧移刚架在任意荷载作用下的结点位移方向的判定，以及多层多跨刚架在任意荷载作用下的层间相对侧移与结点相对转角(均指上层相对下层)方向的判定。条件是同层各柱至少有一下端无铰的等截面柱的弯矩图为直线。若同层各柱上均有荷载作用，或柱为变截面杆，则需直接应用单位荷载法。

当同层各柱中至少有一柱的弯矩图无反弯点时，则无论何种刚架、何种荷载、无论该柱弯矩图是何种曲线，结点转角和线位移方向更易判定。若该柱弯矩竖标全部位于左侧时，柱顶截面转角与柱轴线弦转角(相对下层而言)均为顺时针方向；若弯矩竖标全部在柱右侧时，上述转角均为逆时针方向。

图 7-5-8(a)示一刚架的弯矩图。变截面柱 CF 下端固定各截面均为右侧受拉，因此结

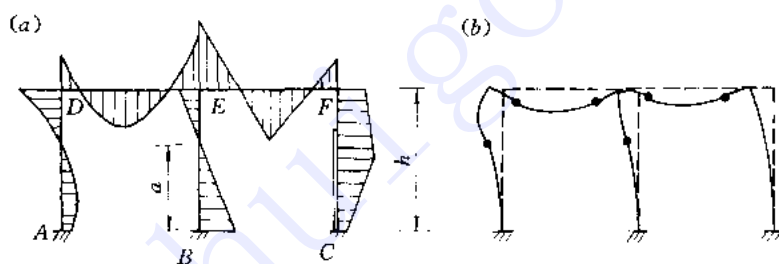


图 7-5-8

点 F 向左侧移并有逆时针转角；等截面柱 BE 弯矩为直线且 $a > \frac{h}{2}$ ，可判定结点 E 逆时针转动且向左侧移；柱 AD 左侧的弯矩图面积比右侧大，可知结点 D 顺时针转动。变形图如图(b)所示。

7.6 当支座位移时，超静定梁和刚架的变形图怎样绘制？

超静定梁或刚架在支座发生位移时，其变形图的绘制除考虑 7-5 所提出的三点要求外，还需满足发生给定位移的支座处的约束条件。在判定结点转角和线位移方向时，要同时考虑弯曲变形和支座位移的影响，广义位移的计算公式为

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{M}M}{EI} ds - \sum \overline{R}C \quad (a)$$

式中， M 为原结构在支座位移时的弯矩， \overline{M} 、 \overline{R} 为单位力加于基本结构时的弯矩和支座反

力。

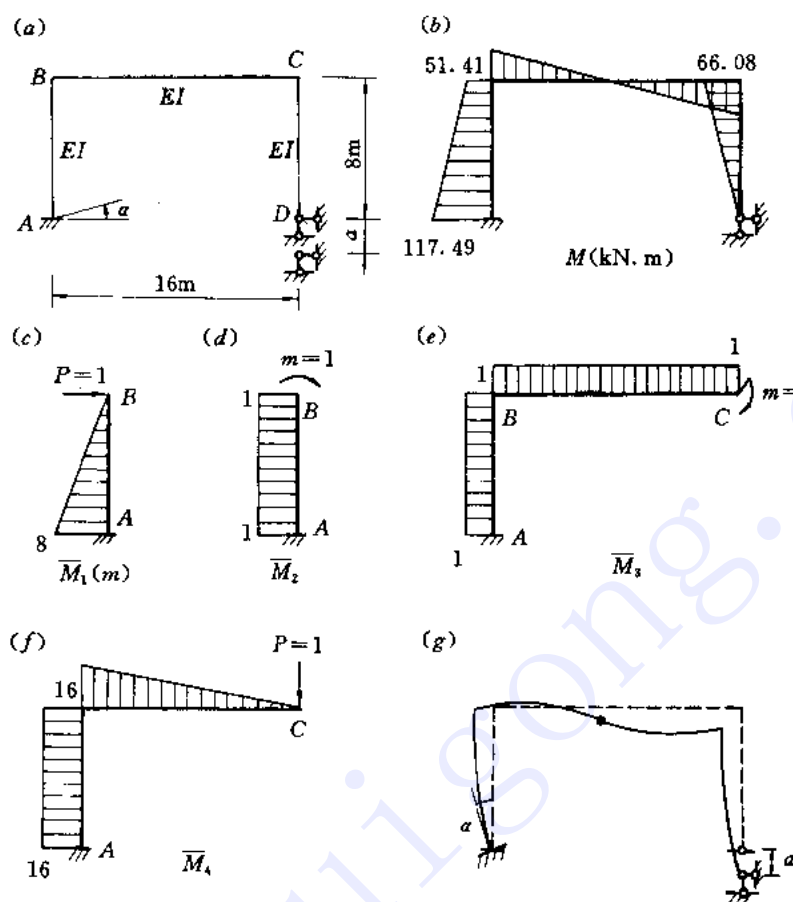


图 7-6-1

例 图 7-6-1(a) 示一刚架发生支座位移, $a=0.01\text{m}$, $\alpha=0.02$ 弧度, $EI=3.75 \times 10^4 \text{kN} \cdot \text{m}^2$ 。图(b)为刚架弯矩图。试绘刚架变形图。

解 先判定结点 B 、 C 的线位移和转角方向。为此, 分别在不同的基本结构上施加广义单位力如图(c)、(d)、(e)、(f)所示。结点 B 的水平位移:

$$\Delta_{BH} = \sum \int \frac{\overline{MM}}{EI} ds - \sum \overline{RC} = \frac{3054.83}{EI} - 8 \times 0.02 = -0.0785\text{m}$$

方向向左。同理可算得 θ_B 、 θ_C 均为负值, 即为逆时针转向。结点 C 竖向位移应与支座 D 的下沉量相同, 也可由公式算得:

$$\Delta_{CV} = \sum \int \frac{\overline{M_4 M}}{EI} ds - \sum \overline{RC} = 0.01\text{m}$$

刚架变形图如图(g)所示。

7-7 温度变化时, 超静定梁和刚架的变形图如何绘制?

当温度变化时结构变形图的绘制, 不能仅依据内力的分布状况, 而必须考虑温度变化

的影响。因为超静定梁和刚架的应变与位移是由内力和温度变化共同产生的。此时正应变和曲率不再与应力保持线性关系，而剪应变仍与剪应力成正比（因温度变化不产生剪应变）。应变计算公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{EA} + \alpha t_0 \\ \kappa &= \frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta t}{h} \\ \gamma_0 &= \frac{kQ}{GA} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

式中， N 、 M 、 Q 为超静定内力。

在温度变化因素作用下计算位移时，一般应考虑轴向变形而忽略剪切变形。位移公式为

$$\Delta = \sum \int \frac{\overline{MM}}{EI} ds + \sum \int \frac{\overline{NN}}{EA} ds + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \overline{M} ds + \sum \alpha t_0 \int \overline{N} ds \quad (c)$$

静定结构在温度变化时不产生内力，因而式(b)变为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \alpha t_0 \\ \kappa &= \frac{\alpha \Delta t}{h} \\ \gamma_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

同样说明应变 ε 、 κ 与应力为非线性关系。此时位移公式(c)只保留第三、四两项。

图 7-7-1(a) 示一等截面静定梁，设温度升高 $t_1 > t_2$ ，则轴线温度变化 $t_0 > 0$ ，它只产生

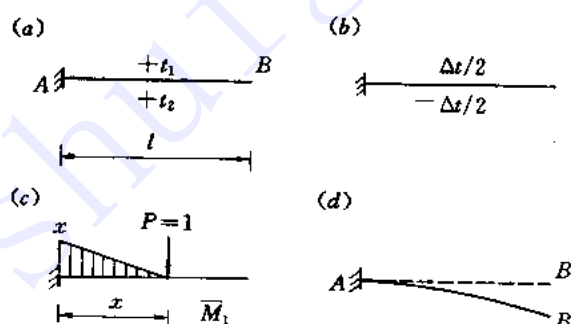


图 7-7-1

线应变 $\varepsilon = \alpha t_0$ 。当杆两侧只有温度变化差 $\Delta t = t_1 - t_2$ 而轴线温度不变如图(b)，杆件只有弯曲变形。求任意截面挠度时，单位荷载下的 \overline{M}_1 图如图(c)，可得

$$y(x) = \frac{\alpha \Delta t}{h} \int_0^l \overline{M}_1 ds = \frac{\alpha \Delta t}{2h} x^2$$

任意截面转角为

$$\theta(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha \Delta t}{h} x$$

曲率为

$$\kappa(x) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\alpha\Delta t}{h}$$

曲率沿杆长不变,由此可画变形图如图(d)。AB'为二次抛物线,轴线长度大于原长。

图 7-7-2 示矩形截面超静定梁及两侧温度的变化。将温度变化分解为两部分:第一部

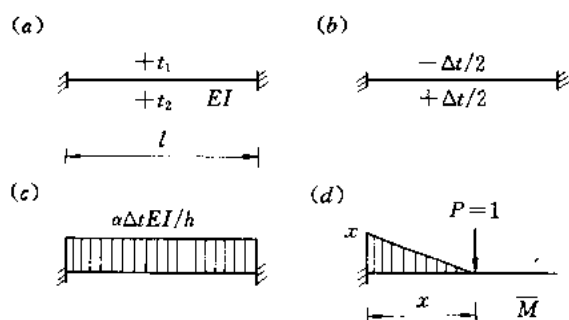


图 7-7-2

分仅有轴线温度变化 t_0 , 此时梁中只有轴力 N ($t_0 > 0$ 时 N 为压力, $t_0 < 0$ 时 N 为拉力) 而弯矩为零; 第二部分仅有两侧温度变化差而轴线无温变如图(b), 此时轴力为零, 弯矩如图(c)所示。单位力加于基本结构得 \bar{M} 图如图(c), 可求出任意截面挠度

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \frac{\bar{M}M}{EI} ds + \frac{\alpha\Delta t}{h} \int \bar{M} ds \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \frac{\alpha\Delta t}{h} EI - \frac{\alpha\Delta t}{h} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

结果表明各截面挠度均等于零, 因而转角和曲率也处处为零, 杆轴无任何变形。由此也可见弯矩和曲率不是线性关系。

再看一类例子。设具有至少两个正交对称轴的等截面闭合无铰刚架。当其内侧和外侧温度均匀变化时, 无论闭合刚架的几何形状怎样, 各杆都只有轴向变形而无弯曲变形, 但各截面都有等值的弯矩。如图 7-7-3(a) 示一矩形闭合框, 各杆 $EI = \text{常数}$, 矩形截面高 h 。内侧温度升高 t , 外侧温度不变^①。用弹性中心法求出弯矩图如图(b)所示, 各截面弯矩为常数, 轴力为零。任意截面处的曲率为

$$\kappa = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha\Delta t}{h} = \frac{at}{h} - \frac{at}{h} = 0$$

第二项用负号是因温差引起的弯曲方向与弯矩引起的弯曲方向相反。轴向应变为

$$\epsilon = \frac{N}{EA} + \alpha t_0 = \frac{1}{2} \alpha t$$

因此闭合框无弯曲变形, 只有杆轴伸长(或缩短, 当 t 为负值时), 各杆伸长量为

$$\Delta_i = \frac{1}{2} \alpha t l_i \quad (i = 1, 2)$$

变形图如图(c)虚线所示。

^① 当外侧温度也改变时, 总可分解出只有内侧温度改变的状态, 另一部分则只有轴线温度均匀变化, 它们只产生各杆轴向自由变形而内力为零。

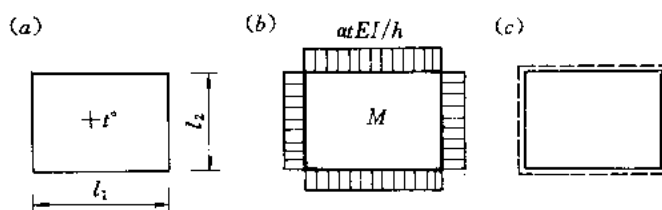


图 7-7-3

图 7-7-4(a)、(b)、(c)分别示正八边形、圆环形和由曲杆与直杆组成的具有两个正交

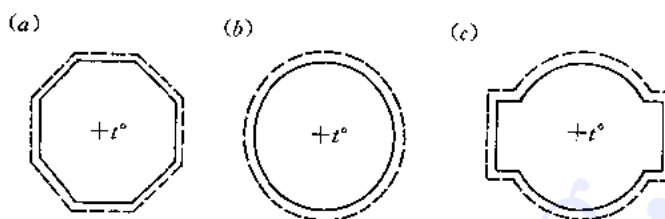


图 7-7-4

对称轴的等截面闭合框,内侧温度均升高 t° ,则它们各截面弯矩均为常数 $M = \frac{\alpha t}{h} EI$ (外侧受拉),轴力为零。各杆只有轴向变形而无弯曲变形,各杆按杆长比例伸长,伸长量为

$$\Delta_i = \frac{1}{2} \alpha t l_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

图(b)所示圆环总伸长量

$$\Delta = \frac{1}{2} \alpha t l = \pi R \alpha t$$

式中 l 为周长, R 为半径。变形图分别如虚线所示。各杆发生自由的轴向变形,各杆在结点处不存在轴向约束但有转动约束。若内侧温度降低,则各杆按比例缩短。

下面讨论刚架的一般情形。图 7-7-5(a)示一等截面刚架,矩形截面高度 $h = \frac{l}{10}$,在给定的温度变化($t_0 = \frac{t}{2}, \Delta t = t$)作用下求出 M, N, Q 图如图(b)、(c)、(d)。由于柱中有剪力引起的剪切变形可忽略不计,只须根据弯曲变形和轴向变形来绘制变形图。先计算柱中任意截面的挠度、转角和曲率。在 x_1 处加单位力于基本结构得 \bar{M}_1 图如图(e)。挠曲线方程为

$$\begin{aligned} y_1(x_1) &= \int_0^{x_1} \frac{\bar{M}_1 M}{EI} ds + \frac{\alpha \Delta t}{h} \int_0^{x_1} \bar{M}_1 ds \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{x_1^2}{2} \right) \left[\frac{2}{3} \times 9.4 + \frac{1}{3} \left(9.4 + 0.9 \frac{x_1}{l} \right) \right] \frac{\alpha \Delta t EI}{l} - \frac{\alpha t}{h} \left(\frac{x_1^2}{2} \right) \\ &= \frac{\alpha t}{l} \left(\frac{0.15}{l} x_1^3 - 0.3 x_1^2 \right) = \frac{3 \alpha t}{20 l^2} (x_1^3 - 2 l x_1^2) \end{aligned}$$

截面转角方程为

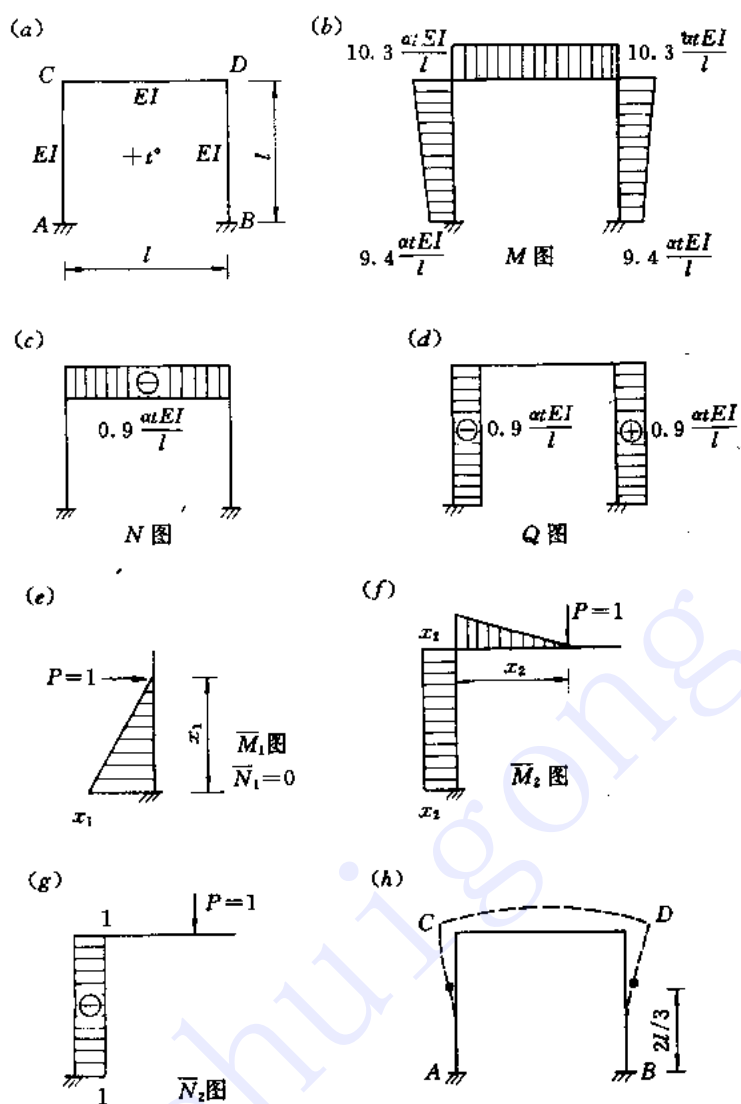


图 7-7-5

$$\theta_1(x_1) = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{3\alpha t}{20l^2}(3x_1^2 - 4lx_1)$$

曲率为

$$\kappa_1(x_1) = \frac{d\theta_1}{dx_1} = \frac{3\alpha t}{10l^2}(3x_1 - 2l)$$

在全柱范围($0 \leq x_1 \leq l$)内 $y_1(x_1)$ 与 $\theta_1(x_1)$ 均为负值; 当 $x_1 = \frac{2}{3}l$ 时, $\kappa_1 = 0$, 为一拐点, 其上部曲率为正, 下部为负。再计算梁的挠度、转角和曲率。在 x_2 处加竖向单位力于另一基本结构得 \bar{M}_2 、 \bar{N}_2 图如图(f)、(g)。挠曲线方程为

$$y_2(x_2) = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_2 N}{EA} ds + \alpha t_0 \int \bar{N}_2 ds + \frac{\alpha \Delta t}{h} \int \bar{M}_2 ds$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{EI} \left[\frac{x_2^2}{2} \times 10.3 + \frac{1}{2} (10.3 + 9.4) l x_2 \right] \frac{\alpha t EI}{l} + 0 + \frac{\alpha t}{2} (-1 \times l) \\ &\quad - \frac{10\alpha t}{l} \left(\frac{x_2^2}{2} + l x_2 \right) \\ &= \frac{\alpha t}{20l} (3x_2^2 - 3lx_2 - 10l^2) \end{aligned}$$

截面转角方程为

$$\theta_2(x_2) = \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{\alpha t}{20l} (6x_2 - 3l)$$

曲率

$$\kappa_2(x_2) = \frac{d\theta_2}{dx_2} = \frac{3\alpha t}{10l}$$

在全梁范围 ($0 \leq x_2 \leq l$) 内 $y_2(x_2)$ 均为负值，曲率为常数；而在跨中 $x_2 = \frac{l}{2}$ 处转角为零，左半跨转角为正，右半跨为负。刚架变形图如图(h)所示。检查结点处的变形连续条件：当 $x_1 = l, \theta_1 = -\frac{3}{20}\alpha t$ ；当 $x_2 = 0, \theta_2 = -\frac{3}{20}\alpha t$ ，故在结点处杆端角位移相同。可以验证结点处各杆端线位移分量也是相同的。

第八章 影响线及其应用

8-1 如何绘制移动的单位力偶作用下静定结构内力的影响线？

有两种基本方法，静力法和机动法。静力法是以单位移动力偶 $m=1$ 的作用位置为自变量 x ，利用静力平衡条件分段写出某量 Z 与 x 之间关系，由此绘出 Z 的影响线。

用机动法求 $m=1$ 作用下的静定多跨梁的内力影响线，也是根据刚体虚位移原理，其步骤为：

1. 撤去与 Z 相应的约束，代以约束力 Z (设其正向)，成为一个自由度体系；
2. 给体系以刚体运动的虚位移，使沿 Z 的正方向产生单位位移 $\delta_z=1$ ，形成虚位移图及荷载行走线的 δ_P 图；
3. 根据刚体系虚位移原理得 $\bar{Z}(x) = -\delta_P(x)$ ，由 δ_P 图画影响线。

此处所指 δ_P 是与广义单位力相应的虚位移。与竖向单位力 $P=1$ 相应的 δ_P 图指荷载行走线的竖向虚位移图，与单位移动力偶 $m=1$ 相应的 δ_P 图指力偶行走线的角位移图。

图 8-1-1(a) 示单位力偶 $m=1$ 在梁上移动，求反力 R_B 的影响线。先撤去支杆 B ，代以正向 R_B ；给体系以虚位移且使 $\delta_B=1$ ，形成虚位移图如图(b)所示。力偶行走线的角位移

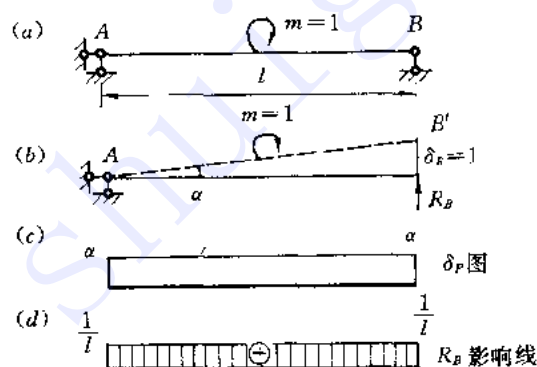


图 8-1-1

(即虚位移图的斜率)在各点均为 α ，得 δ_P 图如图(c)所示。由刚体系虚功原理，有

$$R_B \cdot \delta_B - m \cdot \alpha = 0$$

$$R_B = \alpha = \frac{1}{l}$$

R_B 影响线如图(d)所示。

将虚功方程写成一般形式：

$$\bar{Z}(x) \cdot \delta_z - m \cdot \alpha(x) = 0$$

则影响函数
$$\bar{Z}(x) = \frac{m}{\delta_1} \alpha(x) = \alpha(x)$$

式中, $m=1$ 以顺时针为正, 转角 α 以逆时针为正。

由上可见, 单位移动力偶作用下某量的影响线也就等于单位竖向移动荷载下该量影响线的斜率。这一结论对于静定多跨梁也普遍适用。因此, 静定多跨梁(撤去一个约束后)各杆段在虚位移图中的转角就是该杆段的影响函数, 其图形即 δ_F 图。

例 求图 8-1-2(a)所示静定多跨梁的 M_G 和 Q_G 影响线。

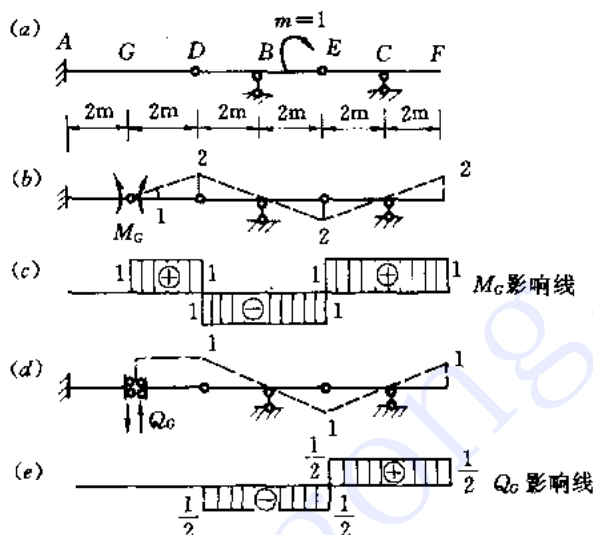


图 8-1-2

解 求 M_G 影响线。在 G 处加铰, 代以 M_G , 沿 M_G 正方向给单位虚位移, 形成虚位移图如图(b)所示, 由虚位移图的斜率确定 δ_F 图即各杆段 M_G 的影响系数, 如图(c)所示, 图(c)即为 M_G 的影响线。

按同样方法作出求 Q_G 影响线的虚位移图, 如图(d)所示, 图(e)为 Q_G 影响线。

从图 8-1-1(c)和图 8-1-2(c)、(e)看出, 这里的影响线有一个特点, 即在各段内影响系数为常数。这个特点对静定结构在移动的单位力偶下的内力影响线是普遍存在的。这是因为力偶在一个几何不变体(看成刚片)内任意移动是不会改变该体系静定的外部约束力, 而静定结构正是由这种体系所组成。

8-2 如何用机动法求静定刚架内力的影响线?

用机动法作任何静定结构内力影响线的原理是相同的, 其步骤为:

1. 撤去与欲求影响线的内力相应的约束, 形成具有一个自由度的体系;
2. 沿该内力正方向给单位虚位移, 使体系各部分作符合约束条件的刚体微运动, 得虚位移图;
3. 与广义单位力相应的荷载行走线的虚位移 δ_F 图, 就是影响线的轮廓。再由虚功方

程和运动分析求出竖标值并确定正负号。

下面先举例分析，然后作进一步说明。

例 用机动法求图 8-2-1(a)所示的静定多跨刚架的 Y_B 、 M_F 、 Q_{GD} 的影响线。

解 因为荷载 $P=1$ 只是在横梁 FH 上移动，因此用机动法作影响线就要确定体系作刚体微运动时横梁 FH 的虚位移图形。

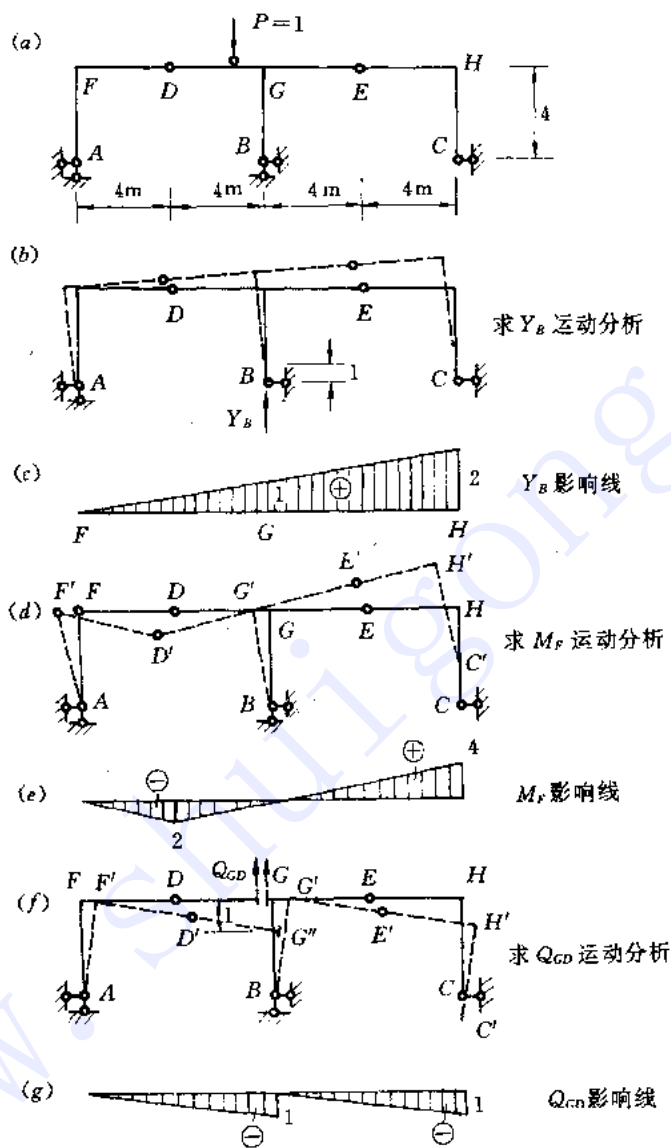


图 8-2-1

先求 B 点竖向反力 Y_B 的影响线。为此，撤去 B 点竖向支杆，代以 Y_B (设向上为正)。为得到沿 Y_B 方向产生单位虚位移时横梁的虚位移 δ_P 图，需对体系作运动分析。如图 (b) 所示，刚片 AD 转动中心为 A 点，刚片 BDE 和 CE 的瞬心也在 A 点 (因 D 点运动方向垂直于 AD ， B 点运动方向垂直于 AB ，故刚片的瞬心在 A 点；又因 C 点运动方向垂直于 AC ， E 点运动方向垂直于 AE ，故刚片 CE 的瞬心也在 A 点)。这样，当体系作微运动后， F

点的竖向位移为零，而横梁 FH 上各点竖向虚位移正比于离 A 点的水平距离。图(c)示出使 G 点竖向位移为 1(与 B 点竖向位移相同)时横梁 FH 上各点竖向虚位移的图形(即 δ_P 图)。由虚功方程，有(设 δ_P 向上为正)

$$Y_B \cdot 1 - P\delta_P = 0$$

$$Y_B = \delta_P$$

故图(c)即为 Y_B 影响线。

图(d)示求 M_F 影响线的运动分析。撤去 M_F 约束(F 处加铰)，代以 M_F (设内侧受拉为正)。为得到沿 M_F 方向产生单位虚位移时横梁 FH 的虚位移 δ_P 图，对体系作运动分析。由图(d)看出，刚片 AF 绕 A 转动，刚片 BDE 绕 B 点转动，刚片 CE 的瞬心也在 B 点。因为是虚位移(微小运动)，有 $\overline{F'G'} = \overline{FG}$ ， $GC' = FF'$ 则 $\angle G'BG = \angle D'G'D = \beta$ ，因 $D''D'$ 是共同的，故 $\alpha = \beta$ ；同理 $G'H'$ 的水平投影等于 \overline{GH} ， $H'H'' = GG''$ ，则 $\angle H'C'H = \angle E'G'E = \beta$ ， G' 、 E' 、 H' 在一条线上。由于 $\alpha + \beta = 1$ ，则 $\beta = \frac{1}{2}$ 。因此 D 点竖向位移为 $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ ， H 点竖向位移为 $\frac{1}{2} \times 8 = 4$ 。这样， M_F 的影响线则如图(e)所示。

图(f)示求 Q_{GD} 影响线的运动分析。撤去 Q_{GD} 约束，代以 Q_{GD} ，为得到沿 Q_{GD} 方向产生单位位移时横梁的虚位移 δ_P 图，对体系作运动分析。由图(f)看出，刚片 AD 绕 A 点转动，刚片 BGE 绕 B 点转动，而刚片 CE 的瞬心仍在 B 点。另有 $\overline{D'G''} // \overline{G'E'}$ (滑动约束的特点)。因为是虚位移，有 F 、 G 、 H 三点水平位移相等， $\angle FAF' = \angle GBG' = \angle HCH'$ 。又因 $\angle AF'D' = \angle D'G'G' = \angle C'H'E' = 90^\circ$ ，所以 F' 、 D' 、 G'' 和 G' 、 E' 、 H' 分别在一条直线上。

由于 GG'' 的竖向投影为 1，则 HH' 的竖向投影也是 1。这样 Q_{GD} 的影响线如图(g)所示。

用机动法求各种类型静定结构约束力影响线的基本原理和步骤同上例一样。困难在于运动分析(定性)和虚位移计算(定量)，有关它们内容详见 1-13 和 3-1。利用机动法原理可得出下面的结论：静定结构约束力的影响线总是由直线段组成的折线，折点位于铰结点和欲求截面处，由静力法可求出各折点处的影响系数。

8-3 机动法绘制间接荷载作用下的影响线应注意什么？

要特别注意单位移动荷载作用点虚位移图的正确绘制。机动法求影响线时，影响函数为

$$\bar{Z}(x) = -\delta_P(x) \quad (\text{当 } \delta_x = 1)$$

δ_P 是单位荷载作用点虚位移。当单位荷载是作用于短梁的间接荷载时， δ_P 就是短梁(而不是主梁)的虚位移。绘制虚位移图时，先画出主梁虚位移图(求主梁某量影响线)，再根据位移协调条件画出短梁虚位移即 δ_P 图。初学者容易将主梁位移图当作影响线形状，以致出错。在求结点处主梁截面剪力影响线时，要注意结点左侧和右侧截面的剪力不同，故需分别求出两侧截面剪力影响线，并注意短梁虚位移图的画法。下面举例说明。

例 求图 8-3-1(a)所示主梁中 M_K 、 Q_C 的影响线。

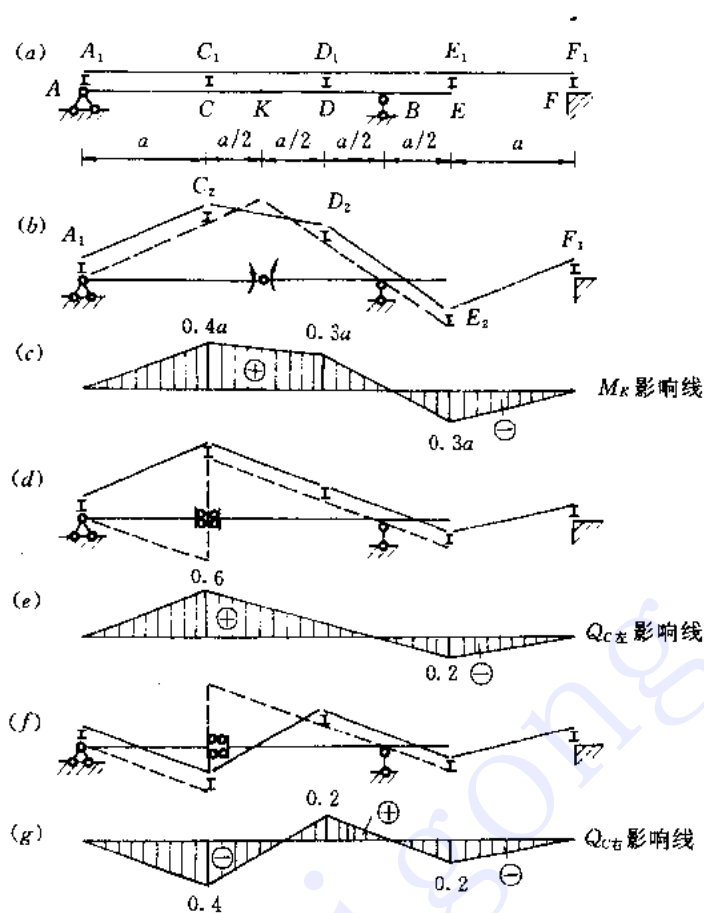


图 8-3-1

解 1. 求 M_K 影响线。在截面 K 加铰，代以 M_K ，主梁虚位移如图(b)中虚线所示(只在 AE 范围)。此时短梁端点 C_1 随主梁上移至 C_2 ， D_1 移至 D_2 ， E_1 下移至 E_2 ， A_1 与 F_1 不动。用实线画出短梁虚位移图。由比例关系确定竖标，画出 M_K 影响线如图(c)。

2. 求 $Q_{C左}$ 影响线。将结点 C 左侧的主梁截面变为滑动约束，主梁虚位移如图(d)中虚线所示。此时 C 处横梁在滑动约束右侧，因此随主梁上移到 C_3 ，各短梁虚位移用实线画出。 $Q_{C左}$ 影响线如图(e)。

3. 求 $Q_{C右}$ 影响线。将结点 C 右侧的主梁截面变为滑动约束，主梁虚位移如图(f)中虚线所示。此时 C 处横梁在滑动约束左侧，因此随主梁下移到 C_4 ，各短梁虚位移用实线画出。 $Q_{C右}$ 影响线如图(g)，在 AD 段与 $Q_{C左}$ 影响线完全不同，但主梁虚位移图则完全相同。

从上述可看出几点：

1. 短梁的虚位移图即是影响线形状，因而在相邻结点间影响线必为一直线，即由一根短梁构成，很形象。

2. 影响线的取值范围应为全部短梁所在范围，不一定是主梁的尺度范围。如本例中 EF 段各影响线有值，容易被忽视。

3. 结点处左右两侧的主梁截面有两条剪力影响线，它们在该结点的相邻两个结间内完全不同。要注意在画短梁位移图时，该结点处在所讨论剪力的哪一侧。

8-4 如何求静定结构位移影响线?

位移影响线是描述单位移动荷载下某截面位移变化规律的图形，仍可用静力法绘制。其方法也是将单位移动荷载位置 x 作自变量，由计算位移的公式列出指定截面位移的影响线方程，然后画出图形。

试求图 8-4-1(a)所示简支梁 C 点挠度 Δ_c 的影响线(只考虑弯曲变形)，由单位荷载法，有

$$\Delta_c = \int_0^8 \frac{\bar{M}(x')\bar{M}_P(x',x)}{EI} dx'$$

上式即为 Δ_c 的影响线方程。其中 x' 为截面位置坐标， $\bar{M}(x')$ 是单位荷载下各截面弯矩， $\bar{M}_P(x',x)$ 是单位移动荷载下各截面弯矩。 \bar{M} 和 \bar{M}_P 图分别如图(b)和图(c)所示。

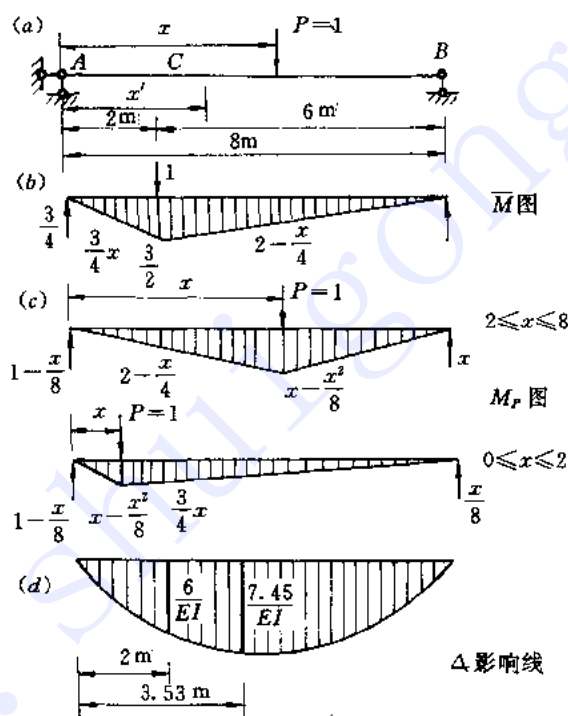


图 8-4-1

下面利用图乘法列影响线方程。

当 $0 \leq x \leq 2$ 时，有

$$\begin{aligned} \Delta_c &= \frac{1}{EI} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{8} \right) x \right] \frac{2}{3} \frac{3}{4} x + \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{8} \right) (2-x) \right] \left(\frac{2}{3} \frac{3}{4} x + \frac{1}{3} \frac{3}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2} \frac{3}{4} x (2-x) \right] \left(\frac{1}{3} \frac{3}{4} x + \frac{2}{3} \frac{3}{2} \right) + \left[\frac{1}{2} \frac{3}{4} x \cdot 6 \right] \frac{2}{3} \frac{3}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{7}{2} x - \frac{x^3}{8} \right) \quad (\text{向下为正}) \end{aligned}$$

当 $2 \leq x \leq 8$ 时,有

$$\Delta_c = \frac{1}{EI} \left(-\frac{4}{3} + \frac{11}{2}x - x^2 + \frac{x^3}{24} \right) \quad (\text{向下为正})$$

由上两式作出 Δ_c 影响线如图(d)所示。

从上述结果可以看出:

1. Δ_c 的影响线是两段三次曲线。

2. 当 $P=1$ 离左支座 3.528m 时, C 点挠度最大, 其值为 $\frac{7.45}{EI}$ (m), 而 $P=1$ 在 C 点时, C 点挠度不是最大。

3. 两段曲线在 $x=2$ 处切线斜率相同, 为 $\frac{2}{EI}$, 即 $P=1$ 在全梁范围内移动时, Δ_c 的变化率没有突变。

8-5 静定结构的位移影响线和超静定结构内力影响线都是由曲线组成的吗?

都不一定。

有些静定结构是复合型的, 它是由基本部分和附属部分组成。可以论证, 如果求附属部分某截面位移的影响线, 则影响线全部由曲线组成。但若求基本部分某截面位移影响线, 则附属部分影响线由直线组成。这是因为当移动荷载在附属部分时, 附属部分与基本部分之间联结的约束力是按线性变化的, 而基本部分的某截面位移又与这些约束力成正比(对线性变形体)。下面举例给予论证。

图 8-5-1(a) 示一静定多跨梁, 现求附属部分截面 E 的挠度 Δ_E 影响线。当 $P=1$ 在基本部分 AD 时, 有 $\Delta_E = \frac{1}{2} \Delta_D$ 。这时 Δ_D 与 $P=1$ 的位置是非线性关系, 即在 AD 段 Δ_E 的影响线为曲线。当 $P=1$ 在附属部分 DC 时, Δ_E 可看成两部分叠加: D 点不动时 $P=1$ 产生的挠度加上此时 D 点挠度的一半。前者与 $P=1$ 的位置是非线性关系, 后者是线性关系。因此在 DC 段 Δ_E 的影响线也是曲线。图(b) 示出 Δ_E 影响线的轮廓。

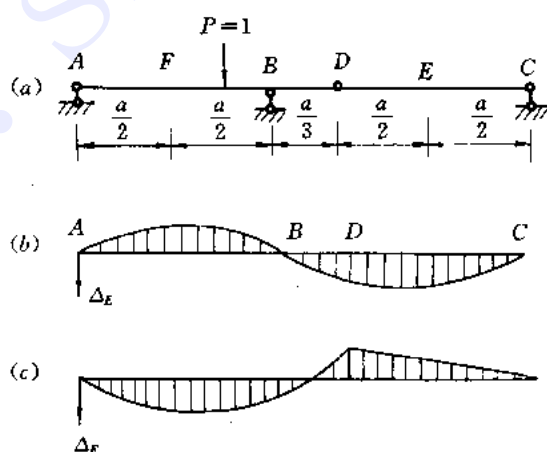


图 8-5-1

现在分析 Δ_F 的影响线。当 $P=1$ 在 AD 上时，它是曲线；当 $P=1$ 在 DC 上时， Δ_F 是由 Q_D 引起的，与 Q_D 成正比，而 Q_D 与 $P=1$ 的位置是线性关系，所以此时 DC 段 Δ_F 的影响线是直线。图(c)示出 Δ_F 影响线的轮廓。

图 8-5-2(a) 示上承的静定桁架，其下弦中点挠度 Δ_c 的影响线全部由直线组成，各杆 EA 相同。如图中所示， $P=1$ 传给结点 E 和 F 的结点力都是 x 的线性函数，而 Δ_c 与这些结点力成正比关系，因此 Δ_c 影响线在 EF 段是直线。同理它在 DE 、 FG 、 GH 各段也都是直线。 Δ_c 影响线如图(b)所示。

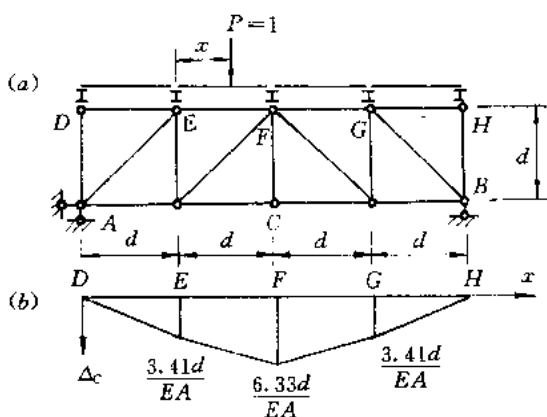


图 8-5-2

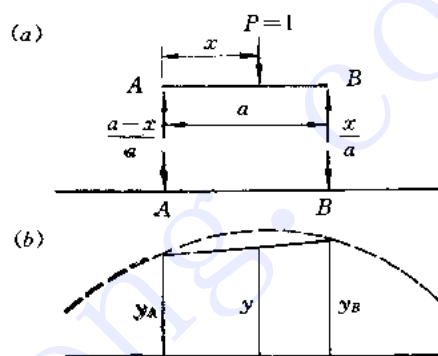


图 8-5-3

由此可知，超静定桁架位移影响线也由直线组成。可以证明在线性变形体系中，单位移动荷载作用于以结点荷载形式传递的各类结构，其内力和位移影响线均由直线组成。图 8-5-3(a) 示短梁 AB 与下部主结构的关系，图(b)中虚线为单位荷载直接作用于主结构时某量的影响线曲线。当单位移动荷载通过相邻结点 A 、 B 间接作用于主结构时， AB 段内某量的影响线函数为

$$y = \frac{a-x}{a} y_A + \frac{x}{a} y_B$$

可见，某量影响线在相邻结点间均为直线。

图 8-5-4(a) 为承受结点荷载的连续梁(超静定)，试画出 M_D 影响线的轮廓。

在截面 D 加铰将 M_D 变成主动力如图(b)，它与图(a)等价，即由 $P=1$ 和 M_D 共同作用下产生的变形与图(a)相同， D 点左右两截面没有相对转角。将图(b)作为第一状态。图(c)是假想的仅在 $M_D=1$ 作用下的一种状态，其变形如图中虚线所示。把图(c)作为第二状态。根据功的互等定理

$$W_{12} = W_{21}$$

有
$$W_{12} = M_D \delta_{11} - 1 \delta_{1P} = W_{21} = 0$$

这里假定 δ_P 向上为正。由上式，有

$$M_D = \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

而 δ_{11} 是 $M_D=1$ 下产生的沿 M_D 方向的位移，是一常数。因此图(c)中短梁的 δ_P 图就是 M_D

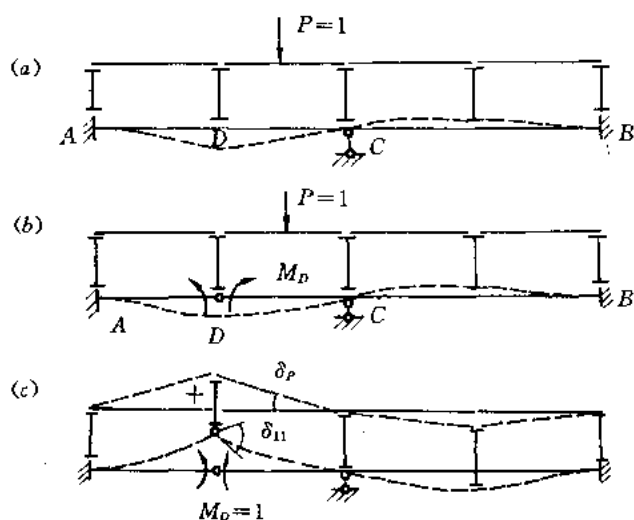


图 8-5.4

影响线的轮廓，它们由直线组成。

8-6 在求剪力 Q 的荷载临界位置时如何使用判别式？

在一组集中移动荷载下，某量 Z 达到极值时的荷载位置(荷载临界位置)必须满足如下条件(对于静定结构)：

求极大值时

$$\left. \begin{aligned} \Delta x > 0 \quad (\text{荷载稍向右移}), \quad \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i \leq 0 \\ \Delta x < 0 \quad (\text{荷载稍向左移}), \quad \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

求极小值时

$$\left. \begin{aligned} \Delta x > 0, \quad \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i \geq 0 \\ \Delta x < 0, \quad \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

式中 α_i 为影响线第 i 直线段的倾角, R_i 为第 i 直线段区间内移动荷载合力。要满足上述判别式, 必要条件是有一个集中力位于影响线的顶点。

图 8-6-1(a) 所示的简支梁, 承受汽车荷载(考虑向左行和向右行), 试求 $Q_{C, \max}$ 。

在应用式(a)判别式时特别要注意两点:(1) Q_C 的影响线要看成由 AC' , $C'C''$ 和 $C''B$ 三直线组成, 且 α_2 趋于 90° (C'' 在 C 右边, C' 在 C 左边); (2) 图(b)中 P_2 稍向左移动后是位于 $C'C''$ 上, 而不是位于 AC' 上。

车向左行时 (P_1 在左, P_2 在右):

设 P_2 在 C'' 处。由图(b), 有

$$\text{当 } \Delta x > 0, \quad \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i = 50 \times \left(-\frac{1}{15}\right) + 0 - 100 \times \left(-\frac{1}{15}\right) = -10 < 0$$

$$\text{当 } \Delta x < 0, \quad \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i = 50 \times \left(-\frac{1}{15}\right) + \infty + 0 > 0$$

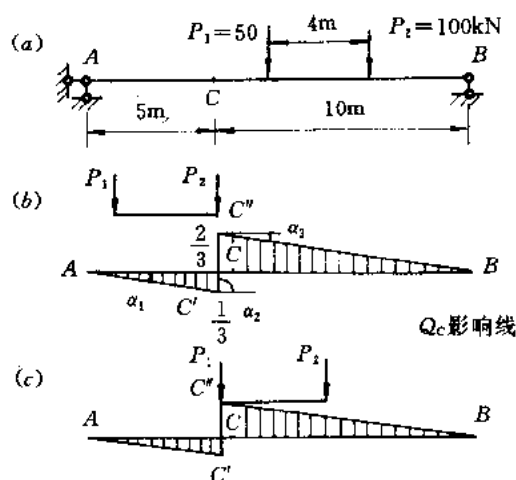


图 8-6-1

故 P_2 在 C' 时是荷载临界位置, 此时

$$\begin{aligned} Q_c^{\xi} &= 50 \times \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \right) + 100 \times \frac{2}{3} \\ &= 63.3 \text{ kN} \end{aligned}$$

设 P_1 在 C'' 处, 经判别也是荷载临界位置, 此时

$$\begin{aligned} Q_c^{\xi} &= 50 \times \frac{2}{3} + 100 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \\ &= 73.3 \text{ kN} \end{aligned}$$

车向右行时 (P_1 在右, P_2 在左)

设 P_1 在 C' 处, 经判别是荷载临界位置, 此时

$$Q_c^{\xi} = 26.67 \text{ kN}$$

设 P_2 左 C'' 处, 经判别也是荷载临界位置, 此时

$$Q_c^{\xi} = 86.67 \text{ kN}$$

显然, 荷载在 C' 顶点不会是 Q_c 最大值情况。比较上述计算, 可知

$$Q_{c, \max} = 86.67 \text{ kN}$$

8-7 如何求桁架的荷载最不利位置?

由于桁架各杆轴力和各结点位移的影响线都是由直线组成(包括超静定桁架), 所以确定荷载最不利位置通常分两步进行:

第一步, 由上节的式(a)或式(b)确定荷载临界位置;

第二步, 从荷载临界位置中选荷载最不利位置。

例 1 求图 8-7-1(a) 所示静定桁架杆 1 的轴力 N_1 的荷载最不利位置, 移动荷载为两台吊车轮压, 以结点荷载传递形式作用于上弦各结点。 $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 82 \text{ kN}$ 。

解 作 N_1 影响线, 如图(b)所示。这里为三角形影响线, 又由于是求极大值(因影响

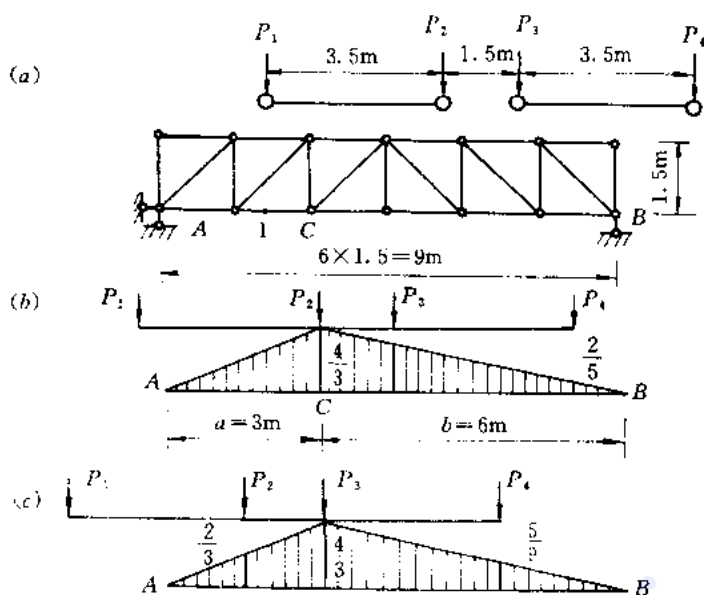


图 8-7-1

系数均为正,即杆 1 恒受拉),故临界位置判别式可用下式

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_{fi}}{a} &\leq \frac{R_{fi} + P_k}{b} \\ \frac{R_{fi} + P_k}{a} &\geq \frac{R_{fi}}{b} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

由于移动荷载是对称的,向左行和向右行对 N_1 影响相同。显然,荷载最不利位置为 P_2 或 P_3 在 C 点。

图(b)示 P_2 在 C 点情况,此时 $P_k = P_2 = 82\text{kN}$, $R_{\text{左}} = 0$, $R_{fi} = P_3 + P_4 = 164\text{kN}$,则有

$$\frac{0}{3} < \frac{82 + 164}{6}$$

$$\frac{82}{3} = \frac{164}{6}$$

满足式(a)条件,故 P_2 在 C 点时是临界位置,此时

$$N_1 = 82 \times \left(\frac{4}{3} + 1 + \frac{2}{9} \right) = 210\text{kN}$$

图(c)示 P_3 在 C 点情况。此时 $P_k = P_3 = 82\text{kN}$, $R_{\text{左}} = P_2 = 82\text{kN}$, $R_{fi} = P_4 = 82\text{kN}$,则有

$$\frac{82}{3} = \frac{82 + 82}{6}$$

$$\frac{82 + 82}{3} > \frac{82}{6}$$

也满足式(a)条件,故 P_3 在 C 点也是临界位置,此时

$$N_1 = 82 \times \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{9} \right) = 210\text{kN}$$

因此,从 P_2 在 C 点向左移动荷载至 P_3 在 C 点止,都是荷载最不利位置。

例2 求图 8-7-2(a)所示静定桁架 C 点挠度的荷载最不利位置。各杆 EA 相同，为常数。 $P_1 = P_3 = 100\text{kN}$, $P_2 = 70\text{kN}$ 。

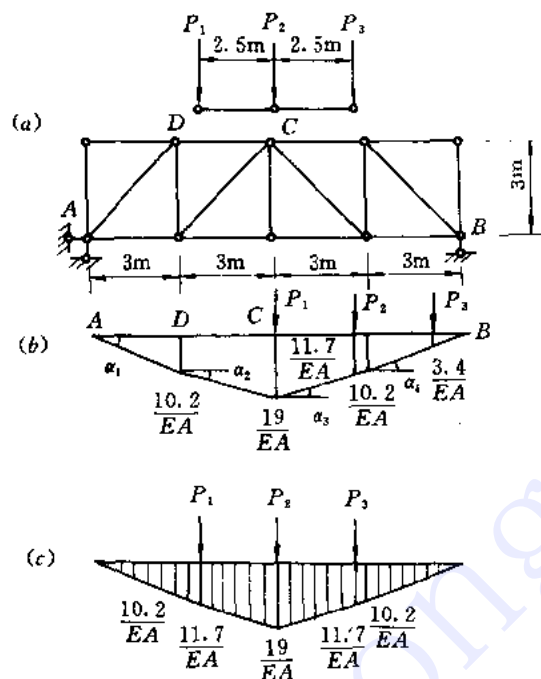


图 8-7-2

解 Δ_c 的影响线为多边形, $\text{tg}\alpha_1 = +\frac{10.2}{3EA}$, $\text{tg}\alpha_2 = +\frac{8.8}{3EA}$, $\text{tg}\alpha_3 = -\frac{8.8}{3EA}$, $\text{tg}\alpha_4 = -\frac{10.2}{3EA}$ 。

由于移动荷载的对称性,可只判别如下几种情况:(1) P_1 在 C 点,(2) P_2 在 C 点,(3) P_1 在 D 点,(4) P_2 在 D 点。与前两种情况对比,后两种情况显然不会是荷载最不利位置。图(b)示 P_1 在 C 点情况,当 $\Delta x < 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = P_1 = 100$, $R_3 = P_2 = 70$, $R_4 = P_3 = 100$

$$\sum R_i \text{tg}\alpha_i = 0 + \frac{8.8}{3EA} - 70 \times \frac{8.8}{3EA} > 0$$

当 $\Delta x > 0$, $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, $R_3 = P_1 + P_2 = 170$, $R_4 = P_3 = 100$

$$\sum R_i \text{tg}\alpha_i = 0 + 0 - 170 \times \frac{8.8}{3EA} - 100 \times \frac{10.2}{3EA} < 0$$

满足上节式(a),故 P_1 在 C 点是临界位置,此时

$$\Delta_c = 100 \times \frac{19}{EA} + 70 \times \frac{11.7}{EA} + 100 \times \frac{3.4}{EA} = \frac{3056}{EA}$$

图(c)示 P_2 位于 C 点的情况,经判别也是临界位置,其

$$\Delta_c = \frac{3662}{EA}$$

因此,当 P_2 位于 C 点时是 Δ_c 的荷载最不利位置,C 点最大挠度

$$\Delta_{c,\max} = \frac{3662}{EA} \quad (\text{m})$$

8-8 移动荷载含有均布荷载时如何确定荷载最不利位置？

图 8-8-1(a)为一组含有均布荷载的移动荷载，它们的大小和间距保持不变。这里只讨论其中均布荷载是有限长 l_0 而且连续的情况。图(b)为由直线段组成的某量 Z 的影响线。

对于这种移动荷载也是先确定临界位置，再从中选出荷载最不利位置。

如果我们把均布荷载看成为无数集中荷载 qdx ，就可以应用只有集中荷载时确定荷载最不利位置的原理，即逐个把集中力 P_i 和 qdx 放在影响线某顶点判别它是否临界位置。于是，对于集中力 P_i ，其判别公式仍是 8-6 的式(a)或(b)，只是计算合力 R_i 时计及均布荷载。

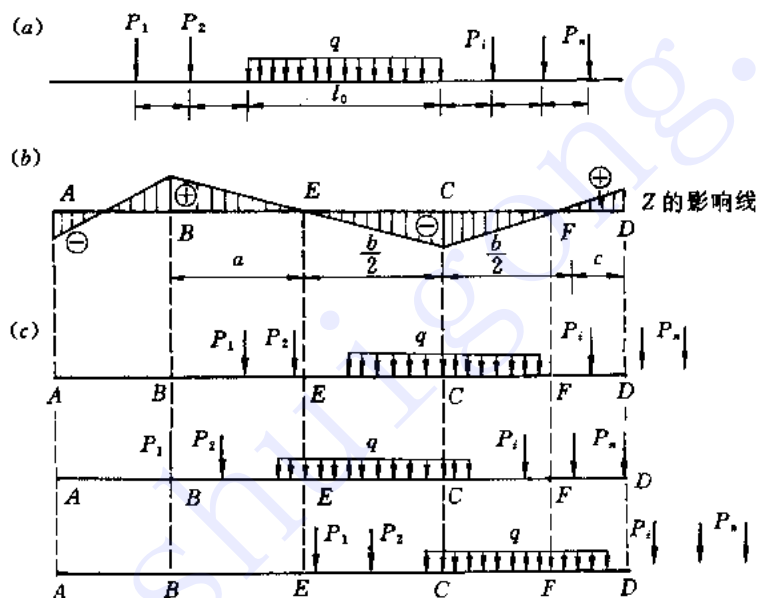


图 8-8-1

对于 qdx ，当然不能采用一个个试算的办法，因为它们有无穷多个。但是有一点可以肯定，临界位置必然有一个 qdx 位于影响线某个顶点，即均布荷载必定分布于该顶点的两侧。现设此顶点为图(b)中的 C 点，且设 $\frac{b}{2} < l_0 < \frac{b}{2} + c < \frac{b}{2} + a$ 。于是图(c)、(d)和(e)都有可能是临界位置，要一一判别。判别的方法是，以均布荷载左端离顶点 C 的距离 x 作为变量，并假定 P_i 在影响线某直线段内，然后利用 Z 的影响线写出 Z 与 x 的关系 $Z(x)$ ，由

$$\frac{dZ(x)}{dx} = 0$$

求出 x ，当 $0 \leq x \leq l_0$ 且使 P_i 仍在原影响线的某直线段内，则是临界位置。

例 1 求图 8-8-2(a)所示简支梁在长度为 l_0 的均布移动荷载下 M_c 的荷载最不利位

置, 设 $a < b < l_0 < l$ 。

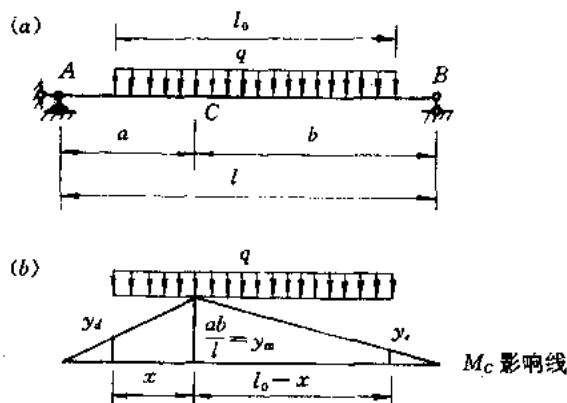


图 8-8-2

解 设 x 为均布荷载左端离影响线顶点 C 的距离, 需要考虑下列三种位置:

1. $0 < x < a, l_0 - x < b$;
2. $l_0 > x > a$;
3. $0 < x < a, l_0 - x > b$ 。

对于第(1)种位置(荷载全部在梁内), 如图(b)所示,

$$M_C = q \left[\frac{1}{2} (y_d + y_{\max}) x + \frac{1}{2} (y_e + y_{\max}) (l_0 - x) \right]$$

$$= \frac{q y_{\max}}{2} \left[2l_0 - \frac{l_0^2}{b} + \frac{2l_0}{b} x - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) x^2 \right]$$

令 $\frac{dM_C}{dx} = 0$, 即

$$l_0 - \frac{l_0}{a} x = 0, \quad x = a \frac{l_0}{l}$$

因 $0 < l_0 < l$, 有

$$0 < x < a, \quad l_0 - x < b$$

与假设相同。因此, 当 $x = a \frac{l_0}{l}$ 时为临界位置, 此时

$$y_d = \left(1 - \frac{l_0}{l} \right) y_{\max} = y_e$$

$$M_{C, \max} = \frac{1}{2} q l_0 y_{\max} \left(2 - \frac{l_0}{l} \right)$$

对于第(2)种位置(部分荷载向左越出支座 A)

$$M_C = \frac{q y_{\max}}{2} \left[a + \left(\frac{b - l_0 + x}{b} + 1 \right) (l_0 - x) \right]$$

由 $\frac{dM_C}{dx} = 0$, 得

$$x = l_0 - b < a$$

与假设 $x > a$ 矛盾, 故 $x > a$ 没有临界位置。

对于第(3)种位置(部分荷载向右越出支座 B)

$$M_c = \frac{q y_{\max}}{2} \left[\left(\frac{a-x}{a} + 1 \right) x + b \right]$$

由 $\frac{dM_c}{dx} = 0$, 得

$$x = a$$

与假设 $x < a$ 矛盾, 故 $l_0 - x > b$ 也没有临界位置。

综上所述, 可得到如下结论: 对于仅有一段有限长均布移动荷载、影响线为三角形的情况, 荷载最不利位置是荷载两端点位于影响线竖标相等的位置(即上述 $y_d = y_e$ 的位置)。这个结论从图 8-8-3 看更加一目了然。大家知道, 均布荷载 q 对 Z 的影响量等于 $q\omega$, ω 为均布荷载所在位置的影响线围成的面积。当荷载左移 Δx , Z 值增加 $q\omega_1$, 减少 $q\omega_2$, 因 $y_d = y_e$, 故 $\omega_2 > \omega_1$, 则 Z 值总量减小; 同理当荷载右移 Δx , Z 值也减小, 这就是临界位置(极大值)的特点。

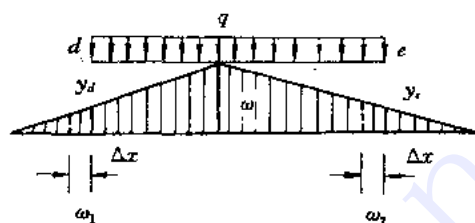


图 8-8-3

上述结论还可广而言之: 对于任意的影响线和任意有限长一段均布荷载, 当与荷载两端点对应的的影响系数相等而斜率相反的荷载位置为临界位置。如图 8-8-4 所示, 左边一段表示均布荷载长度 $l_0 < l$ (影响线两相邻零点的距离) 的情况, 右边一段表示 $l_0 > l$ 的情况。如果在区段内找不出具有上述特点(影响系数相等且斜率相反)的荷载位置, 则荷载在这一区段内没有临界位置。

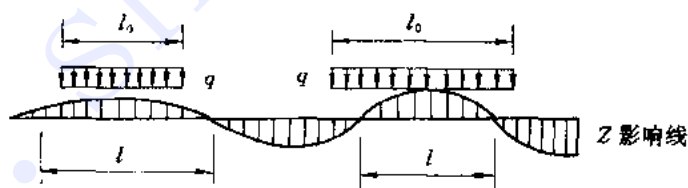


图 8-8-4

例 2 求图 8-8-5(a) 中 M_E 的荷载最不利位置(不改变荷载顺序)。

解 作 M_E 影响线, 如图(b)所示, $\text{tg}\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\text{tg}\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, $\text{tg}\alpha_3 = \frac{1}{4}$ 。

设 P 在 E 点, 如图(b)所示, 当

$$\Delta x > 0, \quad \sum R_i \text{tg}\alpha_i = 0 = (100 + 40 \times 2) \times \frac{1}{2} + 40 \times 1 \times \frac{1}{4} = -80 < 0$$

$$\Delta x < 0, \quad \sum R_i \text{tg}\alpha_i = 100 \times \frac{1}{2} - 40 \times 2 \times \frac{1}{2} + 40 \times 1 \times \frac{1}{4} = 20 > 0$$

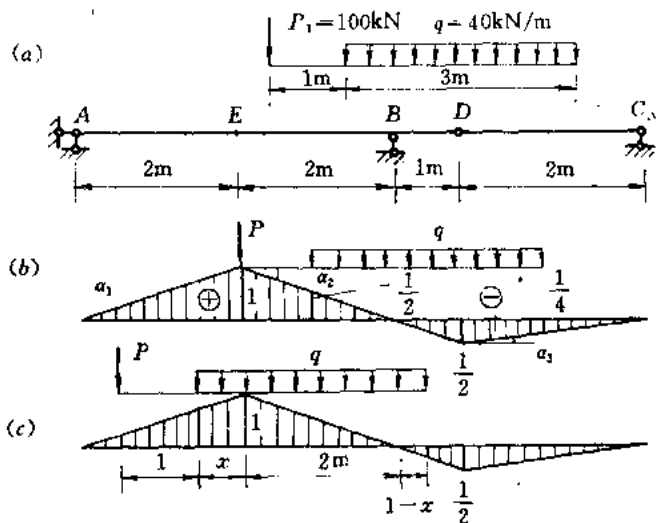


图 8-8-5

故 P 在 E 点时为临界位置, 此时

$$M_E = 100 \times 1 + 40 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 - 40 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 40 \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \times 1 = 85\text{kN} \cdot \text{m}$$

设 q 跨过 E 点, 其左端离 E 点为 x , 且 P 在 AE 上, q 在 AD 上, 如图(c)所示。此时

$$M_D = \frac{P(1-x)}{2} + q \left[\left(\frac{2-x}{2} + 1 \right) \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{(1-x)^2}{4} \right] = 80 + 10x - 20x^2$$

由 $\frac{dM}{dx} = 0$, 求得 $x = \frac{1}{4}\text{m}$ 。

与假设无矛盾, 故 $x = \frac{1}{4}$ 的位置是临界位置, 此时

$$M_D = 81\text{kN} \cdot \text{m}$$

综上所述, 荷载最不利位置为 P 在 E 点, $M_{E,\max} = 85\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

8-9 当左右微动荷载组而 $\sum R_i \text{tg} \alpha_i$ 均为正值(或负值)时, 荷载应怎样移动才能得到临界位置?

当移动荷载在 x 处向左或向右移动 Δx (设向右移动 Δx 为正) 时, Z 的增量为

$$\Delta Z = \Delta x \sum R_i \text{tg} \alpha_i$$

倘若这时 $\sum R_i \text{tg} \alpha_i$ 恒大于零(即向左或向右移动 Δx , $\sum R_i \text{tg} \alpha_i$ 均为正值), 说明 $Z(x)$ (以某一个集中力的位置为 x , 写出 Z 与 x 的函数) 在 x 点的斜率大于零(没有一个集中力在影响线折点上) 或 x 点左边 $Z(x)$ 的斜率大于 x 点右边的斜率(有一个集中力在影响线折点上)。这时若求极大值, 显然向右移动必然能找到临界位置; 若是求极小值, 则向左移动必然能找到临界位置。

图 8-9-1(c)为图(a)中梁截面 C 在移动荷载组作用下的弯矩函数 $M_c(x)$ 的图形(设

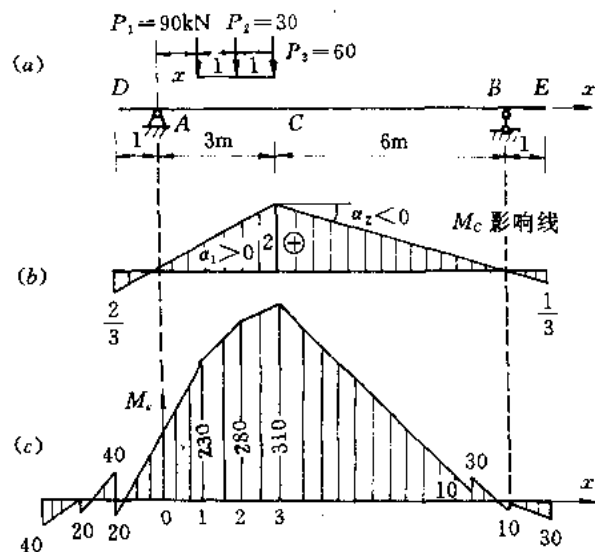


图 8-9-1

P_1 离支座 A 的距离为 x , $-3 \leq x \leq 10$)。从 $M_c(x)$ 图可以断定,当 P_2 在 C 处时($x=2m$)不是临界位置,当用临界位置判别式判断时,必然会出现 $\sum R_i \text{tg} \alpha_i$ 矩恒大于零,即

$$\Delta x > 0 \quad \sum R_i \text{tg} \alpha_i = 90 \times \frac{2}{3} - 90 \times \frac{1}{3} = 30 > 0$$

$$\Delta x < 0 \quad \sum R_i \text{tg} \alpha_i = 120 \times \frac{2}{3} - 60 \times \frac{1}{3} = 60 > 0$$

这时 $x=2$ 处的左边 $M_c(x)$ 的斜率大于右边的斜率。要求 M_c 极大,荷载向右移必然能得到临界位置($x=3m$ 处)。

8-10 移动荷载含有均布荷载时如何确定简支梁绝对最大弯矩?

图 8-10-1 示一简支梁承受含有一段长为 l_0 的均布荷载的移动荷载,求梁内所能发生的最大弯矩,即绝对最大弯矩。

根据简支梁受竖向荷载弯矩图的特点,在图示荷载下,其弯矩图形状有三种可能:(1) 绝对最大弯矩发生在 P_1 作用点所在截面(当荷载移动至某一位置);(2) 绝对最大弯矩发生在 P_2 作用点所在截面;(3) 绝对最大弯矩发生在均布荷载作用范围内的某截面。这三种荷载位置各自不同,究竟是哪一种,原则上需要一一试算。

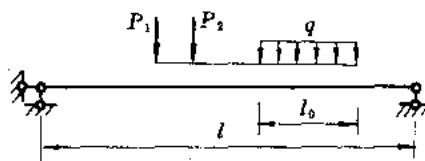


图 8-10-1

试算的基本思路是:设 x 为试算荷载(某集中力 P_k 或均布荷载某微段 $q dx$)离左支座距离;明确此时梁上的实有荷载;建立试算荷载所在截面的弯矩 $M(x)$ 表达式,由 $\frac{dM(x)}{dx} = 0$ 求出 x 后,若梁上实有荷载不变,则计算 x 处 $M(x) = M_{max}$,若求出 x 后梁上实有荷载

变化(有的荷载离开或进入), 重新明确实有荷载, 再求 x ; 比较各试算荷载的 M_{\max} , 其中最大的为绝对最大弯矩。

当试算荷载为集中力 P_k , 且均布荷载全部在(或不在)梁上时, 可导出

$$x = \frac{l}{2} - \frac{a}{2}$$

$$M_{\max} = R \frac{x^2}{l} - M_k$$

其中 l 为梁跨度, R 为梁上实有荷载的合力, a 为 P_k 与 R 之间距离(R 在 P_k 右边 a 为正), M_k 为 P_k 左边所有荷载对 P_k 作用点的力矩之和, 是与 x 无关的常数。

当试算荷载为 qdx , 如图 8-10-2 所示。这时有两个变量 x 和 x_k , 可列出 $M(x, x_k)$ 表达式, 它是 x 和 x_k 的函数,

由
$$\frac{\partial M(x, x_k)}{\partial x} = 0$$

和
$$\frac{\partial M(x, x_k)}{\partial x_k} = 0$$

求出 x 和 x_k 。

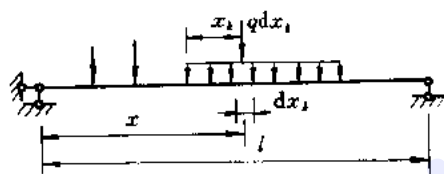


图 8-10-2

对于一段均布荷载有一部分在梁上一部分在梁外的情况, 可用上述基本思路求 x 和 M_{\max} 。

例 求图 8-10-3(a) 所示的移动荷载作用下简支梁绝对最大弯矩。

解 简支梁绝对最大弯矩通常发生在梁的中点附近。这里由于 P_1 较小, 绝对最大弯矩不会发生在它作用点所在截面, 所以试算荷载 P_k 只考虑

$P_k = P_2$ 和 $P_k = qdx_k$ 两种情况。

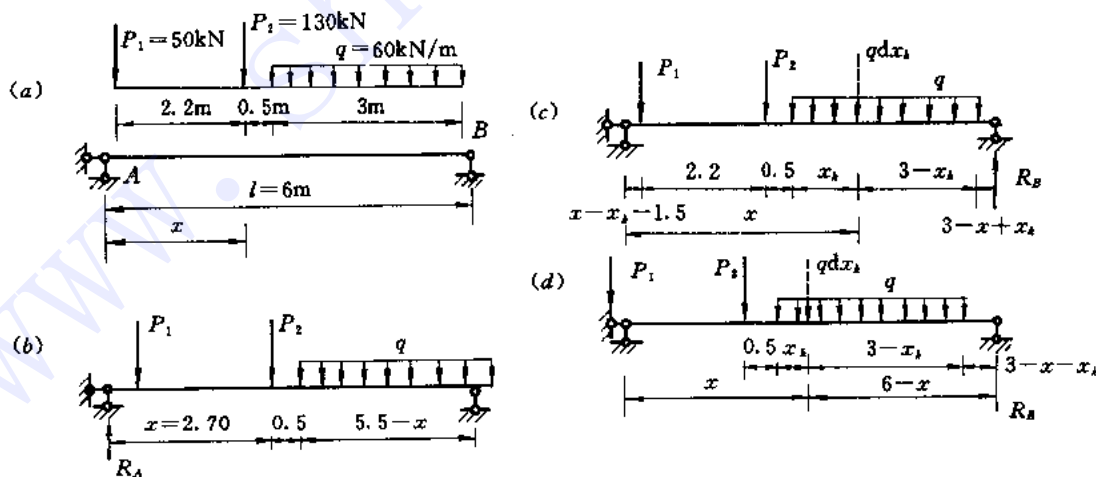


图 8-10-3

1. $P_k = P_2$

设 P_1, P_2 和 q 全部在梁上, 如图(a)所示, 则梁上实有荷载合力

$$R = 50 + 130 + 3 \times 60 = 360 \text{ kN}$$

$$R \text{ 与 } P_k \text{ 距离} \quad a = \frac{1}{360}(-50 \times 2.2 + 60 \times 3 \times 2) = 0.694 \text{ m}$$

$$P_k \text{ 与 } A \text{ 距离} \quad x = \frac{6}{2} - \frac{0.694}{2} = 2.653 \text{ m}$$

按此 x 值排列移动荷载后，有部分均布荷载 q 离开支座 B ，与计算前提矛盾，计算无效。

设 P_1, P_2 在梁上， q 部分离开 B 支座，如图(b)所示。由 $\sum M_B = 0$ ，有

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{1}{6} \left[\frac{60}{2} (5.5 - x)^2 + 130 \times (6 - x) + 50 \times (8.2 - x) \right] \\ &= 5x^2 - 85x + 349.6 \end{aligned}$$

$P_k - P_2$ 所在截面的弯矩 $M(x)$

$$M(x) = R_A x - 50 \times 2.2 = 5x^3 - 85x^2 + 349.6x - 110$$

由 $\frac{dM(x)}{dx} = 0$ ，即

$$15x^2 - 170x + 349.6 = 0$$

求得

$$x = 2.70 \text{ m} \quad (x = 8.68 \text{ m 无意义})$$

在此 x 值下的移动荷载位置与计算所假设相同，为临界位置，此时梁中最大弯矩

$$(M_{\max})_1 = 312.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

2. $P_k = q dx_k$

设全部荷载在梁上，如图(c)所示。 x_k 为均布荷载左端点离 $q dx_k$ 的距离，是待定变量。

若在均布荷载范围内存在极值点，它应满足

$$0 \leq x_k \leq l_0, \quad (l_0 = 3 \text{ m})$$

否则要重新考虑梁上实有荷载。

此时，由 $\sum M_A = 0$ ，有

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{1}{6} [50 \times (x - x_k - 2.7) + 130 \times (x - x_k - 0.5) + 3 \times 60(x - x_k + 1.5)] \\ &= 60(x - x_k) + 11.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x, x_k) &= R_B(6 - x) - \frac{q}{2}(3 - x_k)^2 \\ &= -60x^2 - 30x_k^2 - 60xx_k + 348.3x - 180x_k - 200 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{由 } \frac{\partial M(x, x_k)}{\partial x} = 0, \text{ 有} & -120x - 60x_k + 348.3 = 0 \\ \frac{\partial M(x, x_k)}{\partial x_k} = 0, \text{ 有} & -60x - 60x_k - 180 = 0 \end{cases}$$

$$\text{联立解得} \quad x = 8.8 \text{ m}, \quad x_k = -11.8 \text{ m}$$

此结果与计算假设矛盾。

设 P_1 离开支座 A ， P_2 和均布荷载在梁上，如图(d)所示。此时

$$R_B = 51.67x - 51.67x_k + 34.17$$

$$M(x, x_k) = -51.67x^2 - 30x_k^2 + 51.67xx_k + 278.5x - 130x_k - 65$$

$$\left. \begin{aligned} \text{由 } \frac{\partial M}{\partial x} = 0, \text{ 有} & \quad -103.3x + 51.67x_k + 275.8 = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial x_k} = 0, \text{ 有} & \quad 51.67x - 60x_k - 130 = 0 \end{aligned} \right\}$$

联立解上式, 得

$$x = 2.786\text{m}, \quad x_k = 0.233\text{m}$$

此结果与计算假设相同, 故为临界位置, 此时梁中最大弯矩

$$(M_{\max})_2 = 304.0\text{kN} \cdot \text{m}$$

比较上述计算, 荷载最不利位置应为图(b), 绝对最大弯矩

$$M_{\max} = 312.7\text{kN} \cdot \text{m}$$

8-11 如何求静定多跨梁的绝对最大弯矩?

静定多跨梁由基本部分和附属部分组成。附属部分是简支梁(有的带伸臂), 基本部分是简支梁(多数带伸臂)或悬臂梁。这里所求的绝对最大弯矩是指竖向移动荷载组作用下产生的绝对值最大的弯矩。显然它可能在支座处(负弯矩最大), 也可能在跨间某一截面。

如图 8-11-1 所示的静定多跨梁, AC 和 BD 段最大弯矩(绝对值)一定位于 A 和 B 截面, 而最大正弯矩位于 CB 之间。确定 A 和 B 截面的最大负弯矩, 是通过确定 M_A 和 M_B 的荷载最不利位置而得到(凡求某截面最大量值均可采用这种办法)。

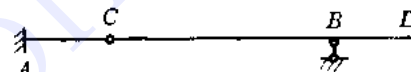


图 8-11-1

确定 CB 间最大正弯矩就是求带伸臂简支梁的绝对最大弯矩。不难证明, 带伸臂的简支梁的跨间绝对最大弯矩的计算公式与不带伸臂的完全相同, 这时梁上实有荷载包括伸臂部分。

例 求图 8-11-2 所示的静定多跨梁的绝对最大弯矩, 只考虑移动荷载左行。 $P_1 = P_3 = 50\text{kN}$, $P_2 = 200\text{kN}$, $P_4 = 150\text{kN}$ 。

解 这里需要比较 A、B 截面最大负弯矩和 CB 间最大正弯矩以确定绝对最大弯矩。对于 B 截面, 显然 P_2 在 D 点时负弯矩最大。但 P_2 在 C 点时 A 截面的负弯矩显然比 B 截面负弯矩(此时 $M_B = 0$)大。从 M_A 影响线(图(b))看, P_2 在 C 点时 M_A 负值最大, 即

$$|M_A|_{\max} = 200 + 50 \times \frac{1}{2} + 150 \times \frac{1}{3} = 275\text{kN} \cdot \text{m}$$

对于 CB 段, 由于简支梁绝对最大弯矩一般发生在较大集中力位于梁中点附近时, 因而当 P_2 或 P_4 位于梁中点附近时可能产生绝对最大弯矩。

设 $P_1 = P_2, P_1, P_2, P_3, P_4$ 均在 CD 上, 则

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 450\text{kN}$$

$$a = \frac{1}{R}(P_3 \times 3 + P_4 \times 4 - P_1 \times 1) = 1.56\text{m}$$

$$x = \frac{l}{2} - \frac{a}{2} = \frac{6}{2} - \frac{1.56}{2} = 2.22\text{m}$$

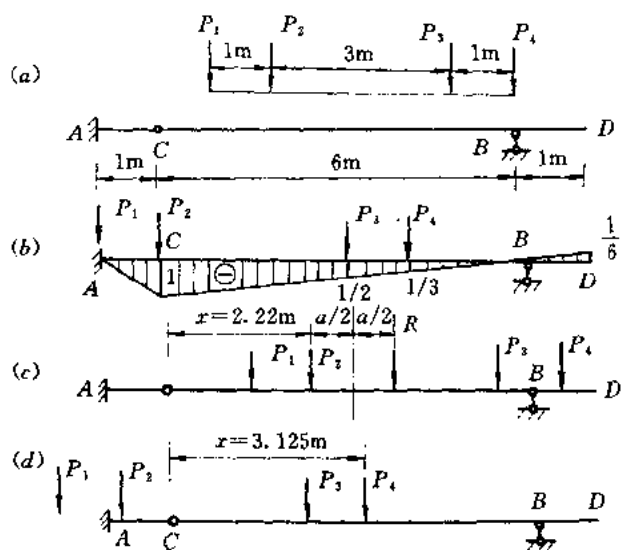


图 8-11-2

这时荷载位置与假设相同，即 P_1, P_2, P_3 在 CB 上， P_4 在 BD 上，如图(c)所示。则

$$(M_{\max})_1 = R \frac{x^2}{l} - M_k = 450 \times \frac{2.22^2}{6} - 50 \times 1 = 320 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

为了验证带伸臂简支梁利用上述公式计算的正确性，不妨直接由图(c)列出 $M(x)$ 方程，再令 $\frac{dM}{dx} = 0$ ，求出 x ，进而求出 M_{\max} 。列式如下

$$R_B = \frac{1}{6} [P_2 x + P_1(x-1) + P_3(x+3) + P_4(x+4)] = 75x + 116.7$$

$$M(x) = R_B(6-x) - P_3 \times 3 = -75x^2 + 333.3x - 50$$

由 $\frac{dM}{dx} = 0$ ，有 $-150x + 333.3 = 0$

求得 $x = 2.22 \text{ m}$

$$(M_{\max})_1 = -75 \times 2.22^2 + 333.3 \times 2.22 - 50 = 320 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

设 $P_k = P_1, P_3, P_4$ 在 CD 上，如图(d)所示，则

$$R = P_3 + P_4 = 200 \text{ kN}$$

$$a = -\frac{1}{R} (P_3 \times 1) = -0.25 \text{ m}$$

$$x = \frac{l}{2} - \frac{a}{2} = 3.125 \text{ m}$$

这时仅 P_3, P_4 在 CB 上，与假设符合，则

$$\begin{aligned} (M_{\max})_2 &= R \frac{x^2}{l} - M_k = 200 \times \frac{3.125^2}{6} - 50 \\ &= 275.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

综上所述，得绝对最大弯矩

$$|M_{\max}| = 320 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

8-12 简支梁绝对最大弯矩与跨中截面的最大弯矩相差多少？

简支梁的绝对最大弯矩所在截面位于跨中附近，离跨中的距离为 $\pm \frac{a}{2}$ 。 a 为产生绝对最大弯矩时梁上实有荷载的合力 R 的作用线与绝对最大弯矩所在截面的距离， $a > 0$ 时， R 在此截面右边， $a < 0$ 时， R 在此截面的左边。

如图 8-12-1 所示， C 为简支梁中点，绝对最大弯矩发生在 D 截面 (P_k 为 P_3)， R 在 D 的右边 ($a > 0$)。在这种情况下，一般说，当 $P_k = P_3$ 在跨中 C 时，是 M_C 的荷载最不利位置。

$$\text{而} \quad M_{D,\max} = R \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right)^2 \frac{1}{l} - M_k$$

$$M_{C,\max} = \frac{R}{l} \left(\frac{l}{2} - a \right) \frac{l}{2} - M_k$$

$$\text{两者相差} \quad M_{D,\max} - M_{C,\max} = \frac{R}{l} \left[\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right)^2 - \left(\frac{l}{2} - a \right) \frac{l}{2} \right] = \frac{Ra^2}{4l}$$

$a < 0$ 时，两者的差值公式相同。

如图 8-12-2 所示，图 (a) 为产生绝对最大弯矩的荷载位置， $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 82 \text{ kN}$ 。

$a = 0.75$ ， $R = 4 \times 82 = 328 \text{ kN}$ ， $l = 12 \text{ m}$ ， $M_{D,\max} = \frac{R}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{a}{2} \right)^2 - M_k = 577.84 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。图 (b)

为跨中截面 C 荷载最不利位置， $R_A = \frac{R}{l} \left(\frac{l}{2} - a \right) = 143.5 \text{ kN}$ ， $M_{C,\max} = 574 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 。两者相差

$$M_{D,\max} - M_{C,\max} = 3.84 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\text{而} \quad \frac{Ra^2}{4l} = 3.84 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

在设计中一般采用 $M_{C,\max}$ 代替绝对最大弯矩，误差不大，如本例为 0.66%。

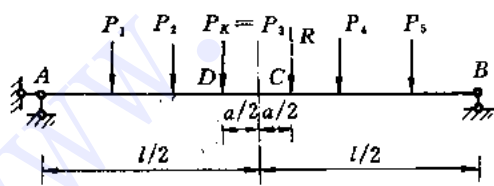


图 8-12-1

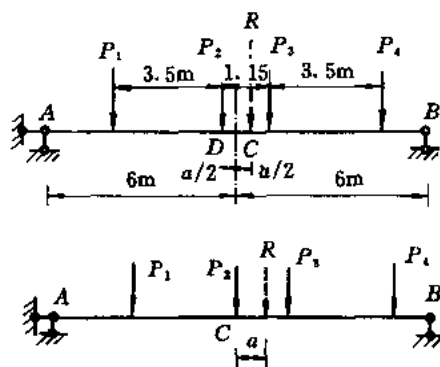


图 8-12-2

第九章 结构矩阵分析

9-1 在结构矩阵分析中什么叫柔度法、刚度法和直接刚度法？

在结构矩阵分析中以力法为基础的方法称为矩阵力法，因矩阵力法使用力法基本结构的柔度矩阵，故又叫柔度法。以位移法为基础的，称为矩阵位移法，因矩阵位移法使用结构的刚度矩阵故又叫刚度法。直接刚度法是矩阵位移法中推导结构刚度方程的一种方法，这种方法是直接利用刚度系数的物理意义来建立刚度方程，具体作法详见 9-4。如图 9-1-1 所示为第 e 个单元(图中所示均为杆端力与杆端位移的正方向，本章下同)，其单元刚度方

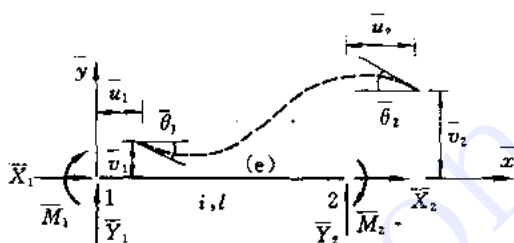


图 9-1-1

程为

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} & 0 & -\frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} \\ 0 & -\frac{6i}{l} & 4i & 0 & \frac{6i}{l} & 2i \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} & 0 & \frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ 0 & -\frac{6i}{l} & 2i & 0 & \frac{6i}{l} & 4i \end{bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

方程中的单元刚度矩阵内各个元素就是直接利用刚度系数的物理意义求得。刚度系数的物理意义是产生单位位移时所需施加的力。根据转角位移方程，当 $v_2=1$ ，其它位移为零时，在杆端所需施加的力如图 9-1-2 所示。将这些力按顺序排成列阵就是单元刚度矩阵中的第 5 列，其它各列元素均可按此法求得。对于杆系结构用直接刚度法比较简单。

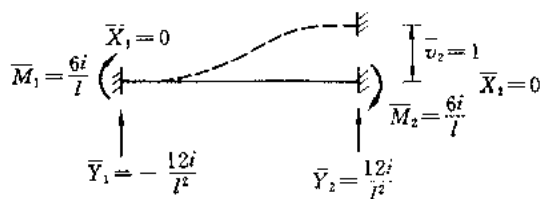


图 9-1-2

9-2 矩阵位移法是如何确定基本未知量的?

矩阵位移法中基本未知量的确定不是唯一的,它与单元如何划分,是否考虑轴向变形以及如何编写程序等因素有关。下面结合具体例子进行讨论。

图 9-2-1 所示的连续梁,要求作 M 图和求 A 点的挠度。其基本未知量的选取根据不同考虑就有不同的内容。通常取支座处截面转角作为基本未知量,在这里即把结构划分为 ①、② 两个单元,取 θ_1, θ_2 作基本未知量(位移法中 θ_2 通常不做基本未知量)。这种做法的好处是使计算规格化且单元数较少。其单元刚度矩阵可统一写成

$$\begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix}^{\text{②}}$$

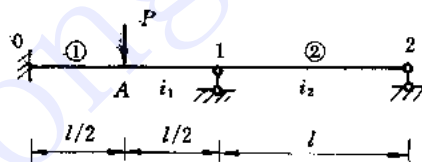


图 9-2-1

求得 θ_1, θ_2 后即可求出各杆端力矩,再用迭加法作出 M 图。将杆 ① 视作两端固端梁在荷载 P 和右端支座转动 θ_1 作用下,用单位荷载法计算即可求出 A 点挠度 v_A 。当用计算机算出 θ_1, θ_2 和杆端弯矩后,为求 M_A 和 v_A 须另编程序计算。

为了减少基本未知量,较支座处转角 θ_2 不取作未知量。但这种做法带来的缺点是单元刚度矩阵不统一,使编排程序复杂化,此法中两单元的刚度方程分别为

$$\begin{cases} M_0 \\ M_1 \end{cases}^{\text{①}} = \begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix}^{\text{①}} \begin{cases} \theta_0 \\ \theta_1 \end{cases}^{\text{①}} \quad (M_1)^{\text{②}} = [3i_2]^{\text{②}} (\theta_1)^{\text{②}}$$

在电算中一般不采用这种做法,当用手算时就显得方便得多。

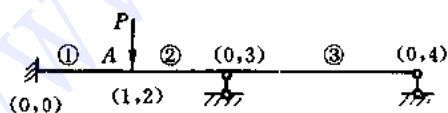


图 9-2-2

为减少机外的工作量和另编程序,本例可按图 9-2-2 划分单元和选取基本未知量。图中,圆圈内数字为单元号,括号内的数字为基本未知量定位号,前为竖向位移,后为转角,“0”表示位移为零。这种做法是把 A 点也

看成结点, v_A 和 θ_A 取作基本未知量。这样就可以直接由电算算出 v_A 和 M_A 。但这样做时增加了单元数目,同时单元刚度矩阵阶数提高,即

$$[k]^{③} = \begin{bmatrix} \frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} & -\frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} \\ -\frac{6i}{l} & 4i & \frac{6i}{l} & 2i \\ -\frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ -\frac{6i}{l} & 2i & \frac{6i}{l} & 4i \end{bmatrix}^{③}$$

为了规格化,单元③也采用上式。

对于不考虑轴向变形的刚架,确定基本未知量一般也有两种做法(以图 9-2-3(a)所示刚架为例)。一种做法是认为每一个刚结点都有三个位移分量(水平位移 u , 竖向位移 v 和转角位移 θ), 其定位号如图(a)所示。不考虑轴向变形反映在取 $EA \rightarrow \infty$, 因此在 6×6 的单元刚度矩阵中, 元素 $\frac{EA}{l}$ 取很大的一个数。这种做法在编排由单元刚度矩阵集成结构刚度矩阵的程序时比较简单, 但存在两个问题, 一是结构刚度矩阵阶数高(6×6), 二是结构刚度矩阵容易成为病态矩阵(有的主元素数值大, 有的少), 影响解的精度。

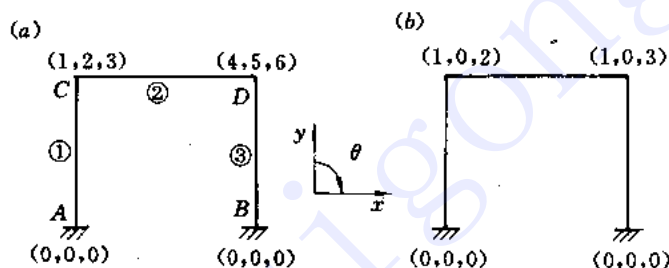


图 9-2-3

另一种做法是在确定基本未知量时就不考虑轴向变形, 在图(a)中, 因不考虑轴向变形, 故 C 点和 D 点竖向位移为零, 水平位移相等, 此时基本未知量的定位号如图(b), 其中位移相等的编成同一号, 这种做法降低了结构刚度矩阵阶数(是 3×3), 且其中不含有很大的数, 但编排程序要复杂一些, 如由单元刚度矩阵集成结构刚度矩阵时遇到定位号为零时应不往结构刚度矩阵中传送(第一种做法采用后处理就没有这个问题)。

由上述分析可以看出, 基本未知量的选取不是唯一的。基本矛盾是编排程序难易和计算机容量, 输出的信息多与寡。当然, 这只是就基本理论而言, 在目前计算机发展的时代, 编排程序并不仅以此为标准。

9-3 在矩阵分析中如何处理铰结点?

图 9-3-1(a)中, A 为连接不在一条直线上的两直杆的铰结点, B 为连接共线的两直杆的铰结点。对铰结点的一种处理办法是在划分单元时将其看成结点, 按此确定单元数和基本未知量数目。如图(a)中所示单元号和基本未知量定位号, 是考虑轴向变形时的编码。

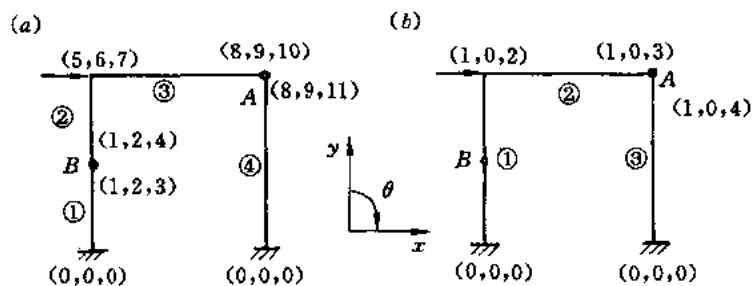


图 9-3-1

为了减少基本未知量, B 可以不看成结点。若不考虑轴向变形, 其单元号和基本未知量定位号则如图(b)所示。采用这种处理方法时, 出现了含铰的单元, 其单元刚度矩阵和固端力列阵都与不带铰的连续杆单元的不同。

下面就连续梁单元中有铰的情况进行讨论。设铰在单元中任意位置, 如图 9-3-2 所示。其刚度方程仍为

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

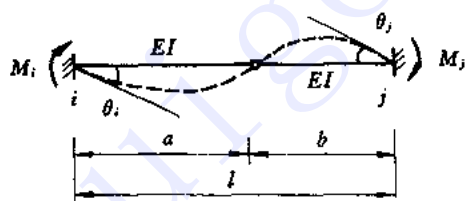


图 9-3-2

式中 k_{ij} 为刚度系数, 其值为当 j 方向有单位转角时, 在 i 方向所需加的力矩, 下面确定其各元素之值。

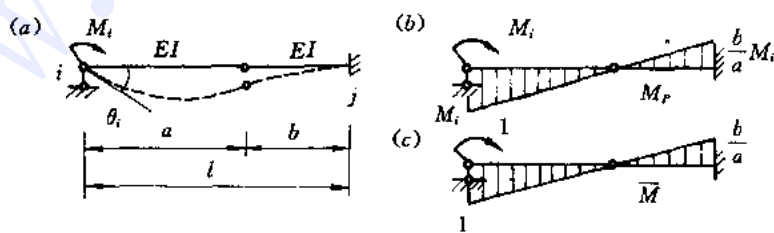


图 9-3-3

如图 9-3-3(a)所示, 当 i 端作用 M_i , 可根据单位荷载法求得 θ_i 。

$$\theta_i = \frac{M_i}{3EI} \left(\frac{a^3 + b^3}{a^2} \right)$$

当 $\theta_i = 1$,

$$M_i = 3EI \left(\frac{a^2}{a^3 + b^3} \right) = 3i \left(\frac{a^2 l}{a^3 + b^3} \right)$$

$$M_j = \frac{b}{a} M_i = 3i \left(\frac{abl}{a^3 + b^3} \right)$$

同理, 当 $\theta_j = 1$, 有

$$M_j = 3i \left(\frac{b^2 l}{a^3 + b^3} \right), \quad M_i = 3i \left(\frac{abl}{a^3 + b^3} \right)$$

则图 9-3-2 所示单元的刚度矩阵为

$$[k]^{\text{e}} = \frac{3il}{a^3 + b^3} \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$$

当铰位于单元中点时, $a=b=\frac{l}{2}$, 则 $[k]^{\text{e}} = \begin{bmatrix} 3i & 3i \\ -3i & 3i \end{bmatrix}$ 。

对于不计轴向变形的有侧移刚架单元(如图 9-3-4), 也可由刚度系数的定义导出其单元刚度矩阵为

$$[k]^{\text{e}} = \frac{3il}{a^3 + b^3} \begin{bmatrix} 1 & -a & -1 & -b \\ -a & a^2 & a & ab \\ -1 & a & 1 & b \\ -b & ab & b & b^2 \end{bmatrix}$$

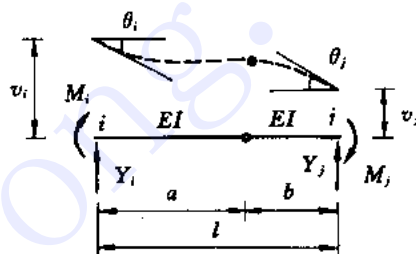


图 9-3-4

单元杆端力向量为 $\{F\}^{\text{e}} = [Y_i, M_i, Y_j, M_j]^T$,

单元杆端位移向量为 $\{\Delta\}^{\text{e}} = [v_i, \theta_i, v_j, \theta_j]^T$, 读者可自行推证。

带铰单元的固端力也需另行推导。如图 9-3-5(a)、(b)所示。图(a)的单元固端弯矩为

$$m_{AB} = -\frac{qa^2}{8} \left(\frac{a^3 + 4b^3 + 3b^4/a}{a^3 + b^3} \right)$$

$$m_{BA} = \frac{qb^2}{8} \left(\frac{b^3 + 4a^3 + 3a^4/b}{a^3 + b^3} \right)$$

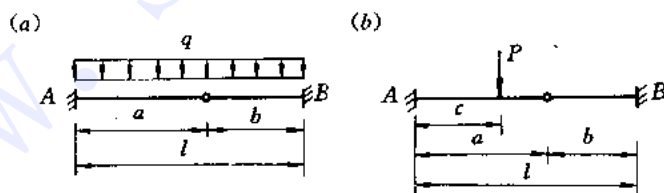


图 9-3-5

图(b)的单元固端弯矩为

$$m_{AB} = -\frac{Pc}{2} \left[2 - \frac{ac(3a-c)}{a^3 + b^3} \right]$$

$$m_{BA} = \frac{Pc}{2} \left[\frac{bc(3a-c)}{a^3 + b^3} \right]$$

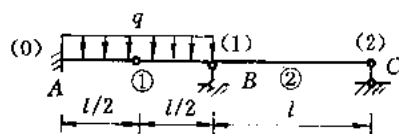


图 9-3-6

例 用矩阵位移法作图 9-3-6 所示结构的 M 图。各杆 EI 相同。

解 结构划分为两个单元。对支承条件采用前处理，则基本未知量的定位号如图中圆括号内数字所示，设 $i=1$ 单元刚度矩阵：

$$[k]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad [k]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

单元固端力列阵： $\{F_0\}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ql^2}{8} \\ \frac{ql^2}{8} \end{bmatrix}^T$ ， $\{F_0\}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

由单元刚度矩阵按对号入座集成结构刚度矩阵。

$$[k] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3+4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

由单元固端力列阵集成荷载列阵

$$\{P\} = - \begin{Bmatrix} \frac{ql^2}{8} + 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{8} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

建立基本方程 $[K]\{\Delta\} = \{P\}$

即
$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{8} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

解方程得
$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{48} \\ \frac{ql^2}{96} \end{Bmatrix}$$

求各单元杆端力 $\{F\}^{(1)} = [K]^{(1)}\{\Delta\}^{(1)} + \{F_0\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{16}ql^2 \\ \frac{1}{16}ql^2 \end{Bmatrix}$

$$\{F\}^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{48} \\ \frac{ql^2}{96} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{16} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

作 M 图如图 9-3-7 所示。

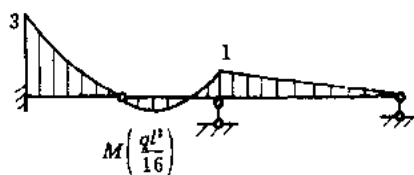


图 9-3-7

9-4 “对号入座”集成法的实质是什么？

在直接刚度法中，结构刚度矩阵 $[K]$ 是由单元刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ 按“对号入座”规则集成的。即把 $[k]^{(e)}$ 的杆端的定位号(局部坐标下)换成相应的结构结点定位号(这一步通常称为换码)，搬到 $[K]$ 中相应编号的位置(通称对号入座)，最后在 $[K]$ 中，同一号码位置上的元素相加(无数值的填“0”)，称为集合。

在这里，“换码”的实质是满足变形协调条件(单元集合是在位移内容一致下进行)，“集合”的实质是满足平衡条件。因此，上述形成结构刚度矩阵的过程，就是使单元集合时同时满足变形协调和平衡条件的过程。

通过位移法和矩阵位移法对比，这种实质看得更加清楚。试看下例。

图9-4-1(a)示一刚架，考虑轴向变形。设 $\Delta_1 = u_B$, $\Delta_2 = v_B$, $\Delta_3 = \theta_B$, $\Delta_4 = u_C$, $\Delta_5 = \theta_C$ ，其单

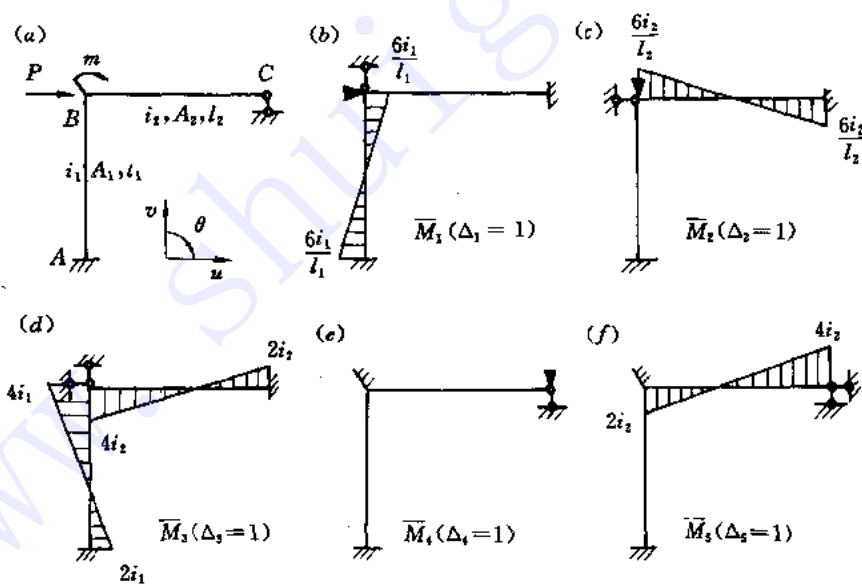


图 9-4-1

位位移下的弯矩图如图(b)~(f)所示。刚度系数为

$$r_{11} = \frac{EA_2}{l_2} + \frac{12i_1}{l_1^3}, r_{12} = r_{21} = 0, r_{13} = r_{31} = -\frac{6i_1}{l_1}, r_{14} = r_{41} = -\frac{EA_2}{l_2},$$

$$r_{15} = r_{51} = 0, r_{22} = \frac{EA_1}{l_1} + \frac{12i_2}{l_2^2}, r_{23} = r_{32} = -\frac{6i_2}{l_2}, r_{24} = r_{42} = 0, r_{25} = r_{52} = -\frac{6i_2}{l_2},$$

$$r_{33} = 4i_1 + 4i_2, r_{34} = r_{43} = 0, r_{35} = r_{53} = 2i_2, r_{44} = \frac{EA_2}{l_2}, r_{45} = r_{54} = 0, r_{55} = 4i_2$$

按位移法求解，其基本方程(平衡方程)为各个附加约束中的约束反力均应等于零，即

$$\begin{aligned} \sum X_B = 0, & \quad \left(\frac{12i_1}{l_1^2} + \frac{EA_2}{l_2} \right) \Delta_1 + 0 \cdot \Delta_2 - \frac{6i_1}{l_1} \Delta_3 + \left(-\frac{EA_2}{l_2} \right) \Delta_4 + 0 \cdot \Delta_5 = P \\ \sum Y_B = 0, & \quad 0 \cdot \Delta_1 + \left(\frac{12i_2}{l_2^2} + \frac{EA_1}{l_1} \right) \Delta_2 - \frac{6i_2}{l_2} \Delta_3 + 0 \cdot \Delta_4 - \frac{6i_2}{l_2} \Delta_5 = 0 \\ \sum M_B = 0, & \quad -\frac{6i_1}{l_1} \Delta_1 - \frac{6i_2}{l_2} \Delta_2 + (4i_1 + 4i_2) \Delta_3 - 0 \cdot \Delta_4 + 2i_2 \Delta_5 = m \\ \sum X_C = 0, & \quad -\frac{EA_2}{l_2} \Delta_1 + 0 \cdot \Delta_2 + 0 \cdot \Delta_3 + \frac{EA_2}{l_2} \Delta_4 + 0 \cdot \Delta_5 = 0 \\ \sum M_C = 0, & \quad 0 \cdot \Delta_1 - \frac{6i_2}{l_2} \Delta_2 + 2i_2 \Delta_3 + 0 \cdot \Delta_4 + 4i_2 \Delta_5 = 0 \end{aligned}$$

写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{12i_1}{l_1^2} + \frac{EA_2}{l_2} & 0 & -\frac{6i_1}{l_1} & -\frac{EA_2}{l_2} & 0 \\ 0 & \frac{12i_2}{l_2^2} + \frac{EA_1}{l_1} & -\frac{6i_2}{l_2} & 0 & -\frac{6i_2}{l_2} \\ -\frac{6i_1}{l_1} & -\frac{6i_2}{l_2} & 4i_1 + 4i_2 & 0 & 2i_2 \\ -\frac{EA_2}{l_2} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{l_2} & 0 \\ 0 & -\frac{6i_2}{l_2} & 2i_2 & 0 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

缩写成

$$[K]\{\Delta\} = \{P\}$$

(A)

按矩阵位移法求解，其整体坐标下定位编码如图 9-4-2。

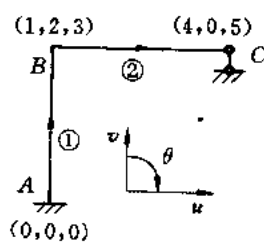


图 9-4-2

杆件定位向量为：局部坐标下

整体坐标下

$$\text{杆(1)} \quad \{\bar{\lambda}\}^{(1)} = (\bar{1} \quad \bar{2} \quad \bar{3} \quad \bar{4} \quad \bar{5} \quad \bar{6})^{(1)T} \quad \{\lambda\}^{(1)} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3)^{(1)T}$$

$$\text{杆(2)} \quad \{\bar{\lambda}\}^{(2)} = (\bar{1} \quad \bar{2} \quad \bar{3} \quad \bar{4} \quad \bar{5} \quad \bar{6})^{(2)T} \quad \{\lambda\}^{(2)} = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 0 \ 5)^{(2)T}$$

单元刚度矩阵

$$\begin{aligned}
 [\bar{k}]^{(1)} &= \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{6} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{EA_1}{l_1} & 0 & 0 & -\frac{EA_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12i_1}{l_1^2} & -\frac{6i_1}{l_1} & 0 & -\frac{12i_1}{l_1^2} & -\frac{6i_1}{l_1} \\ 0 & -\frac{6i_1}{l_1} & 4i_1 & 0 & \frac{6i_1}{l_1} & 2i_1 \\ -\frac{EA_1}{l_1} & 0 & 0 & \frac{EA_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12i_1}{l_1^2} & \frac{6i_1}{l_1} & 0 & \frac{12i_1}{l_1^2} & \frac{6i_1}{l_1} \\ 0 & -\frac{6i_1}{l_1} & 2i_1 & 0 & \frac{6i_1}{l_1} & 4i_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{1} & 0 \\ \bar{2} & 0 \\ \bar{3} & 0 \\ \bar{4} & 1 \\ \bar{5} & 2 \\ \bar{6} & 3 \end{matrix} \end{matrix} \\
 [\bar{k}]^{(2)} &= \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{6} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{EA_2}{l_2} & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12i_2}{l_2^2} & -\frac{6i_2}{l_2} & 0 & -\frac{12i_2}{l_2^2} & -\frac{6i_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{6i_2}{l_2} & 4i_2 & 0 & \frac{6i_2}{l_2} & 2i_2 \\ -\frac{EA_2}{l_2} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12i_2}{l_2^2} & \frac{6i_2}{l_2} & 0 & \frac{12i_2}{l_2^2} & \frac{6i_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{6i_2}{l_2} & 2i_2 & 0 & \frac{6i_2}{l_2} & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \bar{1} & 1 \\ \bar{2} & 2 \\ \bar{3} & 3 \\ \bar{4} & 4 \\ \bar{5} & 0 \\ \bar{6} & 5 \end{matrix} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

经坐标转换、换码并考虑“逢零不送”原则(即换码后整体坐标下的单元刚度矩阵中定位向量为零的行和列的元素,不往整体刚度矩阵[K]中输送)后,单元刚度矩阵写成

$$[\bar{k}]^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{12i_1}{l_1^2} & 0 & -\frac{6i_1}{l_1} \\ 0 & \frac{EA_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{6i_1}{l_1} & 0 & 4i_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} ,$$

$$[\bar{k}]^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{EA_2}{l_2} & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{l_2} & 0 \\ 0 & \frac{12i_2}{l_2^2} & -\frac{6i_2}{l_2} & 0 & -\frac{6i_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{6i_2}{l_2} & 4i_2 & 0 & 2i_2 \\ -\frac{EA_2}{l_2} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{l_2} & 0 \\ 0 & -\frac{6i_2}{l_2} & 2i_2 & 0 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

最后由 $[k]^{(1)}$ 和 $[k]^{(2)}$ 按“对号入座”送入 $[K]$ ，过程如下：

$$\begin{bmatrix} \frac{12i_1}{l_1^2} & 0 & -\frac{6i_1}{l_1} & & & \\ \frac{EA_2}{l_2} & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{l_2} & 0 & \\ \hline 0 & \frac{EA_1}{l_1} & 0 & & & \\ 0 & \frac{12i_2}{l_2^2} & -\frac{6i_2}{l_2} & 0 & -\frac{6i_2}{l_2} & \\ \hline -\frac{6i_1}{l_1} & 0 & 4i_1 & & & \\ 0 & -\frac{6i_2}{l_2} & 4i_2 & 0 & 2i_2 & \\ \hline -\frac{EA_2}{l_2} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{l_2} & 0 & \\ \hline 0 & -\frac{6i_2}{l_2} & 2i_2 & 0 & 4i_2 & \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \quad (B)$$

(B)式中的前3格(虚线划分)中，上一行数为属于 $[k]^{(1)}$ 的元素，下一行数为属于 $[k]^{(2)}$ 的元素，按“相重叠加”后得到 $[K]$ ，与式(A)中的 $[K]$ 完全相同。

因为式(A)是满足平衡条件且变形协调自然满足，因此，矩阵位移法中换码和集成得到的 $[K]$ 所建立的基本方程也满足这两方面条件。

9-5 弹性支座和支座移动如何处理？

先讨论支座移动情况。所谓支座移动是指支座处结点位移量为已知。计算中通常采用两种方法。一种是把它当成外干扰，求单元固端力列阵，再转换为等效结点荷载，这时该支座处位移以零计；另一种是将该位移先作为基本未知量建立结构刚度方程，然后再根据其已知值对刚度方程进行修改，下面结合具体例子进一步解释。

图 9-5-1(a)示两跨连续梁，已知支座 C 下沉 a 值。

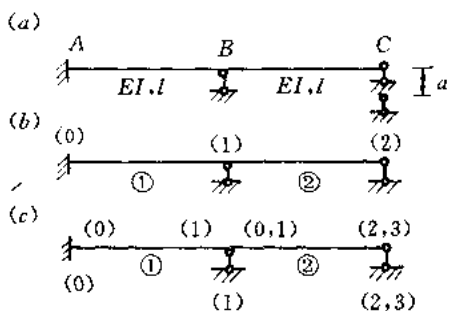


图 9-5-1

前一种做法：在矩阵位移法中，杆端力分为两部分，一部分是基本未知量为零时（即锁住状态），在外界干扰力作用下产生的固端力，此例中就是锁住 B, C 结点，然后 C 向下移动 a 而产生的固端力。当对支承条件采用前处理时，其定位号则如图 (b) 所示，这时固端力列阵为

$$\{F_0\}^{\text{①}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{F_0\}^{\text{②}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{6EI}{l^2}a & -\frac{6EI}{l^2}a \end{pmatrix}$$

另一部分是仅由基本未知量 θ_B, θ_C 产生的杆端力，它通过

$$[K]\{\Delta\} = \{P\}$$

求出 $\{\Delta\}$ ，再通过 $\{F_1\}^{\text{②}} = [K]^{\text{②}}\{\Delta\}^{\text{②}}$ 求出此部分杆端力列阵，这时应注意的是在 $\{\Delta\}$ 中不包括 C 点已知竖向位移 a 。具体算法如下：

$$[k]^{\text{①}} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad [k]^{\text{②}} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 + 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\{P\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{6EI}{l^2} a$$

由 $\{\Delta\} = [K]^{-1}\{P\}$ 解得 $\Delta = \begin{pmatrix} \frac{3a}{7l} & \frac{9a}{7l} \end{pmatrix}^T$

最后得 $\{F\}^{\text{①}} = \{F_1\}^{\text{①}} + \{F_0\}^{\text{①}} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3a}{7l} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6EI}{7l^2}a \\ \frac{12EI}{7l^2}a \end{pmatrix}$

$$\{F\}^{\textcircled{2}} = \{F_1\}^{\textcircled{2}} + \{F_0\}^{\textcircled{2}} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{3a}{7l} \\ \frac{9a}{7l} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{6EI}{l^2}a \\ -\frac{6EI}{l^2}a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{12EI}{7l^2}a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

M 图如图 9-5-2 所示。

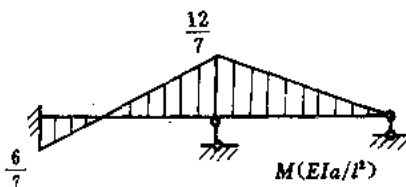


图 9-5-2

再看另一种处理方法：把 C 点竖向位移先看作基本未知量，其单元定位号和整体定位号如图 9-5-1(c) 所示，此时因无外载，故结点荷载列阵为 $\{P\} = (0 \quad 0 \quad 0)^T$ 其单元刚度矩阵为

$$[k]^{\textcircled{1}} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[k]^{\textcircled{2}} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 4 & \frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 2 & \frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix}$$

按对号入座集成 $[K]$ 后，得到结构刚度方程为

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 8 & \frac{6}{l} & 2 \\ \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ 2 & \frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

利用 $v_2 = -a$ 的已知条件对上述刚度方程进行修改。修改的原则是使修改后的方程能解出 $v_2 = -a$ ，又不影响其它未知量的值。做法是将 $[K]$ 中与已知位移相应行的主元素改成一个足够大的数 A ，在 $\{P\}$ 中与已知位移相应行的元素改成 A 乘该已知位移的值，按此，上面 (a) 式修改成：

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 8 & \frac{6}{l} & 2 \\ \frac{6}{l} & A \frac{l}{EI} & \frac{6}{l} \\ 2 & \frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Aa \\ 0 \end{Bmatrix}$$

显然, 当展开上式时, 其中一个方程为

$$\frac{EI}{l} \left(\frac{6}{l} \theta_1 + A \frac{l}{EI} v_2 + \frac{6}{l} \theta_3 \right) = -Aa$$

当 A 是很大时, 上式左边第一、三项相应很小, 即可得到 $v_2 = -a$, 于是从修改后的基本方程可求得

$$\{\Delta\} = (\theta_1 \quad v_2 \quad \theta_3)^T = \left(\frac{3a}{7l} \quad -a \quad \frac{9a}{7l} \right)^T$$

则 $\{F\}^{\text{①}} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3a \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{6EIa}{7l^2} (1 \quad 2)^T$

$$\{F\}^{\text{②}} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 4 & \frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 2 & \frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3a}{7l} \\ -a \\ \frac{9a}{7l} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{l} \\ -1 \\ -\frac{1}{l} \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{12EI}{7l^2} a$$

其 M 图如图 9-5-2 所示。

在上述修改中为什么不把 $[K]$ 中与已知位移相应行的副元素改成零, 主元素改成 1, $\{P\}$ 中相应行的改成已知位移值呢? 当然, 这样做也是可以的。不过因其相应列的副元素不改为零, 结构刚度矩阵就不对称了, 这引起解方程的程序复杂化。

应当注意的是后一种做法破坏了原结构刚度矩阵, 若要计算另一组荷载的反应, 必须再修改回来。

下面讨论具有弹性支座的结构应如何处理。在结构刚度矩阵中, k_{ii} 表示要使第 i 结点位移分量 $\Delta_i = 1$ (其它结点位移分量均为零) 时, 在第 i 结点位移分量的方向需施加的力。弹性支座的刚度系数将反映在有关的主元素中, 如图 9-5-3(a), (b) 所示的结构, 两者区别只是在右端滑动支座处, 图 (b) 多了一个弹簧支座 (弹簧常数为 k), 设 B 点转角 θ_B 为第 1 基本未知量, C 点竖向位移为第 2 基本未知量。不难

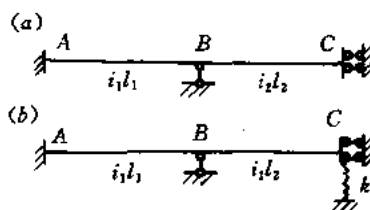


图 9-5-3

求得其结构刚度矩阵中的第二行、第二列元素, 对图 (a) 为 $k_{22} = \frac{12i_2}{l_2^2}$, 对图 (b) 为 $k_{22} = \frac{12i_2}{l_2^2} + k$

+k。根据上述分析,对于弹性支座的处理是:撤去弹性支座以生成结构刚度矩阵,然后在与弹性支座相应的位移分量的主元素中加上该弹簧常数。这种处理方法也适用于转动的弹性支座。

例 作图 9-5-4 所示的结构的弯矩图。设 $EA=20EI$ (数值上), $l=6m, P=16kN$ 。

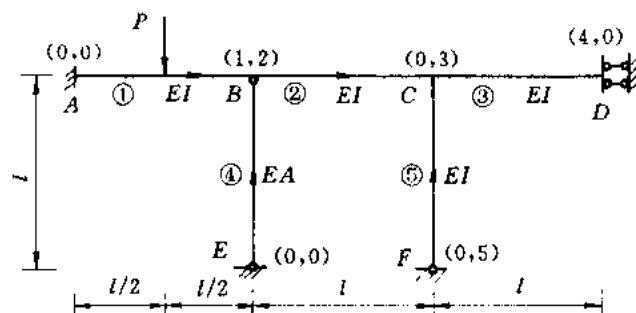


图 9-5-4

解 可有两种解法。第一种按五个单元,五个基本未知量计算,单元划分与结点位移定位号如图中所示。第二种是把它简化成图 9-5-5 所示具有弹性支座的两跨连续梁,其中拉压弹簧常数 $k_1 = \frac{EA}{l}$,转动弹簧常数 $k_2 = \frac{4EI}{l}$,下面按第二种做法解。

单元刚度矩阵

$$[k]^{①} = [k]^{②} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 4 & \frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 2 & \frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \frac{EI}{l}$$

2--- 单元 ①
3--- 单元 ②

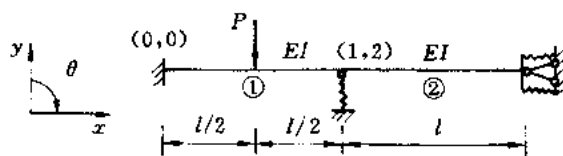


图 9-5-5

按对号入座集成结构刚度矩阵 $[K]$

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{12}{l^2} + \frac{6}{l} & \frac{6}{l} - \frac{6}{l} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} - \frac{6}{l} & 4 + 4 & 2 \\ -\frac{6}{l} & 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{EI}{l} = \begin{bmatrix} \frac{24}{l^2} & 0 & -\frac{6}{l} \\ 0 & 8 & 2 \\ -\frac{6}{l} & 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{EI}{l}$$

引入弹性支座条件,即在 $[\hat{K}]$ 中第1个主元素处加上 $k_1 = \frac{EA}{l} = \frac{20EI}{l}$,第3主元素处加上 $k_2 = \frac{4EI}{l}$,把 $l=6m$ 代入,修改后结构刚度矩阵为

$$[K] = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{62}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

单元固端力列阵 $\{F_0\}^{\text{①}} = (8 \quad -12 \quad 8 \quad 12)^T$

$$\{F_0\}^{\text{②}} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$$

集成等效结点荷载列阵 $\{P\} = (-8 \quad -12 \quad 0)^T$

解基本方程

$$\frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{62}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8 \\ -12 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

得 $\{\Delta\} = (v_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3)^T = \frac{l}{EI} (-0.37 \quad -1.59 \quad 0.35)^T$

单元杆端力

$$\{F\}^{\text{①}} = [k]^{\text{①}} \{\Delta\}^{\text{①}} - \{F_0\}^{\text{①}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.37 \\ -1.59 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 8 \\ -12 \\ 8 \\ 12 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.71 \\ -15.55 \\ 6.29 \\ 5.28 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\}^{\text{②}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.37 \\ -1.59 \\ 0 \\ 0.35 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.12 \\ -5.28 \\ -1.12 \\ -1.40 \end{Bmatrix}$$

因 C 点转角为 $\theta_3 = \theta_c = \frac{0.35l}{EI}$, 则有

$$M_{CD} = \frac{EI}{l} \cdot \frac{0.35l}{EI} = 0.35 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_{DC} = -0.35 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CF} = 3 \frac{EI}{l} \cdot \frac{0.35l}{EI} = 1.05 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

最后作 M 图(略)。

由上述计算可得 $N_{BE} = -6.29 - 1.12 = -7.41$

可验算 $v_1 = \frac{N_{BE}}{EA} = \frac{-7.41}{\frac{20EI}{l}} = -0.37 \frac{l}{EI}$

9-6 如何处理斜支杆支座和斜杆?

对图 9-6-1 所示的带斜杆(杆 AB)和斜支杆支座(支座 C)的结构有两种处理办法。一种是把支杆看成一个抗拉刚度为无穷大的桁架单元,斜杆看成一个单元来处理,其单元划分和结点位移定位号如图中所示,而单元定位向量 $\{\lambda\}^{\text{②}}$ 为

$$\{\lambda\}^{\text{①}} = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3)^T$$

$$\{\lambda\}^{\text{②}} = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)^T$$

$$\{\lambda\}^{\text{③}} = (0 \ 0 \ 4 \ 5)^T$$

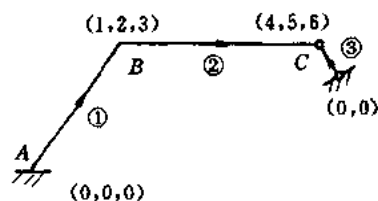


图 9-6-1

这种处理带来的问题是有刚度很大的单元,会降低解的精度。

另一种办法是通过修改结构刚度矩阵来实现。当图 9-6-1 所示结构不考虑轴向变形时,结点 B 的水平位移 u_1 和竖向位移 v_2 不作为两个独立变量,因 AB 杆不伸缩, B 点位移只能垂直于 AB,故 u_1 和 v_2 的比值是确定的。同理,结点 C 由于支杆约束,其水平位移 u_4 和竖向位移 v_5 的比值也是确定的。首先可把它们都作为基本未知量,然后再根据它们的比值对结构刚度方程进行修改。下面举例说明。

例 用矩阵位移法作图 9-6-2(a)所示结构的内力图,各杆 $EA \rightarrow \infty$, $EI=4$, 杆长 $l=4\text{m}$ 。

解 单元划分及结点位移定位号如图(b)所示。

单元刚度矩阵

局部坐标下

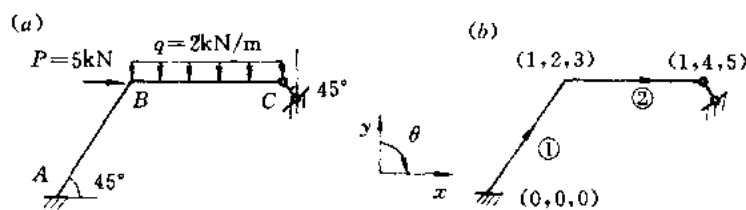


图 9-6-2

$$[\bar{k}]^{\text{①}} = [\bar{k}]^{\text{②}} = \begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 & -\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & -1.5 & 0 & -0.75 & -1.5 \\ 0 & -1.5 & 4 & 0 & 1.5 & 2 \\ -\infty & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & -0.75 & 1.5 & 0 & 0.75 & 1.5 \\ 0 & -1.5 & 2 & 0 & 1.5 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

整体坐标下 $[k]^{\text{②}} = [\bar{k}]^{\text{②}}$

$$[k]^{\text{①}} = [T]^T [k]^{\text{②}} [T]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \infty + 0.375 & \infty - 0.375 & 1.061 & -\infty - 0.375 & -\infty + 0.375 & 1.061 \\ \infty - 0.375 & \infty + 0.375 & -1.061 & -\infty + 0.375 & -\infty - 0.375 & -1.061 \\ 1.061 & -1.061 & 4 & -1.061 & 1.061 & 2 \\ -\infty - 0.375 & -\infty + 0.375 & -1.061 & \infty + 0.375 & \infty - 0.375 & -1.061 \\ -\infty + 0.375 & -\infty - 0.375 & 1.061 & \infty - 0.375 & \infty + 0.375 & 1.061 \\ 1.061 & -1.061 & 2 & -1.061 & 1.061 & 4 \end{bmatrix}$$

单元固端力列阵

$$\{F_0\}^{\text{①}} = \{0\}$$

$$\{F_0\}^{\text{②}} = (0 \quad 4 \quad -10.66 \quad 0 \quad 4 \quad 10.66)^T$$

集成 $[K]$ 和 $\{P\}$ 后, 得结构刚度方程为

$$\begin{bmatrix} \infty + 0.375 & \infty - 0.375 & -1.061 & 0 & 0 \\ \infty - 0.375 & \infty + 1.125 & -0.439 & -0.75 & -1.5 \\ -1.061 & -0.439 & 8 & 1.5 & 2 \\ 0 & -0.75 & 1.5 & 0.75 & 1.5 \\ 0 & -1.5 & 2 & 1.5 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -4 \\ 10.66 \\ -4 \\ -10.66 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

根据约束情况, 对结点 B 有 $v_2 = -u_1$, 对结点 C 有 $v_4 = u_1$, 依此按下列修改上述方程。把 $[K]$ 中第 2 列乘“-1”后, 将第 1、2、4 列相加合并, 再把第 2 行乘以“-1”后(包括荷载相应行), 第 1、2、4 行相加合并, 这样修改后上述方程变为

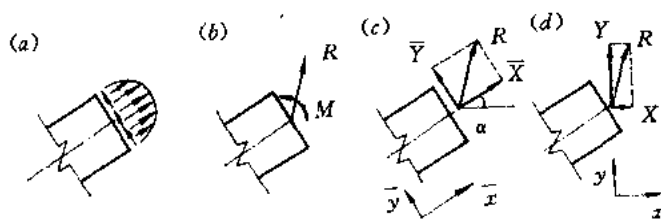


图 9-7-1

如图(d)所示,这里 \bar{X}, \bar{Y} 和 X, Y 是等价,它们之间的关系为

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix}$$

这就是利用坐标转换由 $(\bar{X} \ \bar{Y})^T$ 求 $(X, Y)^T$ 。

对于截面位移情况也一样,即同一个截面位移可表示成不同方向的位移分量。如图 9-7-2(a)的截面位移既可表示成局部坐标下的 \bar{u}, \bar{v} (图(b)所示),也可表示成整体坐标下

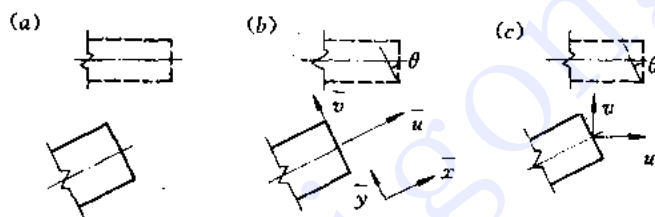


图 9-7-2

的 u, v (图(c)所示)。

有
$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix}$$

我们可以利用直接刚度法求得整体坐标下的单元刚度矩阵,即通过刚度系数的物理意义求得单元刚度矩阵中各刚度系数,如图 9-7-3 所示的整体坐标下杆端力和杆端位移。

其刚度方程 $[k]^\Delta \{\Delta\}^\Delta = \{F\}^\Delta$ 为

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_2 \\ M_3 \\ X_4 \\ Y_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}$$

对称

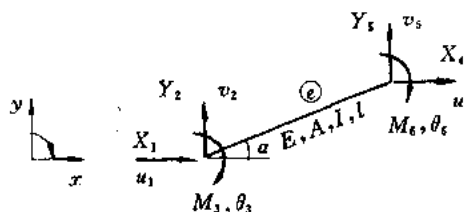


图 9-7-3

其中 $[k]^\Delta$ 中的第一行元素的物理意义就是当 $u_1=1$,其它位移为零时所产生的相应支座反

力。它可化成图 9-7-4(a)的问题，即当支座 A 向右移动单位位移时，在各支座产生的支座反力。

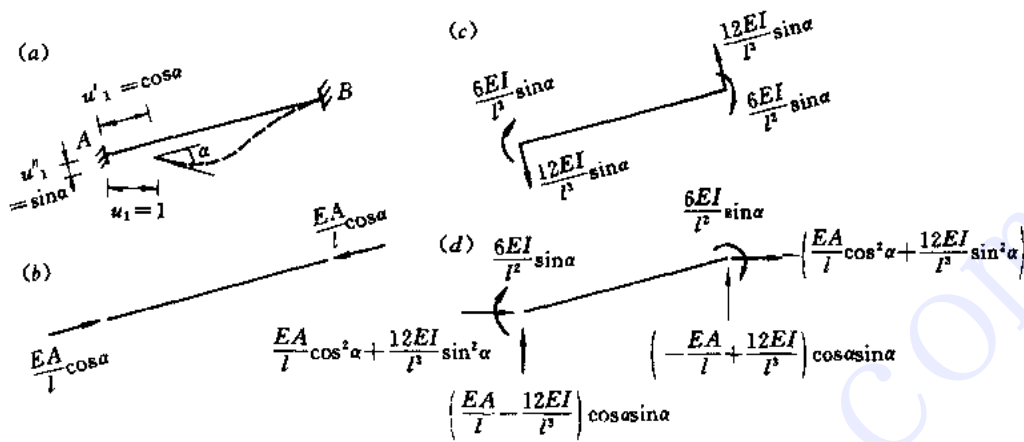


图 9-7-4

根据叠加原理 $u_1 = 1$ ，可分解成沿杆轴方向位移 $u_1' = \cos\alpha$ 和垂直于杆轴方向位移 $u_1'' = \sin\alpha$ ，前者产生的支座反力如图 (b) 所示，后者产生的支座反力(根据转角方程)如图 (c) 所示，图 (b) 和图 (c) 的合成后的支座反力(整体坐标)如图 (d) 所示。

同理我们可以求出单元刚度矩阵中其它各行的元素值，结果如下

$$[k]^{(e)} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & -s_1 & -s_2 & s_3 \\ s_4 & -s_5 & -s_2 & -s_4 & -s_5 & s_6 \\ & 2s_6 & -s_3 & s_5 & s_6 & \\ & & s_1 & s_2 & -s_3 & \\ \text{对称} & & & s_4 & s_5 & \\ & & & & & 2s_6 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } s_1 &= \frac{EA}{l} \cos^2\alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2\alpha, & s_2 &= \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \sin\alpha \cos\alpha \\ s_3 &= \frac{6EI}{l^2} \sin\alpha, & s_4 &= \frac{EI}{l} \sin^2\alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2\alpha \\ s_5 &= \frac{6EI}{l^2} \cos\alpha, & s_6 &= \frac{2EI}{l} \end{aligned}$$

下面先观察一个例题。

例 作图 9-7-5 所示结构的内力图，设 $EA \rightarrow \infty$ ， $EI=6$ ，各杆长 $l=6\text{m}$ 。

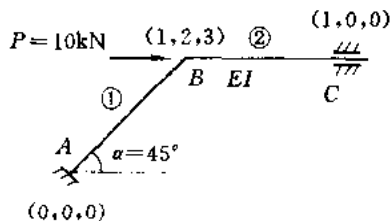


图 9-7-5

解 单元编号及结点定位编号如图。按公式(a)计算得各单元刚度矩阵为

单元① ($\alpha=45^\circ$) $s_1=\infty+\frac{1}{6}$, $s_2=\infty-\frac{1}{6}$, $s_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$s_4=\infty+\frac{1}{6}$, $s_5=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $s_6=2$

单元② ($\alpha=0^\circ$) $s_1=\infty$, $s_2=0$, $s_3=0$

$s_4=\frac{1}{3}$, $s_5=1$, $s_6=2$

$$[k]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \infty + \frac{1}{6} & \infty - \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\infty - \frac{1}{6} & -\infty + \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \infty + \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\infty + \frac{1}{6} & -\infty - \frac{1}{6} & -\infty - \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 4 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 & \\ & & \infty + \frac{1}{6} & \infty - \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \\ & & & \infty + \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \\ & & & & 4 & \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

对称

$$[k]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \infty & 0 & 0 & -\infty & 0 & 0 \\ & \frac{1}{3} & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ & & 4 & 0 & 1 & 2 \\ & & & \infty & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{3} & 1 \\ & & & & & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

对称

按对号入座集成结构刚度矩阵[K]

$$[K] = \begin{bmatrix} \left(\infty + \frac{1}{6}\right) + \infty - \infty + \infty - \infty & \left(\infty - \frac{1}{6}\right) + 0 & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 \\ \left(\infty - \frac{1}{6}\right) + 0 & \left(\infty + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3} & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 & 4 + 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \infty + \frac{1}{6} & \infty - \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \infty - \frac{1}{6} & \infty + \frac{1}{3} & -\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{2 + \sqrt{2}}{2} & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

求结点荷载列阵{P}，因这里只有直接的结点荷载，则

$$\{P\} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ (10 & 0 & 0)^T \end{matrix}$$

于是基本方程为：

$$\begin{bmatrix} \infty + \frac{1}{6} & \infty - \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \infty - \frac{1}{6} & \infty + \frac{1}{6} & \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

上式无法求解，鉴于不考虑轴向变形，则图中B点位移只能垂直杆AB轴线，因此有 $u_1 = -v_2$ 。这样可用-1乘第2列后与第1列相加合并，而且为了保证结构刚度矩对称性，再将第2行乘以-1(包括{P})后与第1行相加合并，如此修改后的方程为

$$\begin{matrix} & 1 & 2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 - \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

解得

$$\{\Delta\} = (u_1 \ v_2 \ \theta_3)^T = (10.22 \ -10.22 \ 0.529)^T$$

$$\{F\}^{\text{②}} = \begin{bmatrix} \infty + \frac{1}{6} & \infty - \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\infty - \frac{1}{6} & -\infty + \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \infty - \frac{1}{6} & \infty + \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\infty + \frac{1}{6} & -\infty - \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 4 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ -\infty - \frac{1}{6} & -\infty + \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \infty + \frac{1}{6} & \infty - \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\infty + \frac{1}{6} & -\infty - \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \infty - \frac{1}{6} & \infty + \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10.22 \\ -10.22 \\ 0.529 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{待定} \\ \text{待定} \\ -13.39 \\ \text{待定} \\ \text{待定} \\ -12.34 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\}^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 & -\infty & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ -\infty & 0 & 0 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10.22 \\ -10.22 \\ 0.529 \\ 10.22 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{待定} \\ -3.94 \\ 12.34 \\ \text{待定} \\ 3.94 \\ 11.28 \end{Bmatrix}$$

上述待定的数值可根据平衡条件确定, 如根据单元②右端支承情况, 可知 $\{F\}^{\textcircled{2}}$ 中第1、第4元素为零。又如根据结点B平衡, 如图9-7-6所示, 其中 P 和 Q_{BC} 已知, 则由平衡条

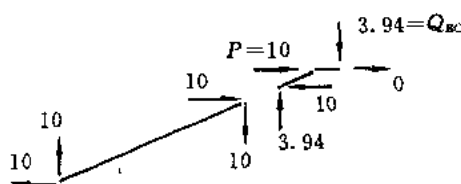


图 9-7-6

件可定出其它杆端力。这样有

$$\{F\}^{\textcircled{1}} = (-10 \quad 10 \quad -13.39 \quad 10 \quad -10 \quad -12.34)^T \text{ (单位 kN 和 m)}$$

$$\{F\}^{\textcircled{2}} = (0 \quad -3.94 \quad 12.34 \quad 0 \quad 3.94 \quad 11.28)^T$$

从上例可以看出, 不采用坐标变换(即不引入局部坐标)的计算方式是可以的。但它有两个主要缺点: 一是对处理结间荷载, 即求等效结点荷载要重新确定一套计算公式, 另一是对杆件轴线方位与整体坐标不一致的杆件, 不能直接得出杆端轴力和剪力。

9-8 矩阵分析中, 温度变化如何处理?

用矩阵位移法解杆系结构在温度变化时的反应, 所有计算步骤同荷载作用下的完全一样, 只是荷载列阵 $\{P\}$ 的内容上有所区别。结构仅在温度变化作用下没有实际的结点荷载, 所以实际结点荷载列阵 $\{P_n\} = \{0\}$, 而等效结点荷载列阵 $\{P_i\}$ 是单元由温度变化引起固端力列阵反号后按对号入座集成而得, 因此温度变化下的结点荷载列阵为

$$\{P\} = \{P_n\} + \{P_i\} = \{P_i\}$$

下面讨论温度变化下的单元固端力列阵。图9-8-1(a)示一单元, 长度 l , 截面高度 h , 局部坐标原点设在截面形心处, \bar{y} 为正的表面纤维为上纤维, 为负的为下纤维。上、下纤维距中性层的距离分别为 h_1, h_2 。上纤维处的温度变化为 t_1 , 下纤维为 t_2 , 温升时 t 为正, 温降时 t 为负。 α 为线胀系数。设温度变化沿截面高度分布是线性的, 则杆轴线处的温度变化 t_0 为

$$t_0 = \frac{h_1 t_2 + h_2 t_1}{h}$$

上、下纤维温变差为

$$\Delta t = t_1 - t_2$$

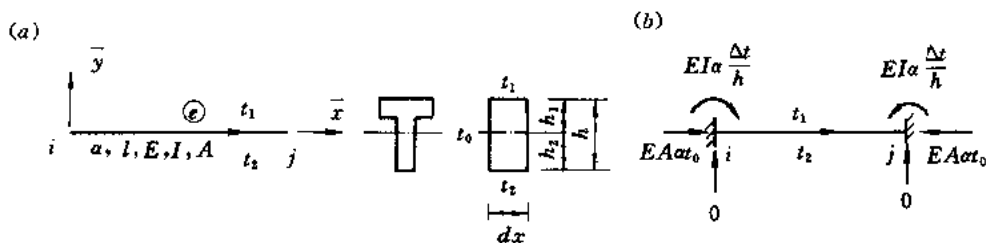


图 9-8-1

所谓固端力,是指当位移基本未知量为零时,由外部干扰所引起的杆端力,在矩阵位移法中,通常把各单元的端部位移当作基本未知量(无论是铰端、滑动端还是自由端等),这是为了单元分析规格化。所以图(a)所示单元的固端力可看成图(b)所示的两端固定杆在温度变化下产生的杆端力,它们不难用法定出,其结果如图(b)中所示,因此温度改变时局部坐标下单元固端力列阵 $\{\bar{F}_i\}^e$ 为

$$\{\bar{F}_i\}^e = \begin{Bmatrix} EA\alpha t_0 & 0 & EI\alpha \frac{\Delta t}{h} & -EA\alpha t_0 & 0 & -EI\alpha \frac{\Delta t}{h} \end{Bmatrix}^T$$

而整体坐标下单元固端力列阵 $\{F_i\}^e$ 为

$$\{F_i\}^e = [T]^T \{\bar{F}_i\}^e$$

其中 $[T]$ 为坐标转换矩阵。

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & & & \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & & [0] & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ [0] & & & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 α 由整体坐标 x 逆转至局部坐标 \bar{x} 量取。

例 用矩阵位移法作图 9-8-2 所示刚架的内力图。弹性模量 E =常数,线膨胀系数为 α ,各杆截面相同,矩形截面高度 $h=0.6\text{m}$,宽度 $b=0.4\text{m}$ 。

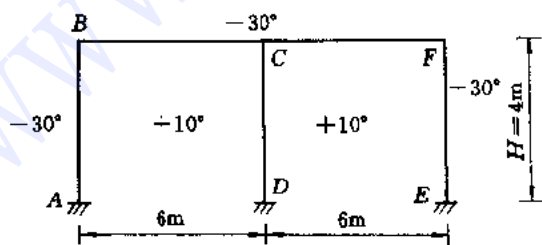


图 9-8-2

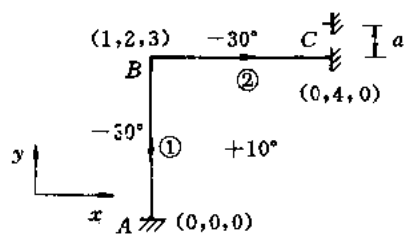


图 9-8-3

解 用矩阵位移法仍可利用对称性加以简化(即使用计算机也应这样做),因为本例结构对称,温度改变也对称,故简化为如图 9-8-3 所示的结构,其中 a 为已知值,它是 CD 杆由于温度改变的伸长值, $a = t_0 a H = 40a$ (设 CD 杆不计轴力引起的轴向变形)。按支座移动处理,这里采用修改刚度方程的办法。单元编号,结点位移定位号,整体坐标和局部坐标如图中所示。

单元刚度矩阵

$$A = \frac{I}{0.03}$$

$$[\bar{k}]^{\text{①}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.12} & 0 & 0 & -\frac{1}{0.12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{16} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{0.12} & 0 & 0 & \frac{1}{0.12} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{16} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix} EI,$$

$$[k]^{\text{①}} = [T]^T [\bar{k}]^{\text{①}} [T] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{0.12} & 0 & 0 & -\frac{1}{0.12} & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{16} & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{16} & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{1}{0.12} & 0 & 0 & \frac{1}{0.12} & 0 \\ -\frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} EI$$

($\alpha = 90^\circ$)

$$[\bar{k}]^{\text{②}} = [k]^{\text{②}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{1}{0.18} & 0 & 0 & -\frac{1}{0.18} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{0.18} & 0 & 0 & \frac{1}{0.18} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix} EI$$

单元固端力列阵 $t_0 = \frac{-30+10}{2} = -10^\circ\text{C}$, $\Delta t = -30 - (10) = -40^\circ\text{C}$

$$\{\bar{F}_i\}^{\text{①}} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{0.03} & 0 & -\frac{40}{0.6} & \frac{10}{0.03} & 0 & \frac{40}{0.6} \end{pmatrix}^T EI\alpha$$

$$\{F_i\}^{\text{①}} = [T]^T \{\bar{F}_i\}^{\text{①}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{10}{0.03} & -\frac{40}{0.6} & 0 & \frac{10}{0.03} & \frac{40}{0.6} \end{pmatrix}^T EI\alpha$$

$$\{F_i\}^{\text{②}} = \{\bar{F}_i\}^{\text{②}} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{0.03} & 0 & -\frac{40}{0.6} & \frac{10}{0.03} & 0 & \frac{40}{0.6} \end{pmatrix}^T EI\alpha$$

按对号入座集成[K]和{P}后,结构刚度方程为

$$\begin{bmatrix} 5.743 & 0 & -0.375 & 0 \\ 0 & 8.389 & -0.167 & -0.056 \\ -0.375 & -0.167 & 1.667 & 0.167 \\ 0 & -0.056 & 0.167 & 0.056 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 333.3\alpha \\ -333.3\alpha \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

由于 $v_4 = 40\alpha$, 上式修改后为

$$\begin{bmatrix} 5.743 & 0 & -0.375 \\ 0 & 8.389 & -0.167 \\ -0.375 & -0.167 & 1.667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 333.3\alpha \\ -331.1\alpha \\ -6.667\alpha \end{Bmatrix}$$

解上式,得 $\{\Delta\} = (58.375\alpha \quad -39.361\alpha \quad 5.189\alpha \quad 40\alpha)^T$

求单元杆端力

$$\{F\}^{\text{①}} = EI\alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{0.12} & 0 & 0 & -\frac{1}{0.12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{16} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{0.12} & 0 & 0 & \frac{1}{0.12} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{16} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -39.361 \\ -58.375 \\ 5.189 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{10}{0.03} \\ 0 \\ -\frac{40}{0.6} \\ \frac{10}{0.03} \\ 0 \\ \frac{40}{0.6} \end{Bmatrix} EI\alpha$$

$$= \begin{Bmatrix} -5.3 \\ 9.0 \\ -86.0 \\ 5.3 \\ -9.0 \\ 50.0 \end{Bmatrix} EI\alpha$$

$$\{\bar{F}\}^* = EI\alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{0.18} & 0 & 0 & -\frac{1}{0.18} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{0.18} & 0 & 0 & \frac{1}{0.18} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 58.375 \\ -39.361 \\ 5.189 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{10}{0.03} \\ 0 \\ -\frac{40}{0.6} \\ \frac{10}{0.03} \\ 0 \\ \frac{40}{0.6} \end{Bmatrix} EI\alpha$$

$$= \begin{Bmatrix} -9.0 \\ -5.3 \\ -50.0 \\ 9.0 \\ 5.3 \\ 81.6 \end{Bmatrix} EI\alpha$$

CD 杆的轴力由结点 C 平衡求得。

如果杆 AB 和 BC 不考虑轴力引起的轴向变形，则 u_1 和 v_2 也是已知的，即 $u_1 = 60\alpha$ ， $v_2 = -40\alpha$ 。这里求得 $u_1 = 58.375\alpha$ 是因为杆 BC 受拉力向左移动了

$$\frac{9EI\alpha}{EA} \times 6 = 1.62\alpha, \quad (60\alpha - 58.375\alpha = 1.62\alpha)$$

$v_1 = -39.36\alpha$ 是因为杆 AB 受拉向上伸长了

$$\frac{5.3EI\alpha}{EA} \times 4 = 0.6\alpha, \quad (40\alpha - 39.36\alpha = 0.6\alpha)$$

9-9 不同阶的各种类型单元刚度矩阵能否在一起使用？

可以。只要各单元的等效荷载列阵和定位向量的阶数与各单元刚度矩阵阶数相对应，对于集成整体刚度方程没有影响。例如图 9-9-1a 所示的组合结构和荷载（受弯杆件考虑

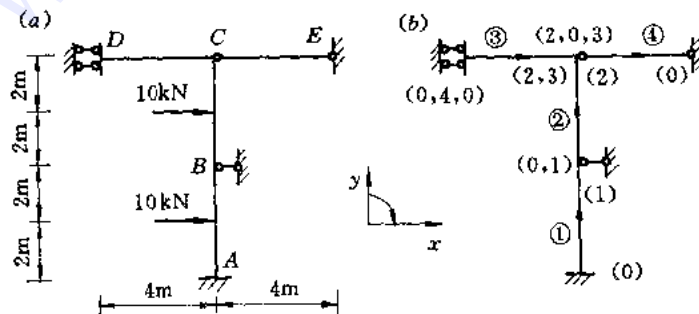
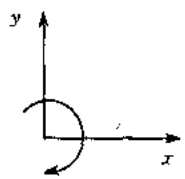


图 9-9-1

轴向变形), 杆 AB 轴力为零, 两端结点只有转角而无线位移, 属于连续梁单元, 其单元刚度矩阵为 $\begin{bmatrix} 4i & 2i \\ 2i & 4i \end{bmatrix}$ 。

杆 BC 两端有转角且有侧移但无轴向变形, 属一般梁式单元, 单元刚度矩阵为



$$\begin{bmatrix} \frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} & -\frac{12i}{l^2} & -\frac{6i}{l} \\ -\frac{6i}{l} & 4i & \frac{6i}{l} & 2i \\ -\frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} & \frac{12i}{l^2} & \frac{6i}{l} \\ -\frac{6i}{l} & 2i & \frac{6i}{l} & 4i \end{bmatrix}$$

杆 CD 两端有转角有侧移且有轴向位移, 属刚架单元, 单元刚度矩阵为 6×6 阶。杆 CE 是桁架单元, 其单元刚度矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当然, 对所有单元均采用刚架式单元刚度矩阵也是可以的, 而且程序简单且能直接算出连续梁单元杆端剪力。

当分别采用不同类型的单元刚度矩阵时, 单元固端力列阵的阶数宜分别与各单元刚度矩阵阶数对应。

例 用矩阵位移法作图 9-9-1a 所示结构的 M 图, 各杆 EI 和 EA 都相同, 且 $EA = 20EI$ 。

解 图(b)中标出单元号和单元定位向量的定位号(圆括号内数字), 其中 1 号为 B 点转角, 2 号为 C 点水平位移, 3 号为 C 点转角, 4 号为 D 点竖向位移, 单元定位向量 $\{\lambda\}^e$ 为

$$\begin{aligned} \{\lambda\}^1 &= (0 \quad 1)^T \\ \{\lambda\}^2 &= (0 \quad 1 \quad 2 \quad 3)^T \\ \{\lambda\}^3 &= (0 \quad 4 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 3)^T \\ \{\lambda\}^4 &= (2 \quad 0)^T \end{aligned}$$

单元刚度矩阵(整体坐标)

$$[k]^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} EI \quad [k]^2 = EI \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & 1 & -\frac{3}{8} & 0.5 \\ -\frac{3}{16} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{16} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & 0.5 & -\frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k]^{(3)} = EI \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{16} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 & \frac{3}{8} & 0.5 \\ -5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{16} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{3}{8} & 0.5 & 0 & \frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \quad [k]^{(4)} = EI \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

单元固端力列阵

$$\{F_0\}^{(1)} = (-5 \ 5)^T \quad \{F_0\}^{(2)} = (-5 \ -5 \ -5 \ 5)^T \\ \{F_0\}^{(3)} = \{0\} \quad \{F_0\}^{(4)} = \{0\}$$

按对号入座集成结构刚度矩阵[K]和结点荷载列阵{P}后,得基本方程

$$EI \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{8} & 10 + \frac{3}{16} & -\frac{3}{8} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & 2 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

1 2 3 4

解得 $\{\Delta\} = (\theta_1 \ u_2 \ \theta_3 \ v_4)^T = (1.158 \ 0.373 \ -4.330 \ -8.661) \frac{1}{EI}$

单元杆端力

$$\{F\}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.158 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.42 \\ 6.15 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & 1 & -\frac{3}{8} & 0.5 \\ -\frac{3}{16} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{16} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & 0.5 & -\frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.158 \\ 0.373 \\ -4.33 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.26 \\ -6.15 \\ -3.74 \\ 1.09 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\}^{\textcircled{3}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{16} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 & \frac{3}{8} & 0.5 \\ -5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{16} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{3}{8} & 0.5 & 0 & \frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -8.661 \\ 0 \\ 0.373 \\ 0 \\ -4.330 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.87 \\ 0 \\ 1.09 \\ 1.87 \\ 0 \\ -1.09 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\}^{\textcircled{4}} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.373 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.87 \\ -1.87 \end{Bmatrix} \quad (\text{内力图略})$$

9-10 力法采用矩阵分析如何进行？

力法采用矩阵分析称矩阵力法。如力法基本方程(荷载作用下)

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{ip} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

写成矩阵形式为

$$[F_X]\{X\} + \{F_P\} = \{0\} \quad (a)$$

这里 $[F_X]$ 为多余约束力柔度矩阵,也称结构柔度矩阵。

$$[F_X] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

$\{X\}$ 为多余约束力列阵

$$\{X\} = (X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n)^T$$

$\{F_P\}$ 为荷载柔度矩阵

$$\{F_P\} = (\Delta_{1P} \quad \Delta_{2P} \quad \dots \quad \Delta_{nP})^T$$

由式(a)解得

$$\{X\} = -[F_X]^{-1}\{F_P\}$$

后,可求出全部内力。

下面讨论 $[F_X]$ 和 $\{F_P\}$ 的求法(只讨论不考虑轴向变形和剪切变形的刚架)。由9-11式(b)可知,求荷载作用下的位移,是先把力法基本结构划分成若干单元,然后按下式求解:

$$\Delta_i = \{\bar{M}_i\}^T [f] (\{M_P\} - \{m\})$$

其中 Δ_i 为基本结构沿 i 方向欲求的位移;

$\{\bar{M}_i\}$ 为基本结构沿 i 方向施加单位力产生的各单元杆端力矩所组成的列阵;

$[f]$ 为对角柔度矩阵;

$$[f] = \begin{bmatrix} [f_{ij}]^{\text{①}} & & & \\ & [f_{ij}]^{\text{②}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & [f_{ij}]^{\text{③}} \end{bmatrix}$$

$[f_{ij}]^{\text{②}}$ 为单元柔度矩阵,对不考虑轴向变形和剪切变形的刚架。

$$[f_{ij}]^{\text{②}} = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} \\ -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}^{\text{②}}$$

$\{M_p\}$ 为基本结构在荷载作用下产生的各单元杆端力矩所组成的列阵;

$\{m\}$ 为各单元作为两端固定梁在杆间荷载作用下产生的固端力矩所组成的列阵。

因此有

$$\Delta_{1P} = \{\bar{M}_1\}^T [f] (\{M_p\} - \{m\})$$

$$\{F_p\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\bar{M}_1\}^T \\ \{\bar{M}_2\}^T \\ \vdots \\ \{\bar{M}_n\}^T \end{Bmatrix} [f] (\{M_p\} - \{m\}) = [\bar{M}]^T [f] (\{M_p\} - \{m\})$$

其中 $[\bar{M}]$ 是由 $\{\bar{M}_i\}$ 按列排成的矩阵,同理

$$\delta_{ij} = [\bar{M}_i]^T [f] \{\bar{M}_j\}$$

$$[F_x] = [\bar{M}]^T [f] [\bar{M}]$$

为了书写方便,通常把计算 $[F_x]$ 和 $\{F_p\}$ 放在一起计算,即

$$[[F_x] : \{F_p\}] = [\bar{M}]^T [f] [[\bar{M}]^T : (\{M_p\} - \{m\})]$$

$[X]$ 求出后,各单元杆端力列阵 $[s]$ 为

$$[s] = [\bar{M}][X] + \{M_p\}$$

矩阵连乘采用下述格式:

$$\begin{array}{l} [A][B][C] = [B], \quad \begin{array}{l} \nearrow [C] \\ \searrow [] = [B][C] \end{array} \\ [A], \quad \begin{array}{l} \nearrow [] = [A][B][C] \\ \searrow [] \end{array} \end{array}$$

例 用矩阵力法作图 9-10-1(a)所示刚架的 M 图,各杆 EI 相同。

解 图(b)为基本结构和基本未知量及单元编号。

(1) 求各单元杆端弯矩

$$\{M_p\} = \begin{Bmatrix} -24 \\ 18 \\ -18 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{m\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{M}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \\ 6 \\ -6 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{s\} = [M]\{X\} + \{M_P\} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 6 & 6 & 1 \\ -6 & -6 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -3.43 \\ -2.70 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -24 \\ 18 \\ -18 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.7 \\ 0.7 \\ -0.7 \\ 3.3 \\ -3.3 \\ -2.7 \end{Bmatrix}$$

(6) 作 M 图如图 9-10-2 所示。

以上就是用矩阵力法解刚架的计算步骤。应当指出，只要单元划分相同，取不同的基本结构，只是 $\{M_i\}$ 和 $\{M_P\}$ 不同，而 $\{m\}$ 和 $[f_{ij}]$ 和 $[f]$ 是相同的。

9-11 如何利用矩阵分析方法计算位移？

这里我们只讨论单位荷载法如何采用矩阵分析方法计算荷载作用下静定刚架的位移。位移计算公式为

$$\Delta = \sum \int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds$$

其中每一项积分都是等截面杆段的内力虚功。采用矩阵分析要点，是把各段内力虚功用单位荷载下产生的杆端力矩在实际荷载作用下产生的杆端转角上所做的虚功代替。如图 9-11-1 所示，图 (a) 与图 (b) 的积分 $\int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds$ 相同。对图 (b)，根据变形体虚功原理，有

$$\underbrace{\bar{M}_{AB}\theta_A + \bar{M}_{BA}\theta_B}_{\text{(外虚功)}} = (\bar{M}_{AB} \quad \bar{M}_{BA}) \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \{M\}^T \{\theta\} = \underbrace{\int \frac{\bar{M}M_P}{EI} ds}_{\text{(内虚功)}}$$

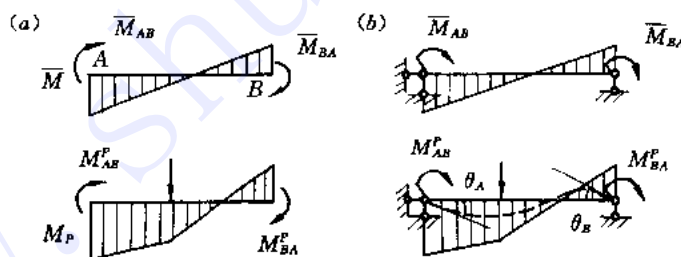


图 9-11-1

因此，位移计算变成求单位荷载下的杆端的 \bar{M} 和以杆段作简支梁受荷载所产生的杆端力矩和跨间荷载下的杆端转角 θ 。下面讨论如何求 θ 。

1. 单杆柔度矩阵

它是反映各种支承下杆端位移和杆端力之间关系。这里只讨论简支梁的单杆柔度矩阵就够了。如图 9-11-2 所示，约定杆端 M 和 θ 均以顺时针为正。柔度矩阵 $[f_{ij}]$ 的表现形式为

$$\{\theta_{ij}^M\} = [f_{ij}]\{M_{ij}^P\}$$

其中 $\{\theta_{ij}^M\} = (\theta_{ij}^M \quad \theta_{ji}^M)^T$ 杆端力矩作用下产生

杆端转角列阵；

$\{M_{ij}^P\} = (M_{ij}^P \quad M_{ji}^P)^T$ 杆端力矩列阵；

$$[f_{ij}] = \begin{bmatrix} f_{ii} & f_{ij} \\ f_{ji} & f_{jj} \end{bmatrix}$$

f_{ij} 为柔度系数，即 $M_{ji}=1$ 时在 i 端产生的转角，对简支梁不难求得

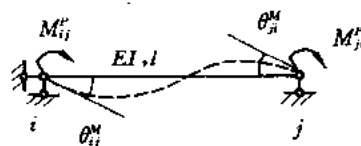


图 9-11-2

$$[f_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{l}{3EI} & -\frac{l}{6EI} \\ -\frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix}$$

2. 简支梁在跨间荷载作用下产生杆端转角列阵 $\{\theta_{ij}^0\}$

图 9-11-3(a) 示简支梁受跨间任意荷载下产生的 $\{\theta_{ij}^0\} = (\theta_{ij}^0 \quad \theta_{ji}^0)^T$ ，它可看成图(b)和图(c)相加，亦即 $\{\theta_{ij}^0\}$ 看成负的固端力矩列阵 $\{m_{ij}\}$ 产生的。于是有

$$\{\theta_{ij}^0\} = -[f_{ij}]\{m_{ij}\}$$

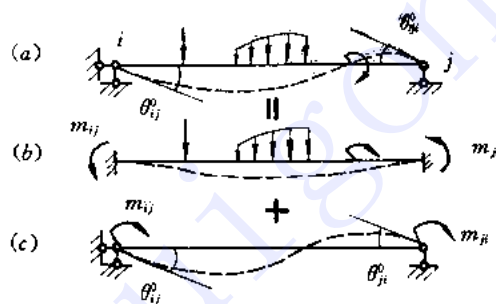


图 9-11-3

最后得

$$\{\theta_{ij}\} = \{\theta_{ij}^M\} + \{\theta_{ij}^0\} = [f_{ij}]\{(\{M_{ij}^P\}) - \{m_{ij}\}\} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum \int \frac{MM_P}{EI} ds = \sum \{\bar{M}_{ij}\}^T \{\theta_{ij}\} \\ &= \sum \{\bar{M}_{ij}\}^T [f_{ij}]\{(\{M_{ij}^P\}) - \{m_{ij}\}\} \end{aligned}$$

或

$$\Delta = \{\bar{M}\}^T [f]\{(\{M_P\}) - \{m\}\} \quad (b)$$

式(b)就是用矩阵分析计算位移的公式，其中

$\{\bar{M}\}$ ——单位荷载下各杆端力矩按顺序排成的列阵；

$\{M_P\}$ ——荷载作用下各杆端力矩按顺序排成的列阵；

$\{m\}$ ——各杆固端力矩按顺序排成的列阵；

$[f]$ ——对角柔度矩阵，由单杆柔度矩阵按顺序排成的对角阵，即：

$$[f] = \begin{bmatrix} [f_{ij}]^{(1)} & & & \\ & [f_{ij}]^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & [f_{ij}]^{(n)} \end{bmatrix}$$

例1 用矩阵运算求图 9-11-4 所示结构 B 点挠度 Δ_{BV} 。

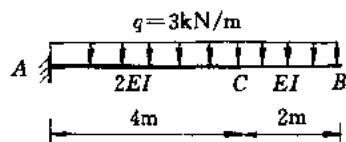


图 9-11-4

解 划分 AC 和 CB 两单元，荷载作用下各单元杆端力矩排成列阵

$$\{M_P\} = (M_{AC}^e \ M_{CA}^e \ M_{CB}^e \ M_{BC}^e)^T = (-54 \ 6 \ -6 \ 0)^T \text{kN} \cdot \text{m}$$

在 B 点加向下单位力下各杆端力矩排成列阵

$$\{\bar{M}\} = (\bar{M}_{AC} \ \bar{M}_{CA} \ \bar{M}_{CB} \ \bar{M}_{BC})^T = (-6 \ 2 \ -2 \ 0)^T$$

各单元看成两端固定，在荷载下固端力矩排成列阵

$$\{m\} = (m_{AC} \ m_{CA} \ m_{CB} \ m_{BC})^T = (-4 \ 4 \ -1 \ 1)^T$$

而

$$\{M_P\} - \{m\} = (-50 \ 2 \ -5 \ -1)^T$$

柔度矩阵

$$[f] = \begin{bmatrix} [f_{AC}] & [0] \\ [0] & [f_{CB}] \end{bmatrix} = \frac{1}{3EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & & [0] \\ & & 2 & -1 \\ [0] & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

于是

$$\Delta_{BV} = \{\bar{M}\}^T [f] (\{M_P\} - \{m\})$$

$$= \frac{1}{3EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -50 \\ 2 \\ -5 \\ -1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3EI} \begin{Bmatrix} -102 \\ 54 \\ -9 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{246}{EI} \text{m}$$

即 $\Delta_{BV} = \frac{246}{EI} \text{ (m)} \downarrow$

例2 用矩阵运算求图 9-11-5(a)的 D 处左右两截面相对转角 θ , 各杆 EI 相同。

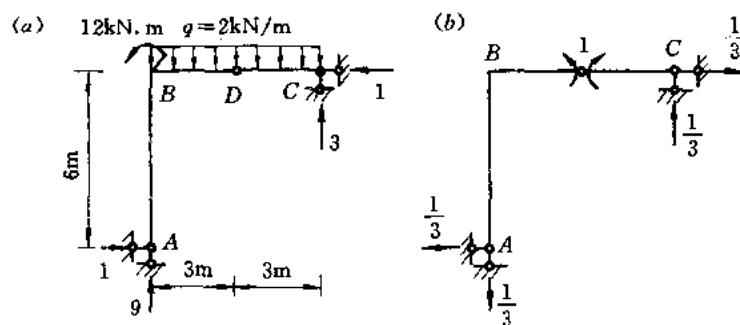


图 9-11-5

解 划分 AB 和 BC 两单元(1)和(2)。荷载和在 D 点加一对单位力偶所产生的反力分别如图(a)和(b)所示, 则

$$\{M_P\} = (0 \quad 6 \quad -18 \quad 0)^T$$

$$\{\bar{M}\} = (0 \quad -2 \quad 2 \quad 0)^T$$

$$\{m\} = (0 \quad 0 \quad -6 \quad 6)^T$$

而

$$\{M_P\} - \{m\} = (0 \quad 6 \quad -12 \quad -6)^T$$

$$[f] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{EI}$$

则

$$\theta = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6 \\ -12 \\ -6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{EI}$$

$$(0 \quad -2 \quad 2 \quad 0), \quad \left(\frac{-60}{EI} \right)$$

即 D 处左右两截面相对转 $\theta = \frac{-60}{EI}$ 。

综上所述, 用矩阵运算求位移要点(由其原理可知):

1. 单元划分的原则是等截面直杆段(不论其中是否有铰结点)且便于求固端弯矩 $\{m_{ij}\}$ 。

2. 每个单元求固端弯矩 $\{m_{ij}\}$ 时都当成两端固定的梁。

3. 每个单元求柔度矩阵时都当成简支梁。

可以这样说，应用矩阵运算要比用图乘法运算简捷些，尤其对同时求多点位移。同时求多点位移计算公式为

$$\{\Delta\} = [\bar{M}]^T [f] (\{M_p\} - \{m\})$$

其中 $\{\Delta\}$ ——多点位移组成的列阵；

$[\bar{M}]$ ——与多点位移排列顺序相应的单位荷载所产生的杆端力矩列阵组成的矩阵。

第十章 结构动力计算

10-1 体系的运动自由度和振动自由度有何异同点?

所谓自由度是指确定体系所有质体位置所需的独立坐标数目。这是运动自由度和振动自由度的共同点。但由于研究角度不同, 对同一个体系, 它们的数目可能不相同。如图 10-1-1 所示的体系, 它的运动自由度为零, 振动自由度为 1 (当 $EI \rightarrow \infty$) 或无穷。

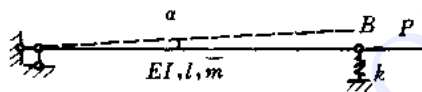


图 10-1-1

在进行体系的几何组成分析时, 是研究体系的整体运动情况, 不考虑杆件本身的微小变形, 即将杆件看成刚性杆, 所以也可以将运动自由度称为刚性体系自由度。如图 10-1-1 中抗弯刚度 EI 和弹性常数 k 都认为是无穷大, 则体系中所有质体不作任何运动, 运动自由度为零。

在进行结构动力计算时, 结构的动力反应 (动内力和动位移) 与结构动力特性 (如自振频率和振型) 有密切关系。而动力特性又与质体的可能位置有关。描述体系中所有质体可能位置所需要的独立坐标数目, 就是振动自由度数。如图 10-1-1 中, \bar{m} 为质量集度, 当 $EI \rightarrow \infty, k$ 为常数时, 所有质体的可能位置可用独立坐标 α 表示, 则振动自由度为 1, 若 EI 也为常数, 所有质体的可能位置需用无限多个坐标表示, 则振动自由度为无限个。确定振动自由度, 不能把所有杆件看成刚性杆 (某些杆件刚度比其它杆件刚度大得多时可以看成刚性杆), 否则不存在振动。因此振动自由度又称弹性体系自由度, 这是与确定运动自由度的主要区别。

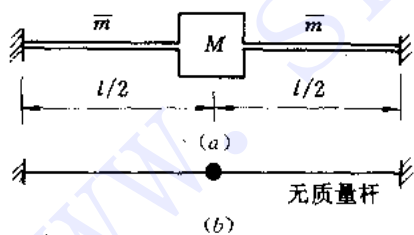


图 10-1-2

另外, 在进行结构动力分析时, 为了简化计算, 通常要考虑体系的质量分布情况和质体可能位置对动力特性的影响以确定振动自由度。例如图 10-1-2(a) 所示的体系, M 为集中质量, \bar{m} 为分布质量集度, 它是无限自由度体系。若 $\bar{m}l \ll M$, 在动力计算中可以不计 \bar{m} 的影响, 杆件看成无质量杆件, 因此确定振动自由度就变成确定集中质体可能位置所需的独立坐标数。若不考虑杆件轴向变形, 此体系振动自由度为 2 (集中质体的竖向位置和旋转位置)。

若集中质体的体积较小, 旋转振动的影响可以不计, 则集中质体变成图 (b) 所示的集中质点, 振动自由度为 1。

静力计算与动力计算的主要区别在于后者需要考虑惯性力的作用。就一个体系能否作为结构来说, 确定其运动自由度对结构动力计算无疑是必需的。但由于结构动力计算需要考虑惯性力的作用, 因此在确定体系是几何不变的前提下, 还需研究质体在振动过程中

的自由度问题。

10-2 在动力计算中不引入惯性力的概念行吗？

在结构动力分析中可以直接利用牛顿运动定律而不引入惯性力概念。如图 10-2-1 (a)所示的单自由度体系，建立其自由振动的微分方程时，我们可以取整体作研究对象，画出其受力状态和运动状态如图(b)所示。由质点系动量矩定理(质点系对任一固定轴的动量矩对时间的导数等于作用在该质点的外力对同一轴力矩的代数和)，对垂直于纸面通过 A 点的轴，有

$$\frac{d(m\dot{y} \cdot l)}{dt} = M_A$$

即
$$m\ddot{y} = \frac{M_A}{l}$$

而根据转角位移方程，可得 M_A, Y_A 与 y 之间关系为

$$M_A = -\frac{3EI}{l^2}y, \quad Y_A = \frac{3EI}{l^3}y$$

将 M_A 代入上式，有

$$m\ddot{y} + \frac{3EI}{l^3}y = 0 \quad (a)$$

上式就是该体系的自由振动微分方程。

若取质点作研究对象，其受力状态和运动状态如图(c)所示，根据牛顿第二定律，有

$$m\ddot{y} = -Y_A$$

将上述 Y_A 值代入，得

$$m\ddot{y} + \frac{3EI}{l^3}y = 0$$

那么，为什么在结构动力分析中要引入惯性力的概念？它有下列好处：

1. 把动力问题化为我们熟悉的静力问题，便于建立运动方程；
2. 便于求动力反应，如求动反力、动内力和动位移等，使动力反应更加直观。

为此，先回顾惯性力概念和达朗伯原理。

惯性力(惯性力矩)是假想地作用在物体上的力(力矩)，它的大小等于物体的质量(转动惯量)与加速度(角加速度)的乘积，方向与加速度(角加速度)方向相反。

质点系的达朗伯原理：质点系在运动的每一瞬时，作用于质点系上的所有主动力、约束反力与惯性力在形式上构成平衡力系。

由于各质点惯性力并不是真正作用在各质点上，因而质点系也并不真正处于平衡状态。只是在引入惯性力后，可将质点系的动力学问题在形式上化为静力学问题来处理(动静法)，以使求解方便。

现在我们用动静法来建立图 10-2-2(a)所示体系的自由振动微分方程。

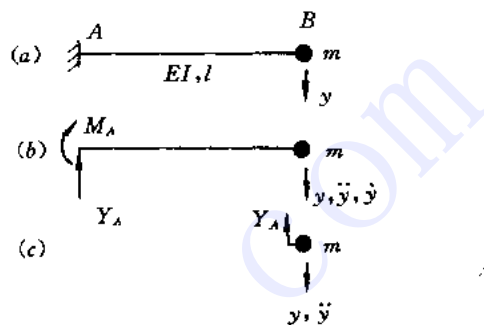


图 10-2-1

1. 柔度法——以整体作研究对象，建立位移计算公式。在图 10-2-2(a)中，虚箭头表示作用在质点上的惯性力，于是有

$$y = -m\ddot{y}\delta_{11}$$

而 $\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}$ ，则得自由振动微分方程

$$m\ddot{y} + \frac{3EI}{l^3}y = 0$$

2. 刚度法——以质点为研究对象，建立平衡方程。如图(b)所示，质点上作用有弹性恢复力 $k_{11}y$ 和惯性力 $-m\ddot{y}$ ，由动平衡条件有

$$m\ddot{y} + k_{11}y = 0$$

而 $k_{11} = \frac{3EI}{l^3}$ ，则得自由振动微分方程

$$m\ddot{y} + \frac{3EI}{l^3}y = 0$$

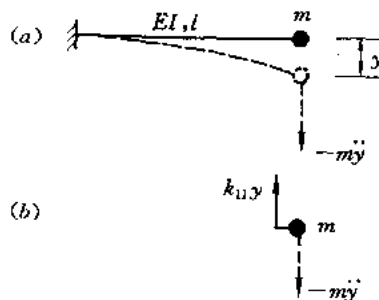


图 10-2-2

图 10-2-3 为两个自由度的体系， EI 为常数。先直接利用牛顿运动定律建立自由振动微分方程。设某一瞬时， m_1, m_2 的位移分别为 y_1, y_2 ，速度分别为 \dot{y}_1, \dot{y}_2 ，加速度分别为 \ddot{y}_1, \ddot{y}_2 ，支座反力为 Y_A, Y_B 。

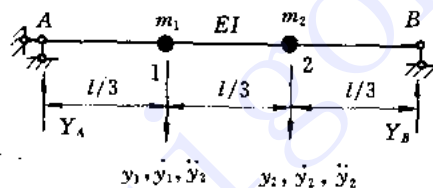


图 10-2-3

根据动量矩定理

$$\left. \begin{aligned} \text{对 1 点, 有} \quad & \frac{l}{3}m_2\ddot{y}_2 = \frac{l}{3}Y_A - \frac{2l}{3}Y_B \\ \text{对 2 点, 有} \quad & \frac{l}{3}m_1\ddot{y}_1 = -\frac{2l}{3}Y_A + \frac{l}{3}Y_B \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

此处 Y_A, Y_B 与 y_1, y_2 有关。为了确定 Y_A, Y_B 与 y_1, y_2 之间的关系，设想 y_1, y_2 由图 10-2-4 (a) 所示的力 P_1, P_2 所产生，则有

$$y_1 = P_1\delta_{11} + P_2\delta_{12}, \quad y_2 = P_1\delta_{21} + P_2\delta_{22}$$

由上式，有

$$P_1 = \frac{\delta_{22}y_1 - \delta_{12}y_2}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}, \quad P_2 = \frac{\delta_{11}y_2 - \delta_{12}y_1}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}$$

$$\text{而} \quad Y_A = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2, \quad Y_B = \frac{1}{3}P_1 + \frac{2}{3}P_2$$

将上述关系代入式(b)，化简后得

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -m_1\ddot{y}_1\delta_{11} - m_2\ddot{y}_2\delta_{12} \\ y_2 &= -m_1\ddot{y}_1\delta_{21} - m_2\ddot{y}_2\delta_{22} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

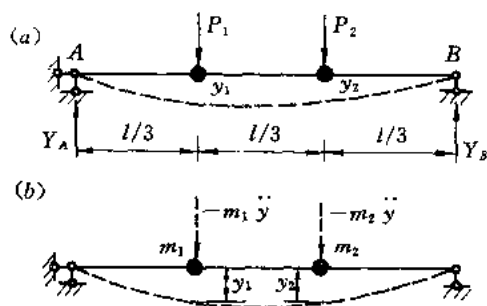


图 10-2-4

若引入惯性力概念,如图 10-2-4(b)所示, y_1, y_2 可认为是惯性力 $-m_1\ddot{y}_1$ 和 $-m_2\ddot{y}_2$ 产生的静位移,则直接可写出式(c)的振动微分方程。

从上述讨论中可看出,引入惯性力概念对此类问题建立振动微分方程要比直接利用动力学普遍定理简单得多。

另外,当质点在某一瞬时的加速度确定后,利用动静法求此瞬时的动内力和动位移等都较简单明了。

10-3 求自振频率时,什么情况下采用刚度法? 什么情况下采用柔度法?

刚度法与柔度法是相通的,能用刚度法求自振频率的问题也能用柔度法求解,反之亦然。

什么情况采用刚度系数公式,什么情况采用柔度系数公式,要看哪一种系数容易计算。如图 10-3-1(a)所示的体系,求 δ_{11} 和 k_{11} 计算量相当。在图(b)中,杆 BD 受力为 2, 伸长为 $\frac{2l_1}{EA}$, 则 $\delta_{11} = \frac{4l_1}{EA}$ 。对于图(c), BD 杆伸长为 $\frac{1}{2}$, 受力为 $\frac{EA}{2l_1}$, $k_{11} = \frac{EA}{4l_1}$ 。

又如对图 10-3-2 所示的体系,求 k_{11} 要比求 δ_{11} 方便些。对图(b),用位移法,设 δ_{11} 为位

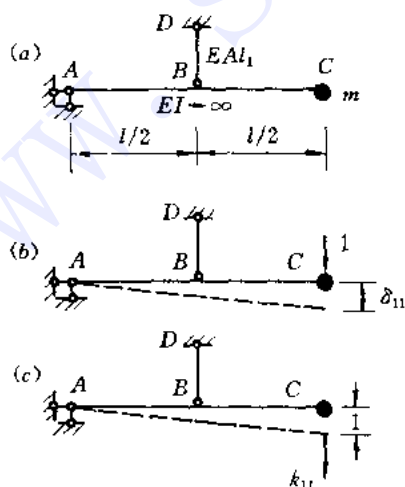


图 10-3-1

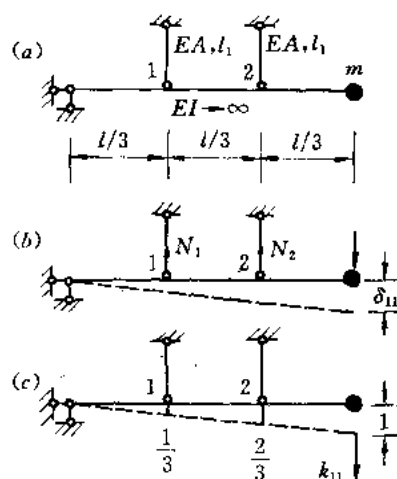


图 10-3-2

移基本未知量,根据变形协调,1点下移 $\frac{\delta_{11}}{3}$, $N_1 = \frac{1}{3} \frac{EA}{l_1} \delta_{11}$, 2点下移 $\frac{2}{3} \delta_{11}$, $N_2 = \frac{2}{3} \frac{EA}{l_1} \delta_{11}$ 。

由 $\Sigma M_A = 0$,即

$$1l = N_1 \frac{l}{3} + N_2 \frac{2}{3} l$$

得 $\delta_{11} = \frac{9}{5} \cdot \frac{l_1}{EA}$

对图(c), $N_1 = \frac{1}{3} \frac{EA}{l_1}$, $N_2 = \frac{2}{3} \frac{EA}{l_1}$, 由 $\Sigma M_A = 0$,得

$$k_{11} = \frac{5 EA}{9 l_1}$$

又如图 10-3-3(a)所示体系,求柔度系数要比求刚度系数简单。而对图 10-3-3(b)所示体系,求刚度系数和求柔度系数都比较简单。

一般说,对于单自由度体系,求 δ_{11} 和 k_{11} 的难易程度是相同的,因为它们互为倒数,都可以用同一方法求得,不同的是一个已知力求位移,一个是已知位移求力。对于多自由度体系,若是静定结构,一般情况下求柔度系数容易些,但对于超静定结构就要根据情况而定。

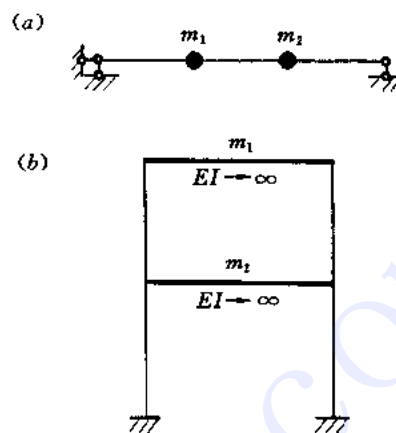


图 10-3-3

10-4 动荷载作用点不在集中质体上的单自由度体系动力计算如何进行？

动荷载 $P(t)$ 作用点不在质体上,动力分析仍可利用柔度法或刚度法进行。

图 10-4-1(a)示一单自由度体系,分别用柔度法和刚度法求解如下。

1. 柔度法

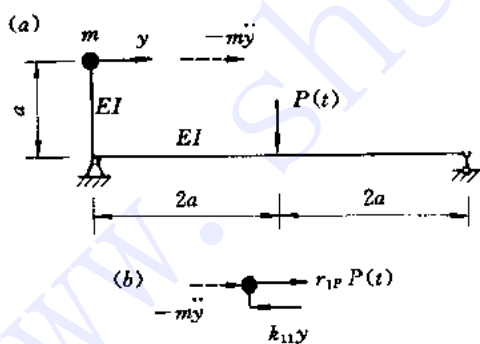


图 10-4-1

取整体为研究对象,按动静法,质点位移 y 由惯性力 $-m\ddot{y}$ 和动荷载 $P(t)$ 共同产生,即

$$y = -m\ddot{y}\delta_{11} + \delta_{1P}P(t) \quad (a)$$

上式就是以柔度系数表示的单自由度体系强迫振动的运动方程。式中 δ_{11} 为沿振动方向 y (即沿 1 方向) 作用单位惯性力在 1 方向产生的位移, δ_{1P} 为 $P(t)=1$ 作用时沿 1 方向产生的位移。

设 $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$, 式(a)可写成

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{\delta_{1P}}{m\delta_{11}} P(t) \quad (b)$$

其特解(平稳阶段)为(杜哈梅积分)

$$y = \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin\omega(t - \tau) d\tau \quad (c)$$

求得 $y(t)$ 后,可求得惯性力 $I = -m\ddot{y}$, 于是整个结构的动内力可由惯性力和动荷载

$P(t)$ 共同作用下按静力分析求得。

当动荷载为简谐荷载，即 $P(t) = P \sin \theta t$ 时，亦可直接求解式(b)。设 $y = Y \sin \theta t$, $\Delta_{1P} = P \delta_{1P}$ ，代入式(b)，消去公因子 $\sin \theta t$ ，得

$$-m\theta^2 \delta_{11} Y + Y = \Delta_{1P}$$

$$Y = \frac{\Delta_{1P}}{1 - m\theta^2 \delta_{11}} = \frac{\Delta_{1P}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}$$

于是

$$y = \frac{\Delta_{1P}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \sin \theta t$$

而惯性力为

$$I = -m\ddot{y} = \frac{\Delta_{1P}}{\frac{1}{m\theta^2} - \delta_{11}} \sin \theta t = I_1 \sin \theta t \quad (d)$$

I_1 为惯性力幅值：

$$I_1 = \frac{\Delta_{1P}}{\frac{1}{m\theta^2} - \delta_{11}} \quad (e)$$

令

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m\theta^2} \quad (f)$$

则式(e)可写成

$$\delta_{11}^* I_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (g)$$

此为求惯性力幅值的典型方程。

从式(d)可以看出：惯性力与简谐荷载是以同频率、同初相位随时间而变化。因此，各截面内力随时间变化的规律也相同，这些内力幅值就是简谐荷载幅值和惯性力幅值共同产生的。

2. 刚度法

取质体为研究对象，如图(b)所示，按动静法，有

$$-m\ddot{y} - k_{11}y + r_{1P}P(t) = 0$$

或

$$m\ddot{y} + k_{11}y = r_{1P}P(t) \quad (h)$$

式(h)就是以刚度系数表示的单自由度体系在动荷载作用下强迫振动的运动方程。其中 k_{11} 为使质体沿振动方向(即 1 方向)产生单位位移所需施加的力($k_{11}y$ 为弹性恢复力)； r_{1P} 为 $y=0$ 、 $P(t)=1$ 时施加给质体沿 1 方向的力。

设 $\omega^2 = \frac{k_{11}}{m}$ ，式(h)写成

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{r_{1P}}{m} P(t) \quad (i)$$

其特解为

$$y = \frac{r_{1P}}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (j)$$

式(j)和式(c)是一致的。因此有

$$r_{1P} \delta_{11} = \delta_{1P}$$

当动荷载 $P(t) = P \sin \theta t$ 时，亦可直接求得式 (i) 的特解。设 $y = Y \sin \theta t$, $R_{1P} = r_{1P} P$ 。不难导出下列诸式

$$I = I_1 \sin \theta t \quad (k)$$

$$I_1 = \frac{R_{1P}}{\frac{k_{11}}{m\theta^2} - 1} \quad (l)$$

令 $k_{11}^* = 1 - \frac{k_{11}}{m\theta^2} \quad (m)$

则有 $k_{11}^* I_1 + R_{1P} = 0 \quad (n)$

同样，这里的惯性力与简谐荷载是同步的。

例 试求图 10-4-2 所示体系中弹簧支座的最大动反力，已知 $q_0, \theta (\neq \omega), m$ 和弹簧系数 $k, EI = \infty$ 。

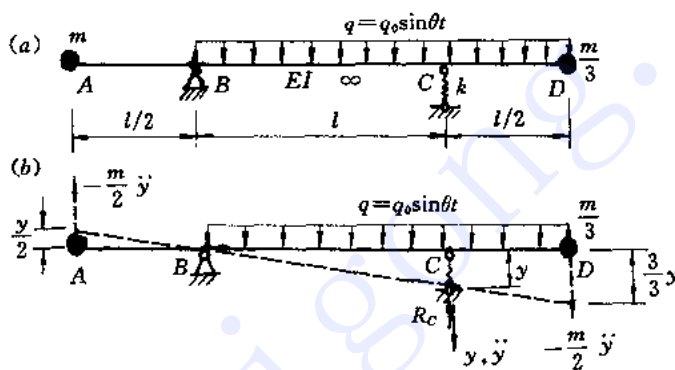


图 10-4-2

解 1. 直接建立运动方程求解

这是单自由度体系，选独立坐标 y 如图 (b) 中所示。当 C 点有动位移 y 和加速度 \ddot{y} ，则 A 点位移为 $\frac{y}{2}$ ，惯性力为 $-\frac{m}{2}\ddot{y}$ ； D 点位移为 $\frac{3}{2}y$ ，加速度为 $\frac{3}{2}\ddot{y}$ ，惯性力为 $-\frac{m}{2}\ddot{y}$ ； C 点动反力为 $ky = R_C$ 。

利用动静法，取 AD 为研究对象，有

$$\sum m_B = 0, \quad ky \cdot l - \frac{1}{2} q_0 \sin \theta t \left(\frac{3}{2} l \right)^2 - \left(-\frac{m}{2} \ddot{y} \right) \frac{3}{2} l - \left(-\frac{m}{2} \ddot{y} \right) \frac{l}{2} = 0$$

$$m \ddot{y} + ky = \frac{9}{8} q_0 l \sin \theta t$$

令 $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ，有

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{9l}{8m} q_0 \sin \theta t$$

由杜哈梅积分，求得

$$y = \frac{9q_0 l}{8m(\omega^2 - \theta^2)} \sin \theta t = y_{\max} \sin \theta t$$

弹簧最大动反力 $R_{C,\max}$

$$R_{C,\max} = ky_{\max} = \frac{9kq_0l}{8m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{9}{8}q_0l \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}$$

2. 利用求惯性力幅值的典型方程 $\delta_{11}^* I_1 + \Delta_{1P} = 0$

这里 Δ_{1P} 为在 q_0 作用下的 y 值, 这时 $R_C = \frac{9}{8}q_0l$, 则

$$\Delta_{1P} = \frac{9}{8k}q_0l$$

而 $\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m\theta^2}$, δ_{11} 为惯性力 $-m\ddot{y}$ 等于 1 时产生的 y 值。因 A, D 点惯性力均为 $-\frac{m}{2}\ddot{y}$ [图(b)], 故 δ_{11} 为在 A 点加向上的力 $\frac{1}{2}$ 和在 D 点加向下的力 $\frac{1}{2}$ 时所产生的 y 值。这时 $R_C = 1, \delta_{11} = \frac{1}{k}$ 。

$$\delta_{11}^* = \frac{1}{k} - \frac{1}{m\theta^2}$$

于是

$$I_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}^*} = \frac{9}{8}q_0l \frac{\theta^2}{\omega^2 - \theta^2}$$

这里 $I_1 = -m\ddot{y}_{\max}$, 因此在 A, D 两质点惯性力幅值各为 $\frac{I_1}{2}$ 。则 C 点最大动反力, 由 $\sum m_B = 0$, 有

$$R_{C,\max} = \frac{1}{l} \left[\frac{I_1}{2} \frac{l}{2} + \frac{I_1}{2} \frac{3l}{2} + \frac{9}{8}q_0l \right] = \frac{9}{8}q_0 \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \right\}$$

10-5 什么叫做动力系数? 单自由度体系位移动力系数和内力动力系数是否相同?

对于承受一组按相同规律变化的动荷载的体系, 某截面某量的最大动力效应与动荷载的最大值所产生的静力效应的比值的绝对值称为该量放大系数, 各截面中该量最大的放大系数, 称为该体系该量的动力系数。

例如一单自由度体系承受动荷载 $q = q_0 \sin \theta t$, 它们在某截面产生的最大弯矩和在静荷载 q_0 作用下产生的该截面的弯矩比值的绝对值, 称为该截面的弯矩放大系数。而所有截面的弯矩放大系数的最大者, 称为该体系的弯矩动力系数。

关于各量(如位移、内力)的动力系数是否相同, 先看一个具体例子, 再作一些讨论。

对于图 10-5-1(a) 所示的体系, 它的振动微分方程为

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P}{m} \sin \theta t$$

其特解

$$y = y_n \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \sin \theta t = Y \sin \theta t$$

其中 y_n 为动荷载最大值 P 作用下在 A 点产生的静力水平位移

$$y_n = \frac{Pl^3}{3EI} = P\delta_{11}$$

惯性力
$$I = -m\ddot{y} = \frac{P}{\theta^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}} \sin\theta t = I_1 \sin\theta t$$

0点弯矩
$$M_0 = Pl \left[1 + \frac{1}{\frac{\omega^2}{\theta^2} - 1} \right] \sin\theta t = M_{0,st} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}} \sin\theta t = M_{0,m} \sin\theta t$$

其中 $M_{0,st} = Pl$ 是动载幅值 P 作用下 0 点的静弯矩, 于是 A 点水平位移放大系数

$$\beta_{\Delta,A} = \left| \frac{Y}{y_{st}} \right| = \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}} \right|$$

0 点弯矩的放大系数

$$\beta_{M,0} = \left| \frac{M_{0,m}}{M_{0,st}} \right| = \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}} \right| = \beta_{\Delta,A}$$

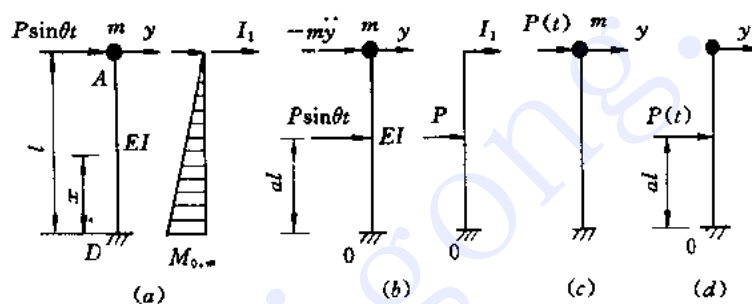


图 10-5-1

从以上讨论可以看出, 对于单自由度体系在与质点振动方向一致的简谐荷载作用下, 其动力反应有如下几个特点:

1. 动荷载 $P \sin\theta t$ 与惯性力 $I = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\theta^2} - 1} P \sin\theta t$ 均随时间 t 按同一规律变化。当 $\omega > \theta$ 时,

动荷载与惯性力同向; $\omega < \theta$ 时, 两者反向; $\omega \rightarrow \theta, I \rightarrow \infty$ 。

2. 由于动荷载随时间变化规律相同, 显然各截面某量的放大系数也相同, 在这里均

为
$$\left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}} \right|。$$

3. 因此, 此体系的各量的动力系数相同, 为

$$\beta = \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}} \right|$$

下面讨论图 10-5-1(b) 的情况(荷载不作用在质点处)。按柔度法, 有

$$y = -m\ddot{y} + \delta_{1P} P \sin\theta t$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \delta_{1P} P \sin\theta t$$

其中 $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$ ，设 $y = Y\sin\theta t$ ，代入上式，消去公因子，得

$$-\theta^2 Y + \omega^2 Y = \omega^2 \delta_{1P} P$$

$$Y = \frac{\delta_{1P}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} P$$

惯性力

$$I = -m\ddot{y} = \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} P \sin\theta t = I_1 \sin\theta t$$

这里 A 点位移放大系数为

$$\beta_{\Delta, A} = \left| \frac{Y}{y_{st}} \right| = \left| \frac{P\delta_{1P} \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}}{P\delta_{1P}} \right| = \left| \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \right|$$

O 点的弯矩放大系数为

$$\beta_{M, O} = \left| \frac{M_{O, M}}{M_{O, st}} \right|$$

而

$$M_{O, st} = aPl$$

$$M_{O, m} = aPl + I_1 l = aPl \left(1 + \frac{\delta_{1P}}{a\delta_{11}} \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \right)$$

则

$$\beta_{M, O} = \left| 1 + \frac{\delta_{1P}}{a\delta_{11}} \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \right|$$

当 $a=1$ 时 $\delta_{1P} = \delta_{11}$ ，即图(a)情况。当 $0 < a < 1$ 时，其动力反应有如下特点：

1. 动荷载和惯性力随时间变化规律仍然相同。

2. 由于动荷载和惯性力不共线，所以各截面各量的放大系数不相同，如图 10-5-2(a) 示出动荷载最大时的静位移曲线，图(b) 示出 ω 与 θ

为某一比值时位移幅值曲线。其中显然有 $\varphi_{A, st} = \varphi_{B, st}$ ， $\varphi_{A, m} \neq \varphi_{B, m}$ ，因此 $\beta_{\varphi, A} \neq \beta_{\varphi, B}$

3. 位移放大系数与内力放大系数不同。

对于图 10-5-1(c) 的情况，设 $P(t)$ 为突加荷载，质点的运动方程 ($t \geq 0$)

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P}{m}$$

由杜哈梅积分，其特解为

$$y = P\delta_{11}(1 - \cos\omega t) = y_{st}(1 - \cos\omega t)$$

惯性力

$$I = -m\ddot{y} = -P\cos\omega t$$

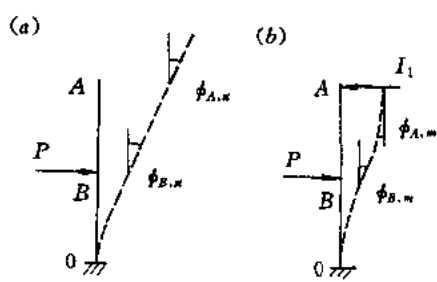


图 10-5-2

按照动静法，动力反应可看成顶部受有水平力

$$P - P\cos\omega t = P(1 - \cos\omega t)$$

时的静力反应，该体系动力系数为 2，即各截面各量的放大系数相同，均为 2。

最后讨论图 10-5-1(d)的情况，仍设 $P(t)$ 为突加荷载，当 $t \geq 0$ 时，其运动方程为

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{\delta_{1P}}{m\delta_{11}} P$$

特解为

$$y = \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} y_H (1 - \cos\omega t)$$

$$\beta_{\Delta, A} = 2 \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

惯性力

$$I = \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} P \cos\omega t$$

$$M_{0, s} = aPl$$

$$M_{0, m} = aPl + \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} Pl$$

$$\beta_{M, 0} = 1 + \frac{\delta_{1P}}{a\delta_{11}}$$

当 $a=1$ 时， $\delta_{1P}=\delta_{11}$ ， $\beta_{\Delta, A}=\beta_{m, 0}=2$ ；当 $0 < a < 1$ 时， $\beta_{\Delta, A} \neq \beta_{m, 0}$ 且各截面各量放大系数不相同。

综上所述，可得出下述结论：单自由度体系，当动荷载作用线与质体的振动位移方向重合时，各截面内力和位移都与结点位移成正比，各截面各量的放大系数均相同，各量的动力系数相同。当动荷载作用位置并非质体所在位置时，这一结论不适用。

10-6 柔度法与刚度法所建立的自由振动微分方程是相通的吗？

在线性变形体系中两者是相通的，即可由柔度法的自由振动微分方程推导出刚度法微分方程，反之亦然。

对于两个自由度体系，用柔度法建立的自由振动微分方程为

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{11} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{12} \\ y_2 &= -m_1 \ddot{y}_1 \delta_{21} - m_2 \ddot{y}_2 \delta_{22} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

而用刚度法建立的方程为

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_{11} y_1 + k_{12} y_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_{21} y_1 + k_{22} y_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

由式(b)联立解得

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{-k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} m_1 \ddot{y}_1 + \frac{k_{12}}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} m_2 \ddot{y}_2 \\ y_2 &= \frac{k_{21}}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} m_1 \ddot{y}_1 + \frac{-k_{11}}{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} m_2 \ddot{y}_2 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

对于图 10-6-1 所示的三种状态，根据功的互等定理可知：状态 2 的外力在状态 1 的位移

上所做虚功 W_{12} 等于状态 1 的外力在状态 2 的位移上所做虚功 W_{21} ，即

$$W_{12} = 1 \times 1 = k_{11}\delta_{11} + k_{21}\delta_{21} = W_{21}$$

则 $k_{11} = \frac{1}{\delta_{11}}(1 - k_{21}\delta_{21})$

另外有 $V_{13} = 0 = k_{12}\delta_{11} + k_{22}\delta_{21} = W_{31}$

则 $k_{22} = -\frac{\delta_{11}}{\delta_{21}}k_{12}$

式(d)和式(e)相乘，有

$$k_{11}k_{22} = -\frac{k_{12}^2}{\delta_{21}} + k_{12}^2$$

或 $k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = -\frac{k_{21}^2}{\delta_{21}} \quad (f)$

将式(e)和(f)代入式(c)第一式，有

$$y_1 = -m_1\ddot{y}_1\delta_{11} - m_2\ddot{y}_2\delta_{12}$$

设状态 1 改为点 2 受单位力，根据同样推导，式(c)第二式可表为

$$y_2 = -m_1\ddot{y}_1\delta_{21} - m_2\ddot{y}_2\delta_{22}$$

上面证明了两个自由度体系用两种方法所建立的自由振动微分方程是相通的。若用矩阵方法表示式(a)、(b)，即

$$\begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} -m_1\ddot{y}_1 \\ -m_2\ddot{y}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m_1\ddot{y}_1 \\ -m_2\ddot{y}_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases}$$

则上述推导过程也就证明了同一体系的柔度矩阵和相应的刚度矩阵互为逆矩阵。

对于 n 个自由度体系，用柔度法建立的自由振动微分方程为

$$\{y\} = -[\delta][M]\{\ddot{y}\} \quad (g)$$

其中 $\{y\}$ 为 y_1, y_2, \dots, y_n 所组成列阵， $[\delta]$ 为柔度系数组成的矩阵， $[M]$ 为质量 m_1, m_2, \dots, m_n 组成的对角阵， $\{\ddot{y}\}$ 为 $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_n$ 组成的列阵。而用刚度法建立的方程为

$$[K]\{y\} = -[M]\{\ddot{y}\} \quad (h)$$

其中 $[K]$ 为刚度系数组成的矩阵。若有 $[\delta] = [K]^{-1}$ ，并有 $[K] = [\delta]^{-1}$ ，则式(g)和式(h)相通。证明如下。

设有一 n 个自由度的线性变形体系，如图 10-6-2(a) 所示。沿第 i 个坐标加单位力时，体系的柔度系数如图(b)所示。沿坐标 i 及 j 分别发生单位位移(其它坐标点位移为零)时，体系的刚度系数分别如图(c)和(d)所示。

对状态(b)和状态(c)运用功的互等定理，可得

$$\sum_{j=1}^n k_{ji}\delta_{ji} = 1$$

再引入反力互等定理，得

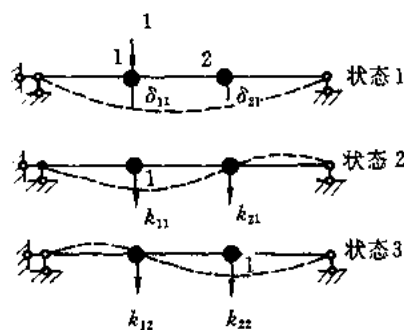


图 10-6-1

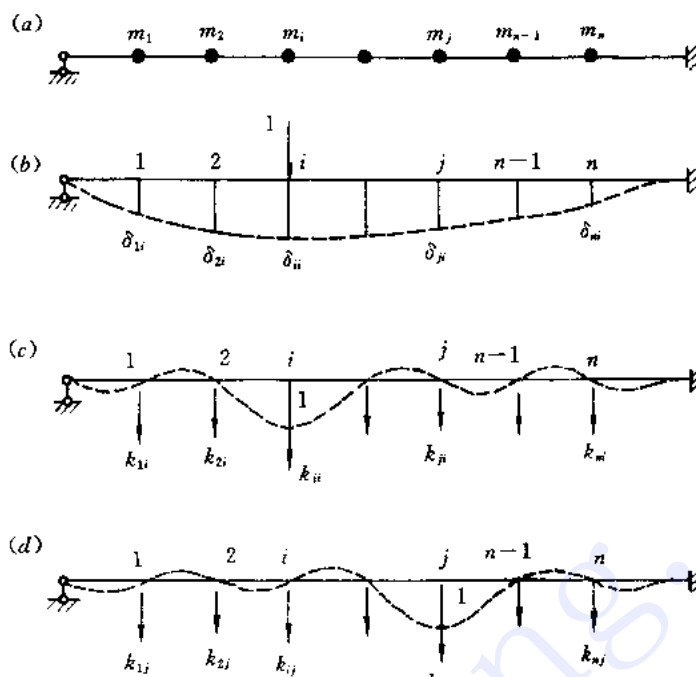


图 10-6-2

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \delta_{ji} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (i)$$

对状态(b)和状态(d)运用功的互等定理, 可得

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \delta_{ji} = 0$$

再引入反力互等定理, 并将下标轮换: $s \rightarrow j, j \rightarrow i, i \rightarrow s$, 可得

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \delta_{js} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n, s = 1, 2, \dots, n) \quad (i \neq s) \quad (j)$$

用刚度矩阵[K]前乘柔度矩阵[δ], 有

$$[K][\delta] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n k_{1j} \delta_{j1} & \sum_{j=1}^n k_{1j} \delta_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n k_{1j} \delta_{jn} \\ \sum_{j=1}^n k_{2j} \delta_{j1} & \sum_{j=1}^n k_{2j} \delta_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n k_{2j} \delta_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^n k_{nj} \delta_{j1} & \sum_{j=1}^n k_{nj} \delta_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n k_{nj} \delta_{jn} \end{bmatrix}$$

由式(i)和式(j)可知式[K]中主元素为1,副元素为0,因此有

$$[K][\delta] = [I]$$

同理可证

$$[\delta][K] = [I]$$

故[\delta]与[K]互为逆矩阵,即

$$[K] = [\delta]^{-1}, [\delta] = [K]^{-1}$$

从而证明了振动微分方程(g)与式(h)是相通的。

最后指出一点,从上面分析中可知

$$k_{ij} \neq \frac{1}{\delta_{ji}}$$

只有单自由度体系或振动方程互不耦合的多自由度体系,才存在下面的关系:

$$k_{ii} = \frac{1}{\delta_{ii}}$$

10-7 求自振频率与主振型和坐标选取有关吗?

结构的自振频率和主振型是结构的固有性质,它们只与结构的布局、约束情况、质量分布、截面尺寸和所选用的材料有关,与计算时所选坐标无关。

图 10-7-1(a)示一单质体的两个自由度体系,可选取不同的坐标系计算其自振频率和主振型。不同坐标系如图(b)和图(c)所示。

对图(b),有 $EI\delta_{11}=60, EI\delta_{22}=248.33, EI\delta_{12}=117.5$

频率 $\omega_1 = 0.057 \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_2 = 0.528 \sqrt{\frac{EI}{m}}$

主振型 $\frac{Y_{11}}{Y_{21}} = \frac{0.48}{1}, \quad \frac{Y_{12}}{Y_{22}} = -\frac{1}{0.48}$

主振型如图 10-7-2 所示。

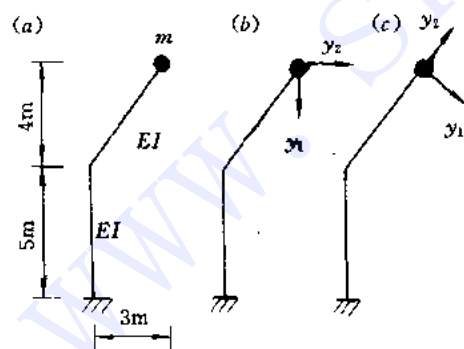


图 10-7-1

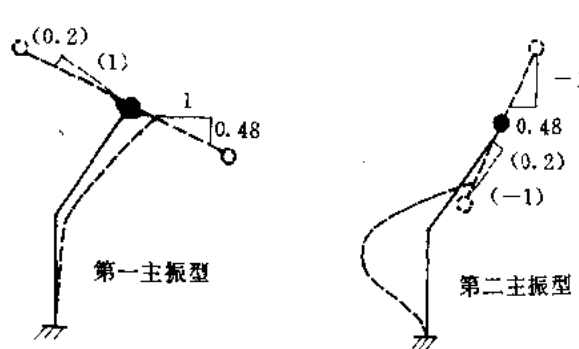


图 10-7-2

对图(c),有 $EI\delta_{11}=293.33, EI\delta_{22}=15, EI\delta_{12}=57.5$

$$\begin{aligned} \text{频率} \quad \omega_1 &= 0.057 \sqrt{\frac{EI}{m}}, & \omega_2 &= 0.528 \sqrt{\frac{EI}{m}}, \\ \text{主振型} \quad \frac{Y_{11}}{Y_{21}} &= \frac{1}{0.2}, & \frac{Y_{12}}{Y_{22}} &= -\frac{0.2}{1} \end{aligned}$$

主振型也如图 10-7-2 所示(圆括号内的数字)。

从对图(b)和对图(c)计算结果比较,它们的频率完全相等,主振型也完全相同,只不过按某一主振型振动时,任一时刻质点的位置随不同的坐标有不同的表达方式而已。

这里顺便指出,单质体两个自由度的体系,主振型的正交性表现为两个振型的振动方向相互正交,如图 10-7-2 中所示,这一点可以从主振型正交性的物理意义得到证明(见 10-9)。

图 10-7-3(a)为单自由度体系,自振频率 $\omega = 0.15 \sqrt{\frac{EI}{m}}$,振型为垂直于 AB 的直线。试问能否取图(b)所示的坐标 y_1, y_2 求解?。其结果是什么?

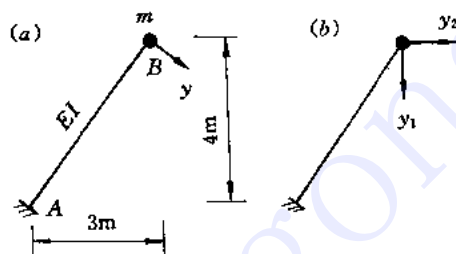


图 10-7-3

根据图(a)的约束情况,质体作微振动时只能沿 y 方向,任一时刻的加速度为 \ddot{y} 。由运动叠加原理, \ddot{y} 可分解为 \ddot{y}_1 和 \ddot{y}_2 ,于是对图(b)应用动静法,有

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -m\ddot{y}_1\delta_{11} - m\ddot{y}_2\delta_{12} \\ y_2 &= -m\ddot{y}_1\delta_{21} - m\ddot{y}_2\delta_{22} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

上式与用柔度法所建立的两个自由度体系的自由振动微分方程相同,因此可沿用其解法,即

$$EI\delta_{11} = 15, \quad EI\delta_{22} = \frac{80}{3}, \quad EI\delta_{12} = 20$$

$$\omega_1 = 0.155 \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_2 \rightarrow \infty$$

$$\frac{Y_{11}}{Y_{21}} = \frac{3}{4}, \quad \frac{Y_{12}}{Y_{22}} \rightarrow -\frac{4}{3}$$

第一主振型振动方向垂直于 AB,第二主振型沿 AB 方向。

这里得到的 ω_1 和第一主振型就是图(a)单自由度体系的频率和振型。而 $\omega_2 \rightarrow \infty$ 和 $\frac{Y_{12}}{Y_{22}} \rightarrow -\frac{4}{3}$, 表示质体沿 AB 方向没有主振动。这是当 $EA \rightarrow \infty$ 时的计算结果。如果 AB 杆抗拉刚度不是无穷大,图(a)的体系为两个自由度。

应当指出，体系的自振频率是指体系作主振动时的频率，不能笼统提沿水平方向振动或沿竖向方向振动的频率。如图 10-7-3(a)所示体系，它的主振动方向既不是水平方向也不是竖向方向。

10-8 求自振频率和主振型能否利用对称性？

对于自由度大于 2 的体系，求解频率方程

$$D = \begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m_2 & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} - \omega^2 m_n \end{vmatrix} = 0$$

是较为麻烦的。例如对三个自由度体系，就需用试算法求频率方程的三个根。若能利用对称性，可使频率方程降次，便于求解。

设一体系，结构对称，质量分布也对称，如图 10-8-1(a)所示体系（不失一般性），其自由振动微分方程为

$$y_i = - \sum_{j=1}^4 m_j \ddot{y}_j \delta_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (a)$$

由于对称性，有 $\delta_{11} = \delta_{44}, \delta_{22} = \delta_{33}, \delta_{13} = \delta_{42}, \delta_{21} = \delta_{34}$ 。

根据位移互等定理，有 $\delta_{ij} = \delta_{ji} (i \neq j)$ 。于是将式(a)的第一式和第四式相加，第二式和第三式相加，分别得

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= - m_1 \ddot{y}_1' \delta_{11}' - m_2 \ddot{y}_2' \delta_{12}' \\ y_2' &= - m_1 \ddot{y}_1' \delta_{21}' - m_2 \ddot{y}_2' \delta_{22}' \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } y_1' &= y_1 + y_4, & y_2' &= y_2 + y_3 \\ \delta_{11}' &= \delta_{11} + \delta_{44}, & \delta_{22}' &= \delta_{22} + \delta_{33}, \\ \delta_{12}' &= \delta_{21}' = \delta_{12} + \delta_{13} = \delta_{21} + \delta_{24} \end{aligned}$$

将式(a)第一式减去第四式，第二式减去第三式，分别可得

$$\left. \begin{aligned} y_1'' &= - m_1 \ddot{y}_1'' \delta_{11}'' - m_2 \ddot{y}_2'' \delta_{12}'' \\ y_2'' &= - m_1 \ddot{y}_1'' \delta_{21}'' - m_2 \ddot{y}_2'' \delta_{22}'' \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \text{式中, } y_1'' &= y_1 - y_4, & y_2'' &= y_2 - y_3 \\ \delta_{11}'' &= \delta_{11} - \delta_{44}, & \delta_{22}'' &= \delta_{22} - \delta_{33}, & \delta_{12}'' &= \delta_{21}'' = \delta_{12} - \delta_{13} = \delta_{21} - \delta_{24} \end{aligned}$$

至此，我们把一组四元二阶微分方程式(a)简化成两组二元二阶微分方程式(b)和(c)。换句话说，求四个自由度体系的频率简化成求两组两个自由度体系的频率。

利用对称性计算频率和主振型时，通常取半边结构计算。如图 10-8-1(a)所示的体系，其主振型不外于图(b)、(c)、(d)和(e)所示四种型式。图(b)和(c)为对称振型，图(d)和(e)

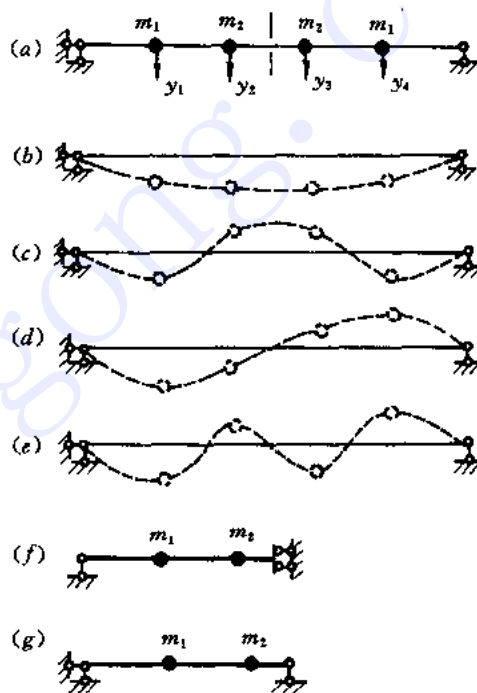


图 10-8-1

为反对称振型。它们分别可取图(f)和(g)所示的半边结构进行计算。

在结构动力计算中，低频振型对动力反应的影响要比高频振型的影响大得多，因此有时对多自由度体系往往只需求第一频率和第一主振型。另外，低频振型是结构位移形状容易实现的振型。就图 10-8-1(a)来说，可以断定图(b)是第一主振型，其位移曲线无拐点；图(d)是第二主振型，其位移曲线有一个拐点；图(c)为第三主振型，其位移曲线有两个拐点，而图(e)拐点最多(三个)则为第四主振型。

例 试求图 10-8-2(a)所示体系的第一频率和第一主振型。各杆 EI 相同。

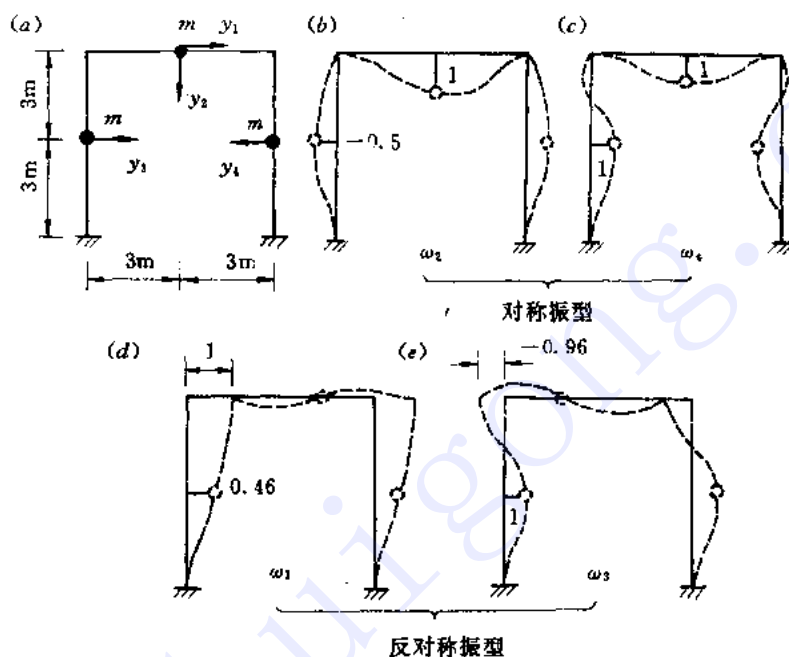


图 10-8-2

解 由于体系对称，其对称振型如图(b)和图(c)所示，反对称振型如图(d)和图(e)所示。观察各振型的位移曲线，可以看出图(d)最为简单，有三个拐点，是第一主振型；其次是图(b)，有四个拐点，为第二主振型；再其次是图(e)，有五个拐点，为第三主振型；图(c)有六个拐点，为第四主振型。因只需求第一频率和第一主振型，可只考虑反对称振动情况。

取半边结构如图 10-8-3(a)所示，横梁上的质量取为 $\frac{m}{2}$ 。采用柔度法，作 M_1 和 M_3 图，如图(b)和(c)所示，则有

$$EI\delta_{11} = \sum \int M_1 M_1 ds = 25.72, \quad EI\delta_{13} = 10.92, \quad EI\delta_{33} = 6.11$$

$$\omega_1 = 0.24 \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_3 = 0.77 \sqrt{\frac{m}{EI}}$$

$$\frac{Y_{11}}{Y_{31}} = \frac{1}{0.46}, \quad \frac{Y_{13}}{Y_{33}} = \frac{-0.96}{1}$$

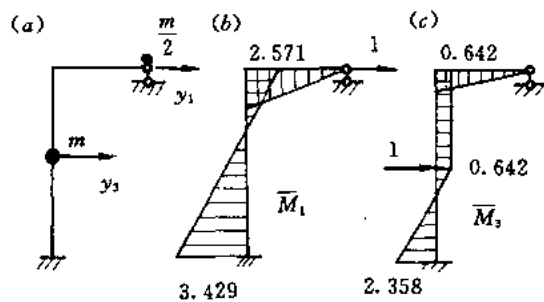


图 10-8-3

10-9 主振型正交性的意义是什么？

为了叙述方便，用图 10-9-1(a)所示的两个自由度体系讨论主振型关于质量的正交性的意义。图(b)为第一主振型，图(c)为第二主振型。主振型的正交性表现为下式

$$(Y_{11} \quad Y_{21}) \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \end{bmatrix} = 0$$

或 $m_1 Y_{11} Y_{12} + m_2 Y_{21} Y_{22} = 0$ (a)

主振型的位移幅值(Y_1, Y_2)就是体系在相应的惯性力幅值($\omega^2 m_1 Y_1, \omega^2 m_2 Y_2$)作用下所引起的静力位移，如图(b)和(c)所示。第一主振型的惯性力在第二主振型相应的位移幅值上所做虚功为

$$\begin{aligned} & \omega_1^2 m_1 Y_{11} Y_{12} + \omega_1^2 m_2 Y_{21} Y_{22} \\ & = \omega_1^2 (m_1 Y_{11} Y_{12} + m_2 Y_{21} Y_{22}) \end{aligned}$$

第二主振型惯性力在第一主振型相应位移幅值上所做虚功为

$$\omega_2^2 (m_1 Y_{12} Y_{11} + m_2 Y_{22} Y_{21})$$

依式(a)，上两式括号内和式值为零，即这些功为零。

可以想象到，既然每一主振型相应的惯性力在其它主振型上不做功，那么它的振动能量就不会转移到别的主振型上去。换句话说，当一个体系只按某一主振型振动时，不会激起其它主振型的振动。这说明各个主振型都能够单独出现，彼此线性无关。

现在我们来观察单质体两个自由度体系，如图 10-7-2 所示。主振型正交性式(a)变为下式

$$Y_{11} Y_{12} + Y_{21} Y_{22} = 0$$

即

$$\frac{Y_{11}}{Y_{21}} = -\frac{Y_{22}}{Y_{12}}$$

在这里主振型正交性具有几何意义，即图 10-7-2 所示的两个主振动轨迹相互正交，因为

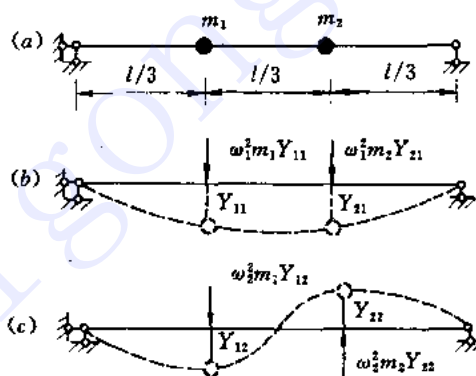


图 10-9-1

它们的斜率互为负倒数。

由于两个主振型轨迹正交，显然第一振型的惯性力 $\omega_1^2 m Y_1$ 在第二主振型位移 Y_2 上不做功，反之亦然。这就是主振型正交性的物理意义。

对于 n 个自由度体系，设任取两个不同的主振型 $\{Y^{(l)}\}$ 与 $\{Y^{(k)}\}$ ，它们之间关于质量的正交关系（第一正交关系）为

$$\{Y^{(l)}\}^T [M] \{Y^{(k)}\} = 0$$

表明 l 振型的惯性力在 k 振型的相应位移上不做功，式中 $[M]$ 为质量矩阵。对于任意两个主振型还存在第二个正交关系即关于刚度矩阵 $[K]$ 的正交关系：

$$\{Y^{(l)}\}^T [K] \{Y^{(k)}\} = 0$$

由于第二正交关系可由第一正交关系导出，故其物理意义与前者相同。

10-10 频率相等的两个主振型互相正交吗？

若两个主振型对应的频率彼此相等，则与此频率对应的主振型有无穷多个，它们并不一定彼此正交，但总可以选出两个主振型（其中一个为任选的）使它们彼此正交。

设有图 10-10-1(a) 所示两个自由度体系（平面内振动），质体位移用竖向分量 y_1 与水

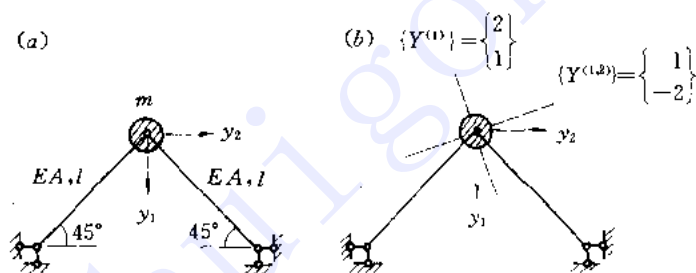


图 10-10-1

平分量 y_2 表示。可算出

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{l}{EA}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{ml}{EA}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{EA}{ml}} = \omega_{1,2}$$

因此该体系具有相等的两个自振频率，用 $\omega_{1,2}$ 表示。振幅方程为：

$$\begin{cases} \left(m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega_{1,2}^2} \right) Y_1 + m_2 \delta_{12} Y_2 = 0 \\ m_1 \delta_{21} Y_1 + \left(m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega_{1,2}^2} \right) Y_2 = 0 \end{cases} \quad (a)$$

由上式中任一式均得 $\frac{Y_1}{Y_2} = 0$ ，即 Y_1, Y_2 任意取值，式(a)均能成立。也就是说，相应于频率

$\omega_{1,2}$ 的主振型有无穷多个(在本例中,质体沿任一方向作直线振动都是主振型)。

若任取两个主振型,它们不一定正交。如取 $\{Y^{(1)}\} = (2 \ 1)^T$, $\{Y^{(2)}\} = (1 \ 2)^T$,它们均满足式(a),但

$$\{Y^{(1)}\}^T [M] \{Y^{(2)}\} = (2 \ 1) \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 4m \neq 0$$

即 $\{Y^{(1)}\}$ 与 $\{Y^{(2)}\}$ 不正交。

现在选择一个主振型与 $\{Y^{(1)}\}$ 正交。设 $\{Y^{(1,2)}\}$ 为 $\{Y^{(1)}\}$ 与 $\{Y^{(2)}\}$ 的线性组合,即

$$\{Y^{(1,2)}\} = \{Y^{(1)}\} + C\{Y^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + C \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2+C \\ 1+2C \end{Bmatrix}$$

式中 C 为常数。令

$$\{Y^{(1)}\}^T [M] \{Y^{(1,2)}\} = 0$$

即 $\{Y^{(1)}\}^T [M] \{Y^{(1)}\} + C\{Y^{(1)}\}^T [M] \{Y^{(2)}\} = 0$

解得
$$C = -\frac{\{Y^{(1)}\}^T [M] \{Y^{(1)}\}}{\{Y^{(1)}\}^T [M] \{Y^{(2)}\}} = -\frac{(2 \ 1) \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}}{(2 \ 1) \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}} = -\frac{5}{4}$$

于是得

$$\{Y^{(1,2)}\} = \begin{Bmatrix} 2 - \frac{5}{4} \\ 1 - 2 \times \frac{5}{4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

它与 $\{Y^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$ 彼此正交,如图 10-10-1(b)所示。于是我们在无穷多个主振型中选出了两个彼此正交的主振型。

可以证明,在 n 个自由度体系中,在频率方程具有两重(或多重)根的情况下,仍然可以选出 n 个主振型,使它们彼此正交。

10-11 什么叫做正则坐标? 什么叫做振型叠加法?

正则坐标是一种广义坐标,引入正则坐标使多自由度体系振动微分方程组不耦合。正则坐标(以两个自由度为例)与几何坐标 $y_1(t), y_2(t)$ 的关系为

$$\begin{cases} y_1(t) = Y_{11}\eta_1(t) + Y_{12}\eta_2(t) \\ y_2(t) = Y_{21}\eta_1(t) + Y_{22}\eta_2(t) \end{cases} \quad (a)$$

其中 $\eta_1(t), \eta_2(t)$ 为正则坐标。上式写成矩阵形式为

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} \quad (b)$$

简记为

$$\{y\} = [Y]\{\eta\}$$

式中 $[Y]$ 为主振型矩阵,由第一主振型向量 $\{Y^{(1)}\} = [Y_{11} \ Y_{21}]^T$ 和第二主振型向量 $\{Y^{(2)}\} = [Y_{12} \ Y_{22}]^T$ 组成的矩阵。 $[Y]$ 是方阵,而且由于不同振型对应各自的频率,互相独立,线

性无关，则有

$$| [Y] | \neq 0$$

因此 $[Y]$ 的逆阵存在，式(b)可写成

$$\begin{cases} \eta_1 \\ \eta_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases} \quad (c)$$

式(b)和式(c)说明了正则坐标 $\{\eta\}$ 与几何坐标 $\{y\}$ 有唯一对应关系。

图 10-11-1 表示出式(a)的关系，即体系振动时任一时刻的位置可由主振型的线性组合来表示，而组合系数 $\eta_1(t)$ 和 $\eta_2(t)$ 是时间的函数。

在一般情形下，两个自由度体系的自由振动可看作两个主振动的组合振动，即有

$$\begin{cases} y_1(t) = A_1 Y_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 Y_{21} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ y_2(t) = A_1 Y_{12} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 Y_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad (d)$$

对比式(a)和(d)，可知

$$\begin{cases} \eta_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ \eta_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad (e)$$

式(e)就是两个自由度体系以正则坐标描述的解。我们可以从自由振动微分方程组

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + k_{11} y_1 + k_{12} y_2 = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_{21} y_1 + k_{22} y_2 = 0 \end{cases} \quad (f)$$

推导出以正则坐标 η_1, η_2 表示的自由振动微分方程。为此，把式(a)代入式(f)，再分别以 Y_{11} 和 Y_{12} 乘第一式，分别以 Y_{21} 和 Y_{22} 乘第二式，将两式相加，再利用主振型正交性，分别得

$$\begin{cases} M_1 \ddot{\eta}_1 + K_1 \eta_1 = 0 \\ M_2 \ddot{\eta}_2 + K_2 \eta_2 = 0 \end{cases} \quad (g)$$

式中， $M_i = \{Y^{(i)}\}^T [M] \{Y^{(i)}\}$ ——第 i 振型的广义质量，

$K_i = \{Y^{(i)}\}^T [K] \{Y^{(i)}\}$ ——第 i 振型的广义刚度。

式(g)就是以正则坐标表示的自由振动微分方程，是两个独立的一元二阶微分方程，其解为式(e)。其中

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{M_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{M_2}}$$

它们就是两个自由度体系的第一频率和第二频率，这可以从式(d)和(e)看出。

综上所述，引入正则坐标使得耦合的微分方程组式(f)变为不耦合的微分方程组式(g)，即把二元二阶联立微分方程，通过正则坐标变换，简化成两个独立的一元二阶微分方程。对 n 个自由度的体系也可以同样简化。

从图 10-11-1 看出。正则坐标的物理意义就是任意振动位移曲线按主振型分解时各振型所占的比例。因此上述方法又称振型分解法。反过来，又称振型叠加法，即任意振动

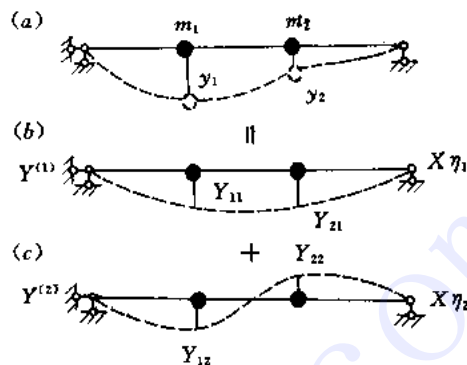


图 10-11-1

位移曲线可由各主振型按正则坐标比值叠加而成。

虽然利用正则坐标求自振频率没有什么好处(因为求 K_i 和 M_i 还需先知道振型 $\{Y^{(i)}\}$),但是在解决一般动荷载作用下的强迫振动问题时却是很好的方法。

10-12 如何用矩阵位移法分析多自由度体系的固有振动?

我们先讨论一个具体的算例。图 10-12-1(a)示两个自由度体系(考虑质体转动但不考虑杆件轴向变形), $EI = \text{常数}$ 。图(b)为任一时刻的动位移和惯性力(忽略转动惯性力)。采用矩阵位移法,其单元划分和结点位移分量定位号("1"为 y , "2"为 θ_c)如图(b)中所示。

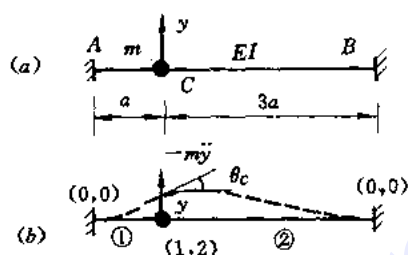


图 10-12-1

元刚度矩阵为

$$[K]^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} & -\frac{12EI}{a^3} & -\frac{6EI}{a^2} \\ & \frac{4EI}{a} & \frac{6EI}{a^2} & \frac{2EI}{a} \\ & & \frac{12EI}{a^3} & \frac{6EI}{a^2} \\ & \text{对称} & & \frac{4EI}{a} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[K]^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{12EI}{(3a)^3} & -\frac{6EI}{(3a)^2} & -\frac{12EI}{(3a)^3} & -\frac{6EI}{(3a)^2} \\ & \frac{4EI}{3a} & \frac{6EI}{(3a)^2} & \frac{2EI}{3a} \\ & & \frac{12EI}{(3a)^3} & \frac{6EI}{(3a)^2} \\ & \text{对称} & & \frac{4EI}{3a} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

结构刚度矩阵

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{112EI}{9a^3} & \frac{16EI}{3a^2} \\ \frac{16EI}{3a^2} & \frac{16EI}{3a} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

按动静法，荷载列阵为

$$\{P\} = \begin{pmatrix} -m\ddot{y} & 0 \end{pmatrix}^T \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

则矩阵位移法基本方程 $[K]\{\Delta\} = \{P\}$ 为

$$\frac{16EI}{3a} \begin{bmatrix} \frac{7}{3a^2} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta_c \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -m\ddot{y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a)$$

上式也是自由振动微分方程。

先对式(a)进行静力缩聚，消去不含惯性力的未知量 θ_c ，即从式(a)的第二式解出

$$\theta_c = -\frac{1}{a}y$$

代入第一式，得

$$\frac{64EI}{9a^3}y = -m\ddot{y} \quad (b)$$

即

$$m\ddot{y} + \frac{64EI}{9a^3}y = 0$$

故

$$\omega = \frac{8}{3a} \sqrt{\frac{EI}{a}}$$

这个解答事实上是一个自由度的解。

从上述具体例子可看出，与静力分析比较，用矩阵位移法分析多自由度自由体系的振动有如下异同点：

1. 静力分析基本方程为

$$[K]\{\Delta\} = \{P\} \quad (c)$$

而自由振动微分方程为

$$[K]\{y\} = -[M]\{\ddot{y}\} \quad (d)$$

其中 $[K]$ 为结构刚度矩阵，与静力分析相同； $[M]$ 为对角质量矩阵， $-[M]\{\ddot{y}\}$ 为惯性力。按动静法原理，引进惯性力后，就可按静力分析，所以式(d)和式(c)从概念上讲是一致的。

2. 若将集中质体处都作为结点，且为了计算规格化， $\{y\}$ 可与 $\{\Delta\}$ 相同。如图 10-12-2 所示体系， $\{\Delta\} = [\{\Delta_1\}, \{\Delta_2\}, \{\Delta_3\}]^T$ ， $\{\Delta_i\} = [u_i, v_i, \theta_i]^T$ ，结构划分四个单元。取 $\{y\}$ 与 $\{\Delta\}$ 相同，即认为每个质体有三个自由度，且无集中质量

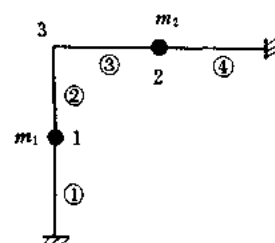


图 10-12-2

其中 $[D]=[δ][M]$ 称动力矩阵, $λ = \frac{1}{ω^2}$ 。

迭代法的计算过程如下:

1. 设一个标准化向量 $\{\bar{u}^{(0)}\}$ 作为第一主振型近似值。所谓标准化(加“-”)是指向量中某一元素规定为1。

计算

$$\{u^{(1)}\} = [D]\{\bar{u}^{(0)}\}$$

2. 使 $\{u^{(1)}\}$ 标准化, 即 $\{u^{(1)}\} = \alpha_1 \{\bar{u}^{(1)}\}$

3. 若 $|\bar{u}_i^{(1)} - \bar{u}_i^{(0)}| \leq \epsilon$, 迭代停止(其中 ϵ 为控制精度要求的很小的数), 取 $\{Y^{(1)}\} = \{\bar{u}^{(1)}\}$, $\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2} = \alpha_1$, 否则以 $\{\bar{u}^{(1)}\}$ 代替 $\{\bar{u}^{(0)}\}$, 继续迭代。

为什么迭代过程一般收敛于第一主振型呢? 从宏观看, 根据振型分解(n 个自由度)

$$\{\bar{u}^0\} = \eta_1 \{Y^{(1)}\} + \eta_2 \{Y^{(2)}\} + \dots + \eta_n \{Y^{(n)}\}$$

而

$$\{u^{(1)}\} = [D]\{\bar{u}^{(0)}\} = \sum_{i=1}^n \eta_i [D]\{Y^{(i)}\}$$

由于 $[D]\{Y^{(i)}\} = \frac{1}{\omega_i^2} \{Y^{(i)}\}$, 则

$$\{u^{(1)}\} = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{1}{\omega_i^2} \{Y^{(i)}\} = \alpha_1 \{\bar{u}^{(1)}\}$$

上式表示 $\{u^{(1)}\}$ 是由各振型缩小 ω_i^2 倍后的线性组合。但 $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$ 。显然, 经过一次迭代后, $\{\bar{u}^{(1)}\}$ 中第一振型成分要比 $\{\bar{u}^0\}$ 中多得多。也就是说每经过一次迭代, 高阶振型成分变少。因此, 只要 $\{\bar{u}^0\}$ 中含有 $\{Y^{(1)}\}$ 成分, 迭代收敛于第一主振型。

当用刚度法求得频率方程(电算常用)

$$[K]\{Y\} = \omega^2 [M]\{Y\}$$

则迭代过程一般收敛于最高振型。因为(对比前面讨论)每迭代一次, $\{u^{(1)}\}$ 是由各振型放大到 ω^2 倍后的线性组合, 所以每迭代一次, 频率越低的振型, 其成分越少。因此以刚度系数表示的频率方程要想直接求得第一振型应采用反迭代法。反迭代公式为

$$[K]\{H^{(r+1)}\} = [M]\{Y^r\}$$

式中 $\{H^{(r+1)}\} = \frac{1}{\omega^2} \{Y^{(r+1)}\} = \lambda \{Y^{(r+1)}\}$

反迭代法计算过程如下:

1. 设一标准化向量 $\{\bar{u}^{(0)}\}$ 为 $\{Y^{(0)}\}$, 求得

$$\{H^{(1)}\} = [K]^{-1} [M]\{\bar{u}^{(0)}\}$$

2. 使 $\{H^{(1)}\}$ 标准化, 求 $\{\bar{u}^{(1)}\}$, 即 $\{H^{(1)}\} = \alpha_1 \{u^{(1)}\}$

3. 若 $|\bar{u}_i^{(1)} - \bar{u}_i^{(0)}| \leq \epsilon$, 反迭代停止, 取 $\{Y^{(1)}\} = \{u^{(1)}\}$, $\lambda_1 = \alpha_1$, 否则以 $\{\bar{u}^{(1)}\}$ 代替 $\{\bar{u}^{(0)}\}$, 继续反迭代。

例 用迭代法和反迭代法求图 10-13-1 所示体系的频率和振型。

解 用刚度法, 频率方程为

$$[K]\{Y\} = \omega^2 [M]\{Y\}$$

代入 $[K]$ 、 $[M]$ 的具体数值, 为

$$\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix}$$

用迭代法求第二频率和第二振型。设 $\{\bar{u}^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ，则

$$\{u^{(1)}\} = [K]\{\bar{u}^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

$$\{u^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \{u^{(2)}\} = [K]\{u^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} -12 \\ 24 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{u}^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{Bmatrix}, \{u^{(3)}\} = [K]\{\bar{u}^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -18 \\ 30 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{u}^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0.6 \\ 1 \end{Bmatrix}, \{u^{(4)}\} = \begin{Bmatrix} -19.2 \\ 31.2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{u}^{(4)}\} = \begin{Bmatrix} -0.615 \\ 1 \end{Bmatrix}, \{u^{(5)}\} = \begin{Bmatrix} -19.38 \\ 31.35 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{u}^{(5)}\} = \begin{Bmatrix} -0.618 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

因 $\{\bar{u}^{(5)}\} \approx \{\bar{u}^{(4)}\}$ ，则取第二主振型

$$\{Y^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -0.618 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

用 $\{u^{(5)}\} = \omega_2^2 \{\bar{u}^{(5)}\}$ ， $\omega_2^2 = 31.38$ ， $\omega_2 = 5.6$

用反迭代法求第一频率和第一振型。

$$[K]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.167 & 0.083 \\ -0.083 & 0.083 \end{bmatrix}$$

设 $\{\bar{u}^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ， $\{H^{(1)}\} = [K]^{-1}[M]\{\bar{u}^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} 0.250 \\ 0.167 \end{Bmatrix}$

$$\{\bar{u}^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.67 \end{Bmatrix}$$
， $\{H^{(2)}\} = [K]^{-1}[M]\{\bar{u}^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.22 \\ 0.14 \end{Bmatrix}$

$$\{\bar{u}^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.64 \end{Bmatrix}$$
， $\{H^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0.22 \\ 0.14 \end{Bmatrix}$

$$\{\bar{u}^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.64 \end{Bmatrix}$$

因 $\{\bar{u}^{(3)}\} = \{\bar{u}^{(2)}\}$ ，故取第一主型

$$\{Y^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.64 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \alpha_1 = 0.22, \quad \omega_1 = 2.13$$

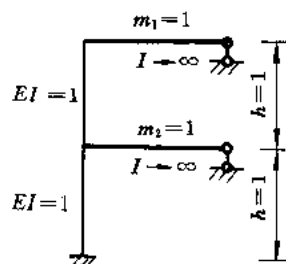


图 10-13-1

10-14 动荷载作用点不在多自由度体系的集中质体上时，动力计算如何进行？

在引入假想惯性力后按刚度法或柔度法均可以求解。先讨论两个自由度体系。图

10-14-1(a)示承受任意分布的简谐荷载的两个自由度体系。取质体为研究对象, 其受力图如图(b)所示, 按动静法, 由 $\Sigma Y=0$, 有

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + k_{11} y_1 + k_{12} y_2 &= R_{1P} \sin \theta t \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_{21} y_1 + k_{22} y_2 &= R_{2P} \sin \theta t \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

上式就是按刚度法建立的强迫振动运动方程。其中 k_{ij} 为刚度系数, 例如 k_{12} 是使点 2 产生单位位移(点 1 位移保持为零)在点 1 所需施加的力。 R_{ip} 是结点位移均为零时, 动荷载幅值施加给动点的力。换句话说, R_{ip} 是在动荷载幅值作用下使动点位移为零需在动点反向施加的外力。位移与外力均以向下为正。

在平稳振动阶段, 设式(a)的特解为

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= Y_1 \sin \theta t \\ y_2 &= Y_2 \sin \theta t \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

于是惯性力为

$$\left. \begin{aligned} I_1(t) &= -m_1 \ddot{y}_1 = m_1 \theta^2 Y_1 \sin \theta t = I_1 \sin \theta t \\ I_2(t) &= -m_2 \ddot{y}_2 = m_2 \theta^2 Y_2 \sin \theta t = I_2 \sin \theta t \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

其中惯性力幅值

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= m_1 \theta^2 Y_1 \\ I_2 &= m_2 \theta^2 Y_2 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

由上式可知 Y_i 和 I_i 存在简单关系, 先求出它们之间任一个都可以。为了求 I_i , 将式(b)、(c)、(d)代入式(a), 消去公因子 $\sin \theta t$, 得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{k_{11}}{m_1 \theta^2} - 1 \right) I_1 + \frac{k_{12}}{m_2 \theta^2} I_2 &= R_{1P} \\ \frac{k_{21}}{m_1 \theta^2} I_1 + \left(\frac{k_{22}}{m_2 \theta^2} - 1 \right) I_2 &= R_{2P} \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

式(e)就是刚度法求惯性力幅值的公式。

不难导出由柔度系数表示的求 I_1 和 I_2 的公式为

$$\left. \begin{aligned} \left(\delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} \right) I_1 + \delta_{12} I_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} I_1 + \left(\delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} \right) I_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

例 试求图 10-14-2(a)所示刚架的最大动弯矩图, 设 $\theta^2 = \frac{12EI}{ml^3}$, 各杆 EI 相同。

解 1. 刚度法

$$\begin{aligned} R_{1P} &= -0.39P, & R_{2P} &= 0.63P \\ k_{11} &= 66.76 \frac{EI}{l^3}, & k_{12} = k_{21} &= -6.26 \frac{EI}{l^3}, & k_{22} &= 2.09 \frac{EI}{l^3} \end{aligned}$$

代入式(e)解得

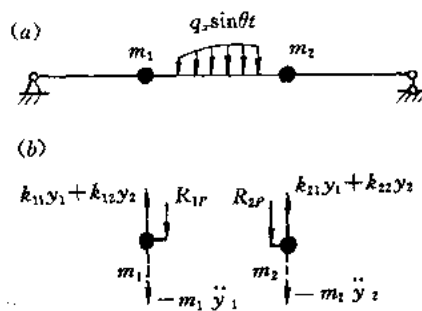


图 10-14-1

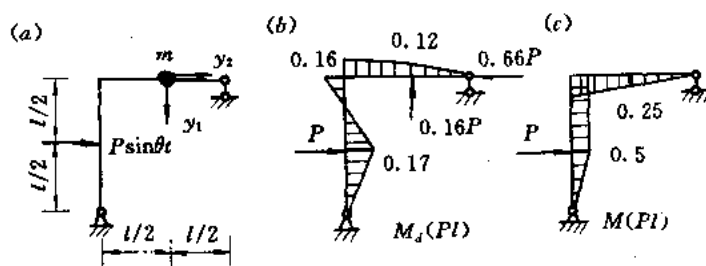


图 10-14-2

$$I_1 = -0.16P, \quad I_2 = -0.66P$$

由式(d), 有
$$Y_1 = -0.0133 \frac{Pl^3}{EI}, \quad Y_2 = -0.055 \frac{Pl^3}{EI}.$$

从式(c)看出, 惯性力与简谐荷载同时达到最大值(绝对)。最大动弯矩图为荷载幅值与惯性力幅值共同作用下的弯矩图, 如图(b)所示。图(c)为相应的静弯矩图。可见各截面弯矩放大系数是不同的, 其最大者(即动力系数)为

$$\frac{0.12}{0.25} = 0.48$$

2. 柔度法

$$\Delta_{1P} = \frac{Pl^3}{32EI}, \quad \Delta_{2P} = \frac{19Pl^3}{48EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l^3}{16EI}, \quad \delta_{22} = \frac{2l^3}{3EI}$$

代入式(f), 解得

$$I_1 = -0.16P, \quad I_2 = -0.66P$$

以上计算方法可推广到三个自由度以上的体系。

10-15 主振型叠加法能否用于静力计算?

可以。动力计算与静力计算的主要区别在于是否考虑惯性力的影响, 而静荷载可以看成动荷载的特例。主振型叠加法是将结构一般振动(自由振动或强迫振动)分解为诸主振型振动, 或一般振动看成由诸主振型按一定比例叠加而成。所以主振型叠加法在原理上可用于静力计算。

下面先讨论主振型叠加法解多自由度体系在一般动荷载作用下的强迫振动问题。

n 个自由度体系强迫振动方程(刚度法)为

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{P(t)\} \quad (a)$$

其中 $[M]$ 为质量矩阵

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix}$$

$[K]$ 为刚度矩阵

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

$\{P(t)\}$ 为动载列阵

$$\{P(t)\} = [P_1(t) \quad P_2(t) \quad \cdots \quad P_n(t)]^T$$

引入正则坐标变换(见 10-11)

$$\{y\} = [Y]\{\eta\} \quad (b)$$

式中 $\{\eta\}$ 为正则坐标列阵

$$\{\eta\} = [\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n]^T$$

$[Y]$ 为主振型 $\{Y^{(i)}\}$ 组成的矩阵,称主振型矩阵。

$$[Y] = [\{Y^{(1)}\}, \{Y^{(2)}\}, \cdots, \{Y^{(n)}\}]$$

把式(b)代入式(a),再前乘以 $[Y]^T$,得

$$[Y]^T[M][Y]\{\ddot{\eta}\} + [Y]^T[K][Y]\{\eta\} = [Y]^T\{P(t)\} \quad (c)$$

令 $[M^*] = [Y]^T[M][Y]$ ——广义质量矩阵,是对角矩阵,即

$$[M^*] = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_n \end{bmatrix}$$

$[K^*] = [Y]^T[K][Y]$ ——广义刚度矩阵,也是对角矩阵,即

$$[K^*] = \begin{bmatrix} K_1 & & & \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_n \end{bmatrix}$$

$\{F(t)\} = [Y]^T\{P(t)\}$ ——广义荷载列阵,可写成

$$\{F^*(t)\} = [F_1(t), F_2(t), \cdots, F_n(t)]^T$$

于是式(c)可写成

$$M_i \ddot{\eta}_i + k_i \eta_i = F_i(t) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (d)$$

至此,耦合的微分方程组(a),经过正则坐标转换后已解耦为 n 个独立的微分方程(d),相当于求解 n 个单自由度体系强迫振动问题。式(d)的特解可参照杜哈梅积分写出

$$\eta_i = \frac{1}{M_i \omega_i} \int_0^t F_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad (e)$$

求出 $\{\eta\}$ 后,由式(b)求得 $\{y\}$,即

$$\{y\} = \eta_1 \{Y^{(1)}\} + \eta_2 \{Y^{(2)}\} + \cdots + \eta_n \{Y^{(n)}\}$$

这里再一次看到,动位移 $\{y\}$ 是由各主振型 $\{Y^{(i)}\}$ 按比例 η_i 叠加而成。

例 用主振型叠加法作图 10-15-1(a)所示梁的弯矩图, P 为静载。

解 为了叙述方便,不妨以图(b)所示的体系代替图(a)。在图(b)中,设 m 为常数,

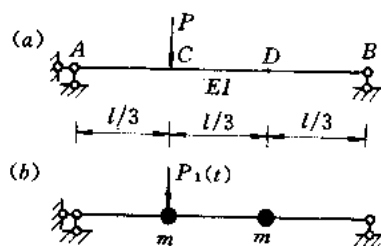


图 10-15-1

$P_1(t) = P \frac{t}{t_1}, t_1 \rightarrow \infty$ (所谓静载 P 是指从 0 逐渐增加到 P , 见 1-3)。现在按主振型叠加法分析图 (b)。其两个自振频率为

$$\omega_1 = 5.69 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \quad \omega_2 = 22 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

两个主振型为

$$\{Y^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{Y^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

主振型矩阵

$$[Y] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

广义质量 $M_1 = \{Y^{(1)}\}^T [M] \{Y^{(1)}\} = 2m, \quad M_2 = \{Y^{(2)}\}^T [M] \{Y^{(2)}\} = 2m$

广义荷载 $F_1 = \{Y^{(1)}\} \{P(t)\} = P \frac{t}{t_1}, \quad F_2 = \{Y^{(2)}\} \{P(t)\} = P \frac{t}{t_1}$

求正则坐标, 由式 (e)

$$\eta_1 = \frac{1}{M_1 \omega_1} \int_0^t P \frac{\tau}{t_1} \sin \omega_1 (t - \tau) d\tau = \frac{P}{2m \omega_1^2 t_1} \left(t - \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{M_2 \omega_2} \int_0^t P \frac{\tau}{t_1} \sin \omega_2 (t - \tau) d\tau = \frac{P}{2m \omega_2^2 t_1} \left(t - \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right)$$

当 $t_1 \rightarrow \infty$, 有

$$\eta_1 = 0, \quad \eta_2 = 0$$

由式 (b), 有

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0$$

即体系在这种荷载下不产生振动, 也不存在惯性力, 因此所有动力反应同静力反应相同。

因此图 (b) 的 C 截面弯矩仅在 $P \frac{t}{t_1}$ 作用下产生, 其值为

$$M_C = \frac{2}{9} Pl \frac{t}{t_1}$$

当 $t = t_1 \rightarrow \infty$, 得

$$M_C = \lim_{t=t_1 \rightarrow \infty} \frac{2}{9} Pl \frac{t}{t_1} = \frac{2}{9} Pl$$

10-16 怎样用主振型叠加法求解简谐荷载作用下的强迫振动?

10-14 是直接利用几何坐标求解多自由体系在振动荷载下的强迫振动。主振型叠加法在原理上适用于求解线弹性体系在一般动荷载下的振动问题(只要杜哈梅积分可积),自然也适用于简谐荷载。此法用于不同动荷载时,其差别仅在求广义荷载 $\{F_i(t)\}$ 。

图 10-16-1 示两自由度体系承受简谐荷载的情况。其中 k_1, k_2 分别为一层和二层层间侧移刚度,即 k_1 等于使一层横梁有单位侧移(二层横梁不动)在一层所需加的剪力, k_2 为使二层与一层有单位相对侧移在二层所需加的剪力。不难求得此体系自振频率和主振型:

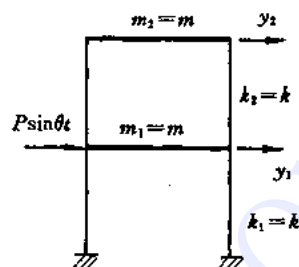


图 10-16-1

$$\omega_1^2 = 0.382 \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 2.618 \frac{k}{m}$$

$$\{Y^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.618 \end{Bmatrix}, \quad \{Y^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{Bmatrix}$$

广义质量矩阵 $[M^*] = [Y]^T [M] [Y] = \begin{bmatrix} 3.62m & 0 \\ 0 & 1.38m \end{bmatrix}$

广义荷载列阵 $\{F^*(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} = [Y]^T \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P \sin \theta t \\ P \sin \theta t \end{Bmatrix}$

正则坐标

$$\eta_1 = \frac{P}{3.62m\omega_1^2} \int_0^t \sin \theta \tau \sin \omega_1(t - \tau) d\tau = \frac{P}{3.62m\omega_1^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_1^2}} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right]$$

$$\eta_2 = \frac{P}{1.38m\omega_2^2} \int_0^t \sin \theta \tau \sin \omega_2(t - \tau) d\tau = \frac{P}{1.38m\omega_2^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_2^2}} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) \right]$$

由正则坐标变换

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = [Y] \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.618 & -0.618 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix}$$

得

$$y_1(t) = \frac{P}{3.62m(\omega_1^2 - \theta^2)} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) + \frac{P}{1.38m(\omega_2^2 - \theta^2)} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right)$$

$$y_2(t) = \frac{1.618P}{3.62m(\omega_1^2 - \theta^2)} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) - \frac{0.618P}{1.38m(\omega_2^2 - \theta^2)} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right)$$

上式中右边第二项和第四项具有自振频率的振动,称伴生自由振动(见 10-17),由于阻尼存在,它们很快消失,余下纯强迫振动

$$y_1(t) = \left(\frac{0.276}{\omega_1^2 - \theta^2} - \frac{0.725}{\omega_2^2 - \theta^2} \right) \frac{P}{m} \sin \theta t = Y_1 \sin \theta t$$

$$y_2(t) = \left(\frac{0.447}{\omega_1^2 - \theta^2} - \frac{0.447}{\omega_2^2 - \theta^2} \right) \frac{P}{m} \sin \theta t = Y_2 \sin \theta t$$

10-17 何谓伴生自由振动?

由动荷载本身激起的振动中含有衰减波动成分的这部分振动称伴生自由振动,它与初始条件无关。即当 $t=0$, 初位移 $y_0=0$ 和初速度 $\dot{y}_0=0$ 的情况下作用动荷载后伴随产生的自由振动。

下面以单自由度体系考虑低阻尼 ($\xi < 1$) 并承受与振动方向一致的简谐荷载的强迫振动为例讨论伴生自由振动。

设振动微分方程为

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = P \sin \theta t \quad (a)$$

式中 c 为阻尼系数, 设 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\xi = \frac{c}{2m\omega}$, 上式写成

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = \frac{P}{m} \sin \theta t \quad (b)$$

式(b)的齐次解为

$$y = e^{-\xi\omega t} a \sin(\omega_r t + \alpha) \quad (c)$$

其中

$$\omega_r = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{(v_0 + \xi\omega y_0)^2}{\omega_r^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0 \omega_r}{v_0 + \xi\omega y_0}$$

这个齐次解就是含有自由振动部分, 它与初始条件 y_0 和 v_0 (初速度) 有关, 是逐渐衰减的波动。

设式(b)的特解为

$$y = A \sin \theta t + B \cos \theta t$$

代入式(b)可求得

$$A = \frac{P}{m} \frac{\omega^2 - \theta^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 \theta^2},$$

$$B = \frac{P}{m} \frac{-2\xi\omega\theta}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 \theta^2}$$

式(b)的齐次解可写成

$$y = e^{-\xi\omega t} (c_1 \cos \omega_r t + c_2 \sin \omega_r t)$$

于是式(b)的全解为

$$y = e^{-\xi\omega t} (c_1 \cos \omega_r t + c_2 \sin \omega_r t) + A \sin \theta t + B \cos \theta t \quad (d)$$

$$\dot{y} = e^{-\xi\omega t} [-c_1(\xi\omega \cos \omega_r t + \omega_r \sin \omega_r t) - c_2(\xi\omega \sin \omega_r t - \omega_r \cos \omega_r t)] + \theta(A \cos \theta t - B \sin \theta t) \quad (e)$$

其中 c_1, c_2 由初始条件确定。

现在分析当体系处于静止状态(即 $t=0, y_0=0, \dot{y}_0=0$)时加上振动荷载后的情况。将

此初始条件代入式(d)和(e),分别得

$$\begin{cases} c_1 + B = 0 \\ -\xi\omega c_1 + \omega_r c_2 + \theta A = 0 \end{cases}$$

联立求得

$$\begin{aligned} c_1 &= -B \\ c_2 &= -\frac{\xi\omega B + \theta A}{\omega_r} \end{aligned}$$

它们都是常数。于是这时的振动方程为

$$y = e^{-\xi\omega t} \left(-B\cos\omega_r t - \frac{\xi\omega B + \theta A}{\omega_r} \sin\omega_r t \right) + (A\sin\theta t + B\cos\theta t) \quad (f)$$

上式右边第一大项是自振频率为 ω_r 的衰减波动,它就是伴生自由振动,在短时间内很快消失。第二大项是频率为简谐荷载频率 θ 的纯强迫振动。

对于一般动荷载 $P(t)$, 振动微分方程

$$\ddot{y} + 2\xi\omega\dot{y} + \omega^2 y = P(t)$$

其全解为

$$y = e^{-\xi\omega t} (c_1 \cos\omega_r t + c_2 \sin\omega_r t) + \frac{1}{m\omega_r} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\omega_r(t-\tau) d\tau \quad (g)$$

其中 c_1, c_2 由初始条件确定,若将 $t=0, y_0=0, \dot{y}_0=0$ 代入,可求得 c_1 和 c_2 。所以式(g)右边第一大项就是伴生自由振动。

383



参考文献

- [1] 龙驭球,包世华主编. 结构力学. 上、下册. 高等教育出版社,1979;1981
- [2] 杨弗康,李家宝主编. 结构力学. 上、下册(第三版),高等教育出版社,1983
- [3] 杨天祥主编. 结构力学. 高等教育出版社,1986
- [4] 李廉锟主编. 结构力学. 高等教育出版社,1983
- [5] 金宝桢主编. 杨式德,朱宝华编. 朱宝华主订. 结构力学. 第三版. 高等教育出版社,1987
- [6] 杨耀乾,唐昌荣编. 结构力学. 上册(第三版). 高等教育出版社,1987
- [7] 龙驭球,包世华编. 结构力学教程. 高等教育出版社,1988
- [8] 粟一凡主编. 建筑力学. 高等教育出版社,1979
- [9] 华东水利学院结构力学教研组编. 结构力学. 上、下册. 水利出版社,1983
- [10] 拉宾诺维奇著. 清华大学结构力学及纲木结构教研室译. 建筑力学教程. 第一卷,第二卷. 高等教育出版社,1954,1956
- [11] Timoshenko S. and Young D.H. Theory of structures 2nded, New York, McGraw Hill. 1965
- [12] 普罗柯耶夫 ИИ. 结构理论. 第一卷. 陈英俊译. 商务印书馆,1954
- [13] 铁摩辛柯 S., 盖尔 J. 材料力学. 胡人礼译. 科学出版社,1978
- [14] Darkov A. Structural Mechanics. Mir Publishers, Moscow, 1983
- [15] Ghali A, Neville A M, Cheung Y K. Structural Analysis. International Text-Book Company, 1972
- [16] 普齐米尼斯基 J S 著. 王德荣等译. 矩阵结构分析理论. 国防工业出版社,1975
- [17] 龙驭球编. 有限元法概论. 高等教育出版社,1978
- [18] 张玉良, 匡文起. 结构矩阵分析. 辽宁科学技术出版社,1987
- [19] 王光远. 建筑结构的振动. 科学出版社,1978
- [20] 克拉夫 R W 等. 王光远等译. 结构动力学. 科学出版社,1981
- [21] 缪加玉. 结构力学的若干问题. 成都科技出版社,1993