

结构力学的若干问题

缪加玉 著

责任编辑 许文深

成都科技大学出版社出版发行

四川峨影印刷厂 印刷

开本 850×1168 1/23 印张 5.5 字数 130 千字

1993年11月第1版 1993年11月第1次印刷

印数 1—1200

ISBN 7—5616—2680—0/O·180

定价：5.00 元

内 容 提 要

本书论述了结构力学中的一些问题,包括疑难讨论,特殊方法,难题选解等。全书共分六章:平面体系的机动分析,静定结构内力分析,影响线及应用,结构位移计算,超静定结构的计算和专题部分。本书可供土建、道桥、水利、机械等专业的师生和工程技术人员参考。

目 录

前 言

第一章 平面体系的机动分析

§ 1-1	刚片代换法	1
§ 1-2	辊轴支座与链杆支座辨异	2
§ 1-3	三虚铰均在无穷远处的讨论	4
§ 1-4	等效四连杆机构分析法	8
§ 1-5	零载法中应注意的问题	12
§ 1-6	机动分析的其他方法	14
§ 1-7	再论瞬变体系	25

第二章 静定结构内力分析

§ 2-1	弯矩图的快速绘制	31
§ 2-2	图形叠加的画法	34
§ 2-3	曲杆的荷载与内力间的微分关系及应用	35
§ 2-4	通路法	38
§ 2-5	复杂桁架难题举例	39

第三章 影响线及应用

§ 3-1	作影响线的联合法	44
§ 3-2	机动法作影响线的几个问题	46
§ 3-3	中-活载的来历及沿革	52
§ 3-4	中-活载的换算均布荷载	59
§ 3-5	绝对最大弯矩猜想	72

第四章 结构位移计算

§ 4-1	怎样勾绘变形曲线	76
§ 4-2	圆形截面剪应力不均匀系数	80
§ 4-3	工字形截面剪应力不均匀系数公式合理性的讨论	82
§ 4-4	曲杆应变能及位移计算的较精确公式	84
§ 4-5	用图乘法求纯弯曲梁的挠曲线为何得不到圆弧	87
§ 4-6	温度变化时互等定理不成立	90
§ 4-7	难题选解	92

第五章 超静定结构的计算

§ 5-1	对称性利用中的若干问题	97
§ 5-2	多余未知力与荷载可加在不同的基本结构上	102
§ 5-3	有刚度无穷大杆时位移法基本未知量数目	106
§ 5-4	刚架承受结点集中荷载时弯矩是否为零的判定	108
§ 5-5	无剪力分配法可直接应用于对称空腹梁	111
§ 5-6	三三制反弯点法— 简化 D 值法	114
§ 5-7	合成刚架无剪力分配 D 值分摊法	119
§ 5-8	难题选解	124

第六章 专题部分

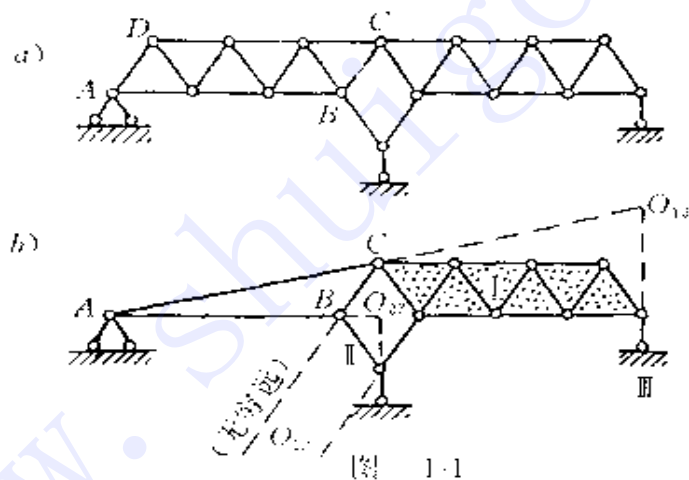
§ 6-1	平面刚架程序的扩大应用	139
§ 6-2	刚架稳定简化为压杆稳定问题	146
§ 6-3	不经计算勾绘主振型形状	151
§ 6-4	静力分析程序与动力计算的一种衔接方式	155
§ 6-5	难题选解	157

参考文献	166
------------	-----

第一章 平面体系的机动分析

§ 1-1 刚片代换法

在机动分析(或称几何构造分析)中,对于任何一个刚片,不论其大小、形状、构造如何,只要本身没有多余联系,则可在不改变与其他部分联结方式的前提下,用一个铰结三角形(或若干个铰结三角形组成的静定体系)来代换,显然这并不会改变原体系的几何构造性质。用这种方法,有时可使一个复杂问题变得非常简单。



例如图 1-1a 所示桁架,用简单组成规则是无法分析的。其中 $ABCD$ 部分为一个静定刚片,而用 A, B, C 三个铰与其他部分相联,若用铰结三角形 ABC 来代替(图 1-1b),则可按三刚片规则分析,从而得知此体系是几何不变且无多余联系的。

又如图 1-24a 中的杆件 O_2 和 24 ,需用图 1-24b 中所示铰结三角形来代替,方可顺利地作出其速度图。再如用计算机方法进行机动

分析时，宜将体系中的所有刚片均用铰结三角形或其组合体来替换，以使约束条件简化为单一形式而便于建立方程组，其程序既简单又更具通用性。

§ 1-2 辊轴支座与链杆支座辨异

在结构的计算简图中，辊轴支座通常有两种表示方式，一种如图 1-2a 所示，它如实反映了这种支座对结构的约束情况；另一种如图 1-2b 所示，用一根垂直于支承面的链杆来表示。为了区别，我们把前者称为辊轴支座，后者称为链杆支座。这两种支座都允许结构绕铰 A 转动，这是相同之处。此外，辊轴支座允许 A 点作水平移动，不论移到哪里，其反力永远是竖直方向的；而链杆支座则是允许 A 点绕 B 点转动，一旦转动后，其反力也就倾斜了，这是二者的不同点。当然，在后者中 A 点的位移很小时，其方向可看作是水平的，其反力也仍可认为是竖向的。正由于我们一般研究的都是微小位移问题，所以上述两种表示方式被认为没有什么差别，在绘结构的计算简图及分析计算中，可随意将辊轴支座画成链杆支座。

然而，在某些场合下则须区别这两种支座而不允许混淆和随意代换，即使所研究的仍然是微小位移的问题，这就是判定某些特殊体系究竟是瞬变还是几何可变（常变）的时候。

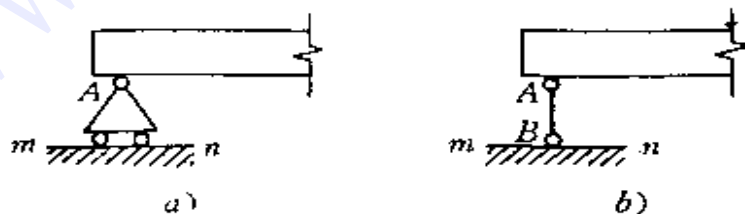


图 1-2

例如图 1-3a 所示两刚片用三根平行但不全等长的链杆相联，为瞬变体系；若将三链杆均换为辊轴支座，如图 1-3b，则显然为常

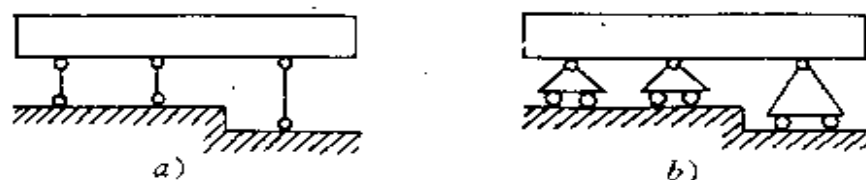


图 1-3

变体系。可见此时不能随便代换。

又如图 1-4a 所示体系是瞬变的，因为一旦发生微小位移后，三铰便不再共线；但若左右两链杆支座改为辊轴支座(图 1-4b)，则当发生位移后，两支座仍相当于竖向链杆，由几何关系易证三铰仍将共线，于是位移可一直进行下去，因而是常变体系了。

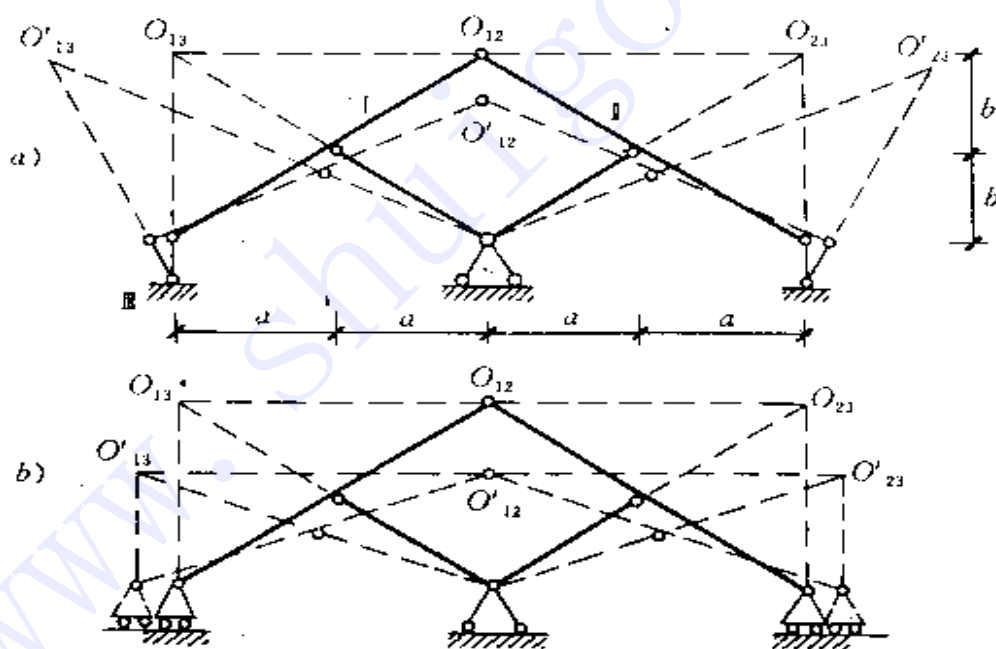


图 1-4

诚然，对图 1-4a 所示计算简图，我们判定它是瞬变体系，这是理所当然的。但是不应忘记，计算简图是由实际结构抽象而来。因此若实际体系左右两支座确实是链杆支座，这样分析是对的；但若

实际体系两端系铰轴支座，则应还其本来面目按图 1-4b 分析才对。

那末，在上述各例中，是否就一定不能以链杆支座代替铰轴支座呢？还是可以的，但条件是链杆支座的链杆应该假想地取为无限长，这样两种支座才完全等同。

§ 1-3 三虚铰均在无穷远处的讨论

三刚片用三对链杆两两相联时，体系是瞬变还是几何不变，取决于三虚铰是否在同一直线上。那末，当用三对平行链杆相联时（图 1-5），三虚铰均在无穷远处，它们是否在同一直线上呢？

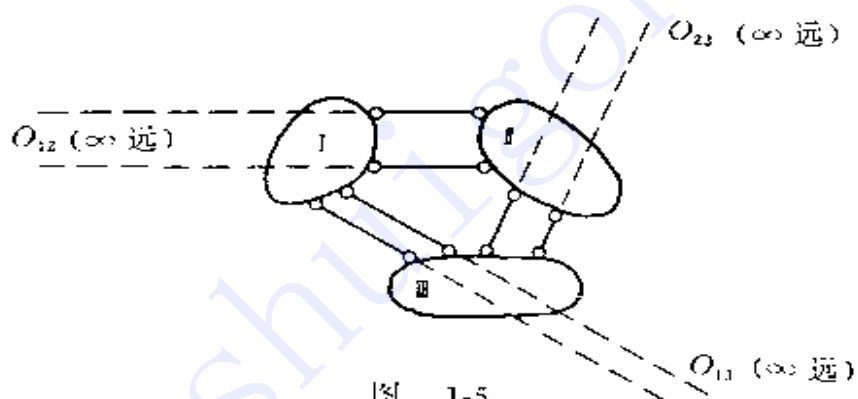


图 1-5

曾有一种解释说，过三点可作一圆，三点均无穷远，则圆的半径为无穷大，半径无穷大的圆弧可看成直线，故三无穷远虚铰在同一直线上，因此体系瞬变。但若按此说法，只有两虚铰在无穷远的情况（图 1-6）都应是瞬变体系了，因为此时过三虚铰作的圆半径也是无穷大。然而图 1-6 体系却是几何不变的（当组成二无穷远虚铰之四杆不全平行时）。可见，这种解释方法是不能成立的。事实上，三无穷远点是否共线的问题，初等几何是无法讨论的。射影几何学证明，一个平面上不同方向的所有无穷远点的集合是一条直线，称为无穷远直线，而一切有限远点均不在此直线上。据此可知，三虚

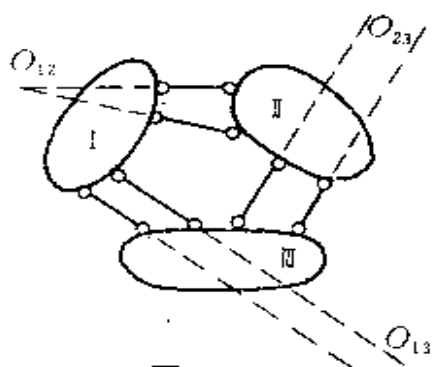


图 1-6

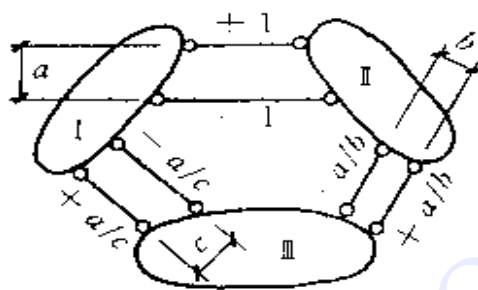


图 1-7

铰均在无穷远时应属瞬变体系。但除此之外，我们还可用其他一些方法来说明这种体系的瞬变性。

例如，可用零载法来分析。设三对平行链杆的间距分别为 a 、 b 、 c ，如图 1-7 所示，则在零荷载下，设各杆有图示非零内力存在，能满足所有平衡条件。此时每一刚片均受着大小相等方向相反的一对力偶作用，均能平衡。可见这一体系是瞬变的。

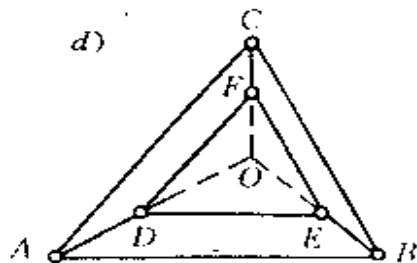
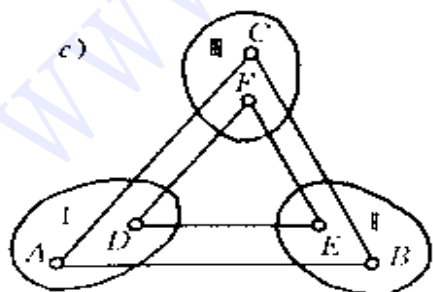
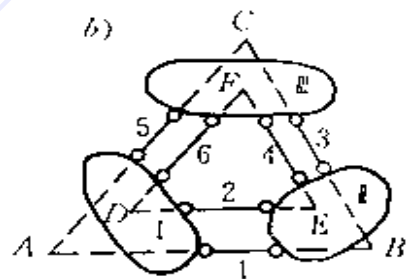
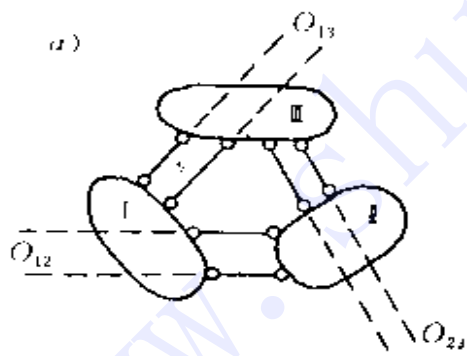


图 1-8

又如，我们可以将这种三刚片体系化为两刚片体系来说明其瞬变性。例如图 1-8a 所示体系，可将各链杆延长而得到交点 A 、 B 、 C 和 D 、 E 、 F (图 1-8b)，然后将刚片范围画大一些，链杆加长一些，而以杆 AB 代替杆 1，杆 DE 代替杆 2，…… 便得到图 1-8c 所示体系。此时并未改变三虚铰的位置，因此不会改变体系是否几何不变的性质。在此体系中，刚片 I、II、III 均只在两点与其他部分铰联，故均可当成链杆看待，因此又可画成图 1-8d 的形式。对此体系分析时，则可将三角形 ABC 和 DEF 作为刚片，将 AD 、 BE 、 CF 当作链杆，这就将原体系化为两刚片用三链杆相联了。当 $AB \parallel DE$ 、 $BC \parallel EF$ 和 $CA \parallel FD$ 时，容易证明， AD 、 BE 、 CF 三杆交于同一点 O ，因而是瞬变的。由此推知，原体系亦为瞬变。

再如，还可以从直接分析三刚片间发生微小相对平动的可能性，来说明这种体系的瞬变性。如图 1-9a 所示体系，三刚片用三对

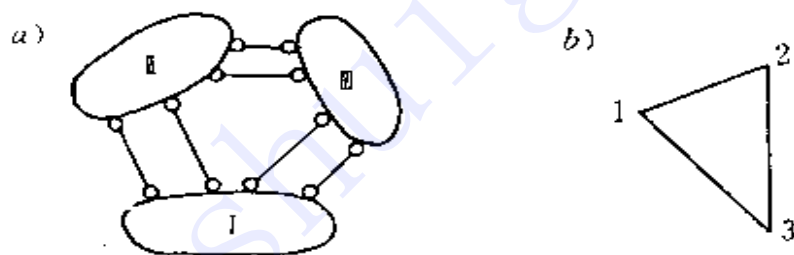


图 1-9

平行链杆两两铰联，如果设刚片 I 不动，则刚片 II 若发生微小运动应是垂直于 I、II 间链杆方向的平动，在图 1-9b 中以矢量 12 表示。同理，刚片 III 相对于 II 若产生运动亦应是垂直于 II、III 间链杆方向的平动，以 23 表示。于是 III 的运动可由 12 与 23 之矢量和即 13 表示，且平动加平动仍为平动， 13 即 III 相对于 I 之平动。但是，I、III 之间亦有两平行链杆相联，其相对平动亦应垂直于链杆方

向。因此，我们只需在图 1-9b 中，取 13 垂直于 I、III 间链杆方向，则这样产生的微小相对运动便为所有的约束条件所允许。可见，此体系是瞬变的。

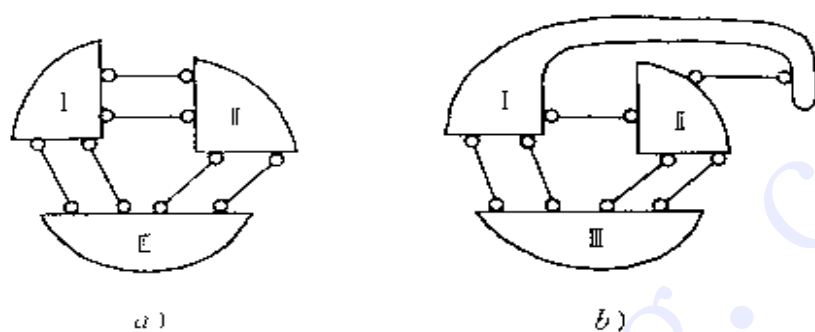


图 1-10

当平行两杆不等长时，一旦发生了微小相对平动，两杆便不再平行，故体系是瞬变的。在某些特殊情形下，例如当三对平行链杆又各自等长时(图 1-10a)，则相对平动可继续下去，体系为常变的。但须注意，这是指每对链杆都是从每一刚片的同侧方向联出的情况(即平行二杆夹角为 0°)，而不是像

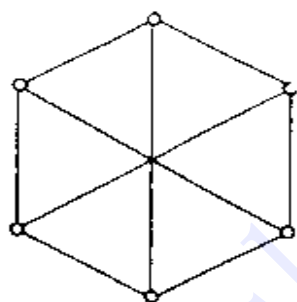


图 1-11

图 1-10b 那样有从异侧联出(平行二杆夹角为 180°)的情况，后者显然仍是瞬变的。

例如图 1-11 所示正六边形铰结链杆体系，以三竖杆为刚片分析，易知其为瞬变的。若以三对角线杆为刚片分析，则为三刚片用三对平行且等长的链杆两两相联，但它不属于常变体系，因为各对平行等长链杆都是从各刚片的异侧联出的，故此体系应是瞬变的，这与前面结论一致。

§ 1-4 等效四连杆机构分析法

三刚片用三对各自平行且等长的链杆两两相联时(图 1-12a), 如前所述, 体系是常变的, 但这只是对一般情况而言。某些特殊体系则须除外, 这就是当三对链杆相互又全平行时, 有时体系仍为瞬变, 而不是常变的。例如图 1-12b 所示体系, 从直观即不难看出, 它

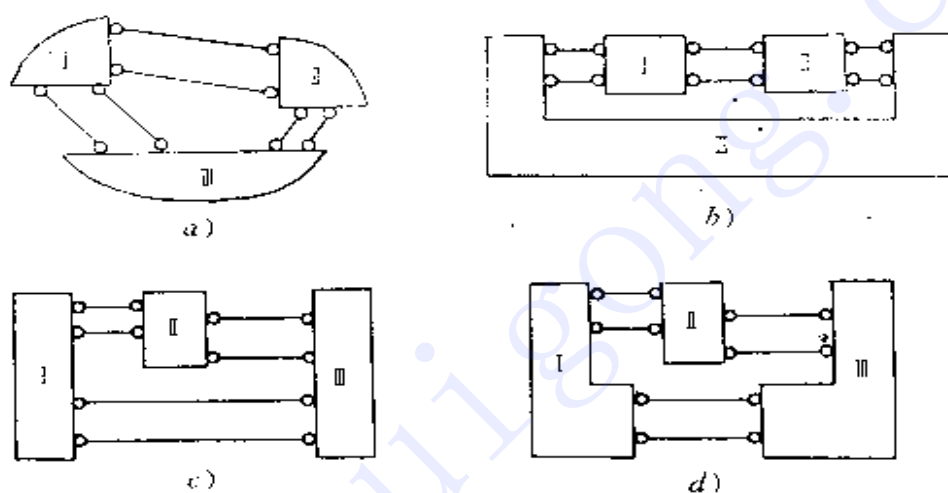


图 1-12

显然将受到链杆长度不能改变的限制而只能瞬变, 不能常变。图 1-12c 的情形也是瞬变而非常变。然而看起来似乎差不多的图 1-12d 却又是常变的。那末, 究竟什么情况下是瞬变, 什么情况下是常变, 用什么方法来判定呢? 此外, 就是图 1-12a 所示的常变体系, 也不是各链杆都可以作任意幅度乃至 360° 的转动, 而是局限在一定的范围内摆动。那末, 这个常变的范围又怎样确定呢? 这用直接分析其几何运动的方法来讨论将是不方便的。为此, 兹提出另一种方法, 即将这种体系化为等效的四连杆机构来分析, 可以较简便地解决以上问题。

如图 1-13a, 三刚片用三对平行等长、各长 a 、 b 、 c 的链杆相联。

设刚片 I 不动,则刚片 II 运动时只能作平动,其上所有点的位移均相同,因而可用任一点比如 B 点的位移来代表。由于 B 点只能绕 A 点转动,我们可在图 1-13b 中取固定铰支点 1 代表 A 点同时代表刚片 I,作链杆 12 与链杆 a 平行等长,则 2 点将可代表刚片 II。同理,作链杆 23 与链杆 b 平行等长,作链杆 31' 与链杆 c 平行等长且将 1' 取作固定铰交点,则 3 点将代表刚片 III,而 1' 与 1 一样均代表刚片 I。这样,我们就得到了一个四连杆机构 1231', 它的运动情况将完全可代表原三刚片体系。

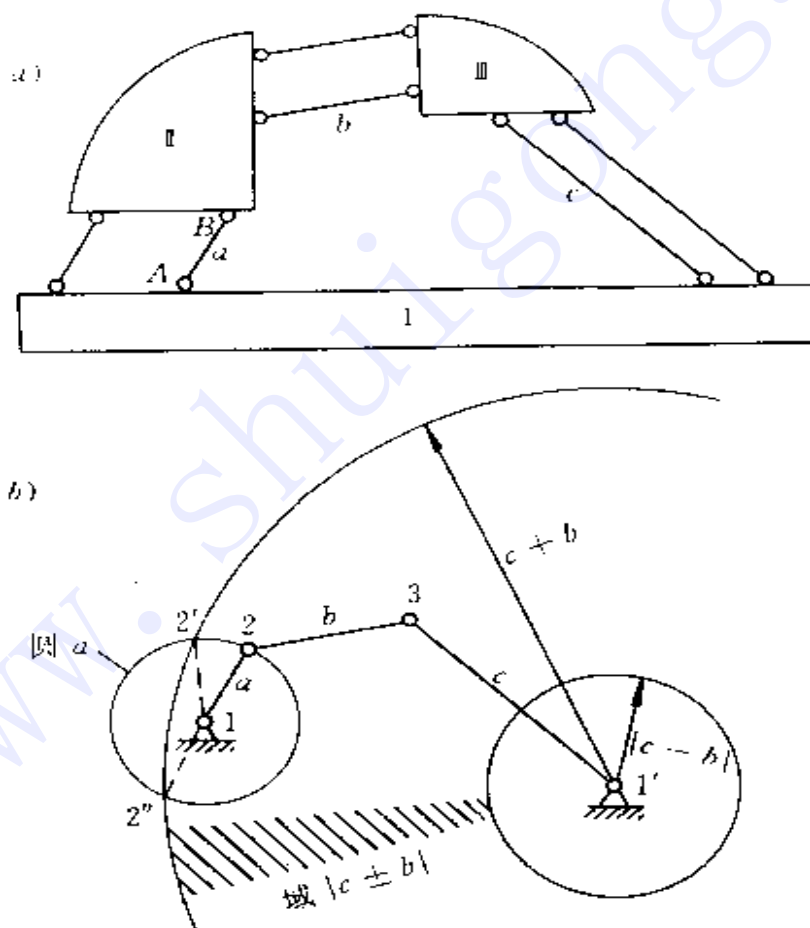


图 1-13

在四连杆机构 $1231'$ 中, 2 点一方面由链杆 a 与 1 相联, 因而它只能在以 1 为圆心以 a 为半径的圆周(以下简称圆 a) 上运动; 另一方面它又通过链杆 b, c 与 $1'$ 相联, 它离 $1'$ 最远只能在 $c + b$ 为半径的圆周上, 离 $1'$ 最近只能在 $|c - b|$ 为半径的圆周上, 因而它又只能在此两同心圆之间的范围(以下简称域 $|c \pm b|$, 即图中阴影线所示的圆环) 内运动。因此, 2 点运动的轨迹只能是圆 a 与域 $|c \pm b|$ 的公共部分, 即圆 a 上的弧 $2'2''$ 。2' 与 2'' 为 2 点可达到的极限位置, 这就确定了链杆 a 的摆动范围。与此相似, 我们又以 $1'$ 为圆心 c 为半径作出圆 c ; 以 1 为圆心 $a + b$ 和 $|a - b|$ 分别为半径作出二同心圆而得域 $|a \pm b|$, 其公共部分即为 3 点轨迹, 并可定出链杆 c 的摆动范围, 不需赘述。

由上分析, 不难得出这种分析方法的步骤及若干结论如下:

1) 按原三刚片体系的三对平行等长链杆的杆长和方向作出相应的四连杆机构 $1231'$, 其杆长分别为 a, b, c 。

2) 以 1 为圆心 a 为半径作圆 a ; 以 $1'$ 为圆心 $|c \pm b|$ 分别为半径作同心圆而得圆环域 $|c \pm b|$ 。

3) 若圆 a 有一段弧在域 $|c \pm b|$ 内, 则体系常变, 并由此段弧的范围可确定链杆 a 的转动范围。

当圆 a 全部在域 $|c \pm b|$ 内时, 链杆 a 可作 360° 的转动(注意, 这是设各刚片及链杆运动时可以相互重叠, 例如蒸汽机车的车轮和连杆的情况一样)。

当 a, b, c 不在一直线上时, 亦即原体系三对链杆相互不全平行时, 由几何关系不难证明, 圆 a 恒有一部分在域 $|c \pm b|$ 内, 体系恒为常变。

4) 当圆 a 与域 $|c \pm b|$ 只有一个公共切点时, 体系瞬变。这只能是当 a, b, c 在一直线上时的某些情形下才会发生。

图 1-14、图 1-15 情况, 圆 a 与域 $|c \pm b|$ 均只有一个公共点, 故体系均为瞬变而非常变。图 1-16、图 1-17 所示情况, 虽则亦是三对

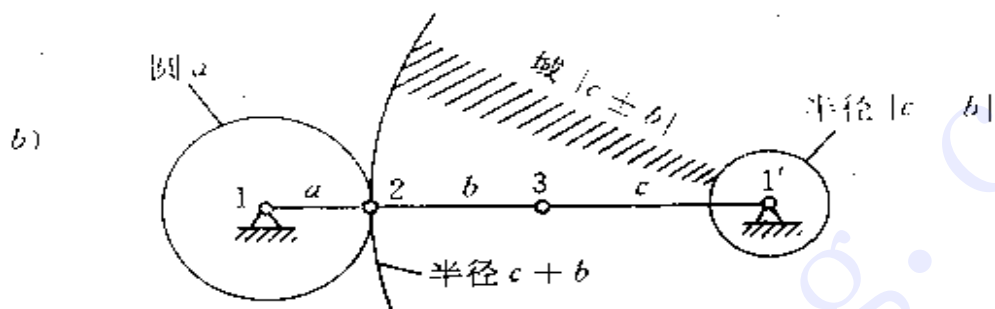
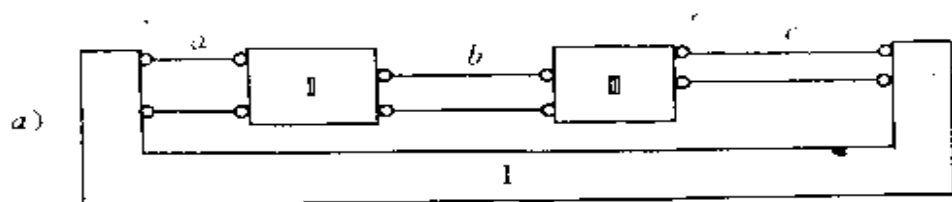


图 1-14

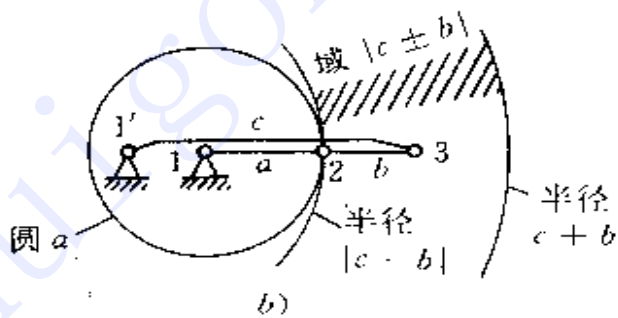
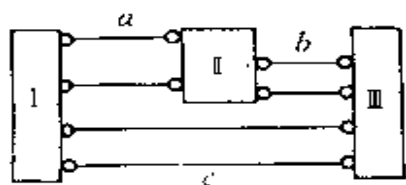


图 1-15

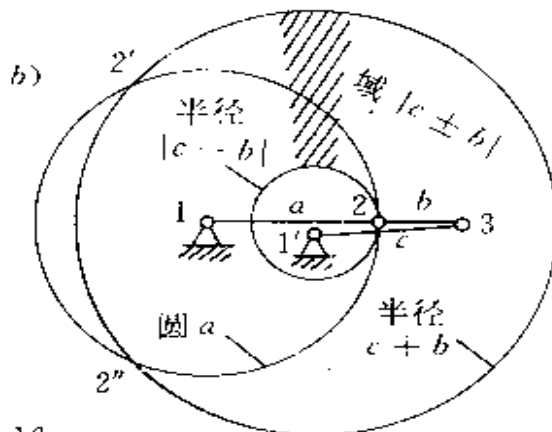
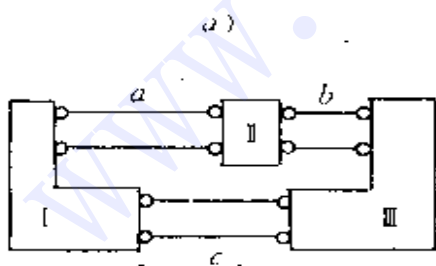


图 1-16

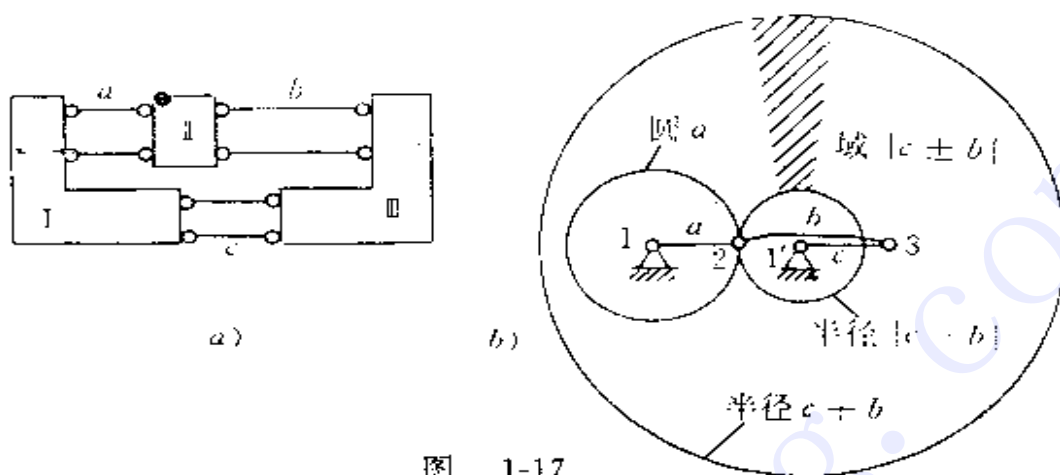


图 1-17

链杆相互全平行,但图 1-16 的圆 a 有大部分圆弧即 $2'22''$ 在域 $|c \pm b|$ 内,故为常变;图 1-17 的圆 a 则全部在域 $|c \pm b|$ 内,故亦为常变,且链杆 a 可转动 360° 。

§ 1-5 零载法中应注意的问题

对于“计算自由度”(或称理论自由度) $W = 0$ (或不考虑支座链杆,仅考察体系本身时 $W = 3$)的平面体系,其几何构造性质若用简单组成规则分析不出时,可用零载法分析。当荷载为零时,只有零内力能满足平衡条件者为几何不变体系;若还有任意非零内力亦能满足平衡条件,则为瞬变(或常变)体系。

具体分析步骤一般是:首先看在零载下是否全部内力、反力均必为零,若是,则可下结论体系几何不变;若不能判断时,则可假设某杆内力不为零,由此推之若能满足所有平衡条件,可下结论体系瞬变或常变;由此推之若不能满足全部平衡条件,亦即推出矛盾的结果时,则说明开初假设某杆有非零的内力是错误的,亦即该杆内

力只能是零。但须注意，此时还不可就下结论说体系几何不变，还必须看该杆内力为零时，是否从而可推断全部内力反力均必为零，若是，体系几何不变；否则，当该杆内力为零时可能还有其他杆件可以有非零内力存在，则体系仍可能是瞬变或常变的。

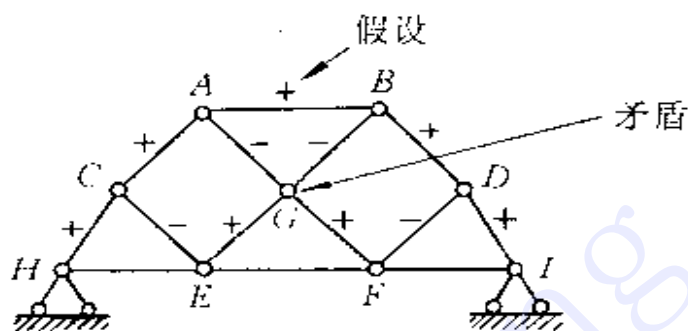


图 1-18

例如图 1-18 所示平面体系，用简单规则无法分析其机动性质。用零载法分析时，若假设 AB 杆有拉力存在，则依次考查结点 A, B, C, D, E, F ，极易判断有关各杆的拉压性质如图所注。但考查结点 G 时，显然平衡条件 $\sum Y = 0$ 已不能满足。因此， AB 杆内力只能是零，但此刻尚不能断定体系几何不变，因为还不能由此推之全部杆件的内力和反力均为零。事实上，此时 HI 线上的各杆还可以有任意的非零内力存在，并与 H, I 两支座的水平反力相平衡，可见这是一个瞬变体系。

此外，在一般教科书中，零载法大多只用于复杂桁架的分析。其实，对于一些更复杂的非桁架结构，也可以用零载法很方便地进行分析。例如图 1-19a 所示桁梁组合体系，其理论自由度 $W = 0$ （计算略）。在零荷载时，设加劲链杆拱部分任一杆件有非零内力，比如是压力（图中用负号表示），则由结点法易推知，拱部所有杆件和所有竖杆（立柱）均为压力。又若切断所有立柱取上部为隔离体，易知支座 A 处的水平反力必为零。再从 C 铰右侧切开而取 AC 梁为隔

离体(图b),由 $\Sigma M_A = 0$ 知,C铰右侧的剪力 Q 应向下;然后取CB梁为隔离体(图c),则C处剪力 Q 向上,但这样已无法满足 $\Sigma M_B = 0$

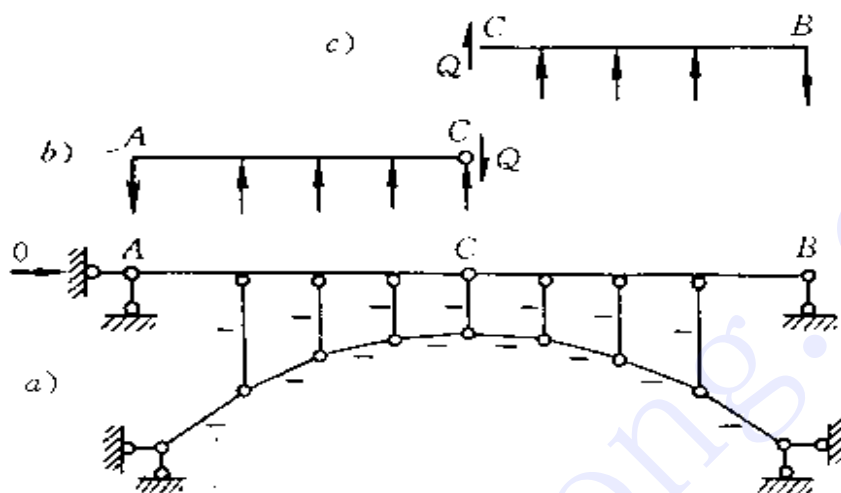


图 1-19

的平衡条件。由此知,假设拱部任一杆有非零内力是不成立的。而据此又可推得全部内力反力均必为零,故此体系为几何不变。

§ 1-6 机动分析的其他方法

在体系的机动分析中,常会遇到一些看上去并不很复杂但却是简单组成规则无法分析的体系。此时,可采用其他一些方法进行分析,除教材上通常介绍的零载法以外,尚有杆件代替法,无级速度图法,有级速度图法,瞬心法以及计算机方法等,现汇集简述如下。此外,读者还可参阅[3],[8]。

1 杆件代替法

这本是求解静定复杂桁架内力的一种方法,但也可用来检查体系的几何构造。此法所根据的原理是静定结构静力解答的唯一

性,它只适用于“计算自由度” $W = 0$ (或不考虑支座只考查体系本身时 $W = 3$)的情况。

如图 1-20a 所示复杂桁架,其 $W = 0$,我们可以去掉其某一杆 AB (称为被代替杆),同时另添加一杆 CD (称为代替杆),而使其成为一个几何不变的简单桁架(称为代替桁架),如图 1-20b 所示。若使代替桁架承受与原桁架相同的荷载 P ,同时在被代替杆两端结点上加上一对与被代替杆内力相等的力 X ,则若代替杆的内力 $S_e = 0$,代替桁架各杆受力将与原桁架完全相同。这就给我们提供了一个求解原桁架内力的条件。设代替杆 e 由于荷载 P 作用而产生的内力为 $S_{e,P}$,在 $X = 1$ 作用下的内力为 $\bar{S}_{e,X}$,则由叠加原理有

$$S_e = S_{e,P} + \bar{S}_{e,X} X = 0$$

得

$$X = -\frac{S_{e,P}}{\bar{S}_{e,X}}$$

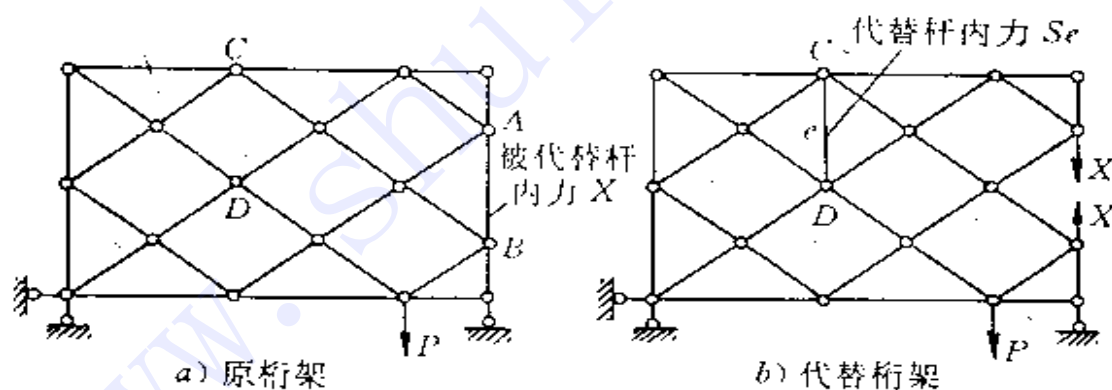


图 1-20

因为代替桁架是几何不变的,故 $S_{e,P}$ 是确定而有限的数值。从而可知:

- 1) 若 $\bar{S}_{e,X} \neq 0$, X 将有确定解答,原体系为几何不变。

2) 若 $S_{xx} = 0$, 则 X 将为 ∞ 或 $\frac{0}{0}$, 原体系为瞬变或常变的。

这样, 我们便可根据 S_{xx} 是否为零来判定原体系是否可变。

在更复杂的桁架中, 可能需要去掉若干根杆件同时添加同样数目的代替杆, 才能得到一个几何不变的简单桁架。此时各代替杆的内力均应为零, 设代替杆数目为 n , 有

$$S_1 = S_{1P} + S_{11}X_1 + S_{12}X_2 + \dots + \bar{S}_{1n}X_n = 0$$

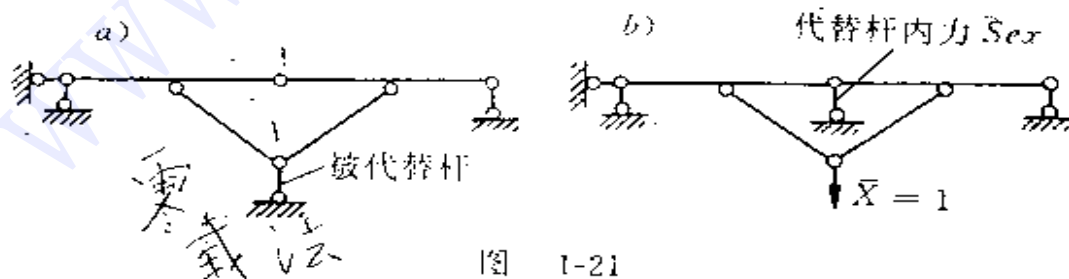
$$S_2 = S_{2P} + \bar{S}_{21}X_1 + \bar{S}_{22}X_2 + \dots + \bar{S}_{2n}X_n = 0$$

.....

$$S_n = S_{nP} + S_{n1}X_1 + \bar{S}_{n2}X_2 + \dots + S_{nn}X_n = 0$$

式中, S_1, S_2, \dots, S_n 为第 1, 第 2, \dots , 第 n 根代替杆的总内力; X_1, X_2, \dots, X_n 为各被代替杆的内力; $S_{1P}, S_{2P}, \dots, S_{nP}$ 为各代替杆在荷载作用下的内力; $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{in}$ 分别为当 $\bar{X}_1 = 1, X_2 = 1, \dots, \bar{X}_n = 1$ 作用时第 i 根代替杆的内力。此时, 可根据由未知数 X_1, X_2, \dots, X_n 的系数组成的行列式是否为零来判别体系是否可变。

杆件代替法不仅可用于桁架, 也可用于其他类型的结构, 只要其计算自由度 $W = 0$ (或不考虑支座 $W = 3$) 就行。如图 1-21a 所示体系, $W = 0$, 取图 1-21b 所示几何不变的代替体系, 显然由直观即可判定 $S_{xx} \neq 0$ 因而可知原体系几何不变。



2 无极速度图法

这里的所谓速度图，是指当一个体系发生微小运动时，表示各点的位移（或速度）的图形。下面先来说明一根杆件发生微小位移时如何用图形来表示其位移（或速度）。

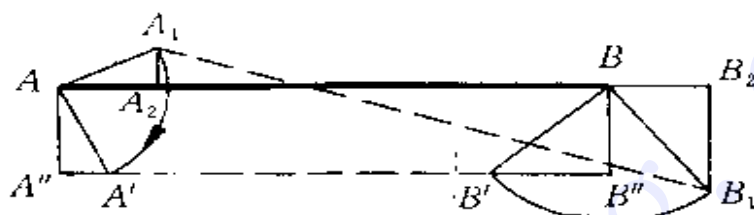


图 1-22

设直杆 AB 在平面内发生了极微小的刚体位移（图 1-22）， A 、 B 点的位移分别为 AA_1 和 BB_1 ，它们各自又可以分解为沿杆轴方向的位移 AA_2 、 BB_2 和垂直于杆轴方向（简称侧向）的位移 A_2A_1 、 B_2B_1 。由于 AB 是刚片，运动时 A 、 B 两点间的距离不可能改变，亦即两点只能产生侧向相对位移而轴向相对位移等于零，因此两点的轴向位移必相等，即有 $AA_2 = BB_2$ 。但这一关系在作图时是不方便的，也是不明显的。为了方便和清晰，我们改为把各点的位移均顺时针转 90° 来表示。于是 A_1 点成为 A' 点， B_1 点成为 B' 点，直线 A_1B_1 成为直线 $A'B'$ ，这样得到的图形我们也叫它位移图。由于刚体运动时，各点位移方向也就是其速度方向，且各点速度的大小亦与其位移成正比，故此图形亦可称之为速度图。由于 $AA_2 = BB_2$ ，旋转 90° 后就有 $AA'' = BB''$ ，且由几何关系可知必有 $A'B' \parallel AB$ 。于是我们得出重要结论：

任何直杆（或刚片上任一直线段）的速度图必与本身平行。

在速度图中， A' 点、 B' 点及直线段 $A'B'$ 分别称为 A 点、 B 点及直杆 AB 的表影。显然，不动点的表影与本身重合。

用速度图检查体系的几何构造性质时，对于 $W = 0$ (或不计支座 $W = 3$) 的体系，可拆去其一杆，使其成为一个自由度的常变体系。然后令此体系发生微小位移，利用上述结论绘出其速度图，定出拆去杆两端点的表影。若此两点表影的连线与原两点连线平行，则表明两点距离并未改变，因而添上拆去杆亦不能阻止微小位移的发生，因而原体系为瞬变的(特殊情况下为常变的)；若不平行，表明两点距离已改变，则加上拆去杆必能阻止任何微小位移之发生，因而原体系为几何不变的。

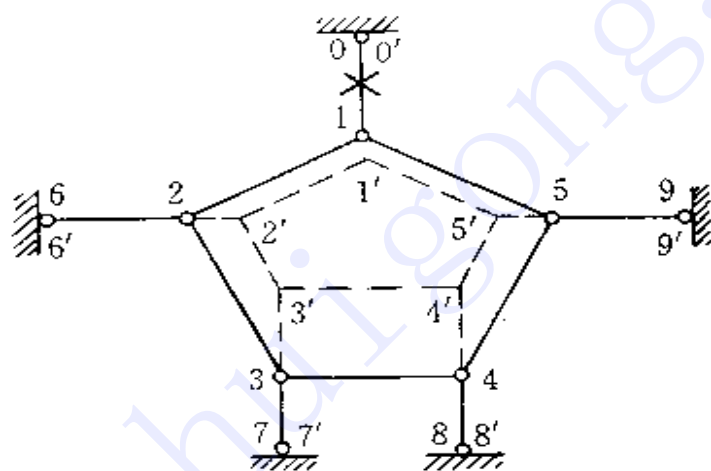


图 1-23

例如图 1-23 所示体系，其 $W = 0$ ，若拆去 01 杆(图中画上 \times 以便识别)，则将变成 $W = 1$ 的常变体系。现设体系发生微小位移并来作其速度图。作速度图可从任一不动点开始。例如 6 点是不动的，其表影 $6'$ 与本身重合。因任何直杆的表影必与本身平行，故 2 点的表影必在 62 杆的延长线上某点处，今假设其在图中的 $2'$ 点。继续求 3 点的表影时，一方面应有 $2'3' \parallel 23$ ，另一方面又有 $3'7' \parallel 37$ ，因此由 $2'3'$ 与 $3'7'$ 两直线的交点便可确定 $3'$ 的位置。仿此可依次求得 $4'$ 、 $5'$ 、 $1'$ 的位置。此体系若是左右对称，则显见 $1'$ 在 0、1 连

线上，亦即 $0'1' \parallel 01$ ，从而原体系是瞬变的。

由上例可知，绘速度图当首先从不动点开始，亦即从支座处开始。当无支座时，可假设体系中某一刚片不动。其次，需假定与不动点有杆件直接相联的一个结点的表影。然后由不动点及该结点的表影就可推求与此两点皆有杆件直接相联的第三点的表影……循此前进，即可求出其余各结点的表影从而绘出整个体系的速度图。

图 1-24a 所示体系，为了作图方便，不妨将两段梁均用铰结三角形组成的刚片来代替(图 1-24b)，这并不改变原体系的机动性质。现自左至右依次绘出各杆的速度图，最后将发现 $4'6'$ 不平行于 46 ，故知体系几何不变。

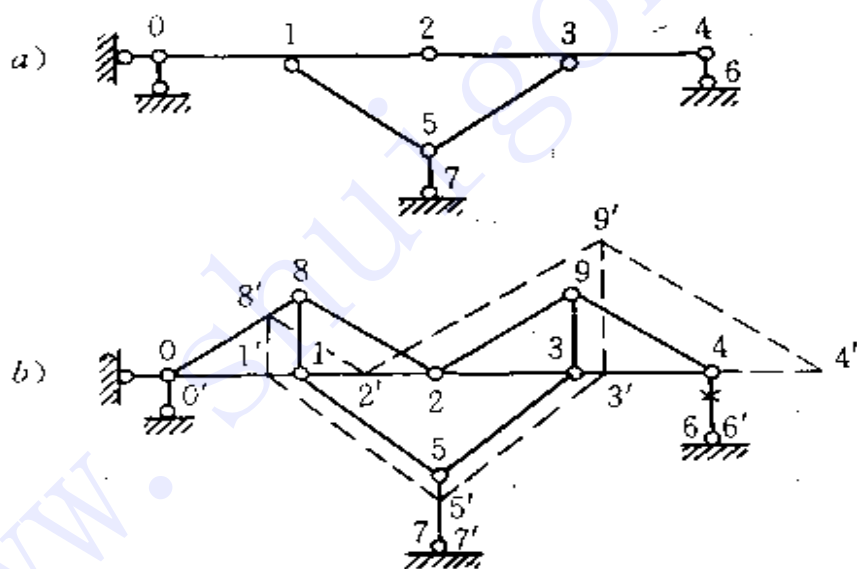


图 1-24

图 1-25a 所示体系，将其中刚架部分的刚片以至地基均用铰结三角形来代替，则得到如图 1-25b 所示桁架。自下而上作其速度图，由对称性可推知，直至最上一杆其表影仍与该杆平行，故体系瞬变。

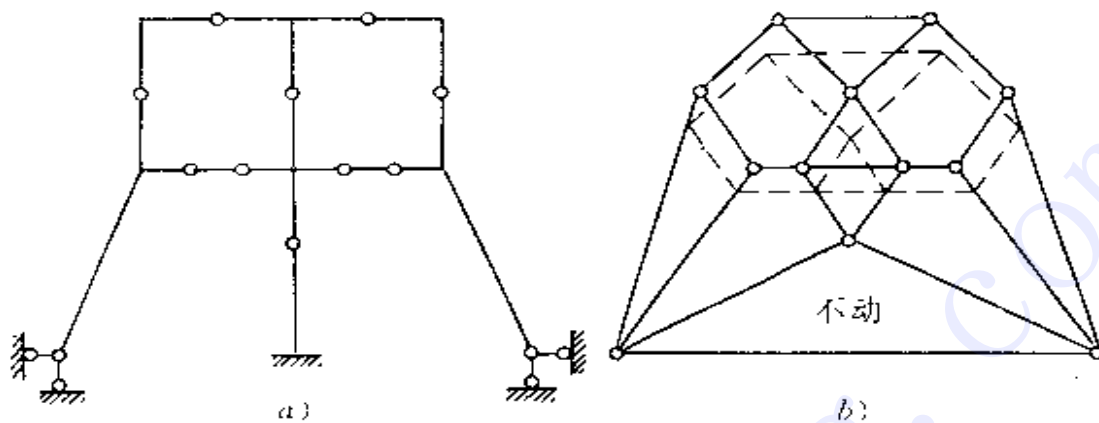


图 1-25

图 1-26 所示体系，计算自由度 $W = 2 \times 12 - 22 - 3 = -1$ ，即具有一个多余联系，但此体系仍然是瞬变的。绘速度图时，从 0 点开始，其表影与本身重合。然后由判断不难得知 6、11、3、7 各点表影均应在 0、7 连线上，进而可知 7 点的表影应与本身重合。再进而可推断 8、9、10、11 各点表影均与本身重合，即它们都是不动的。

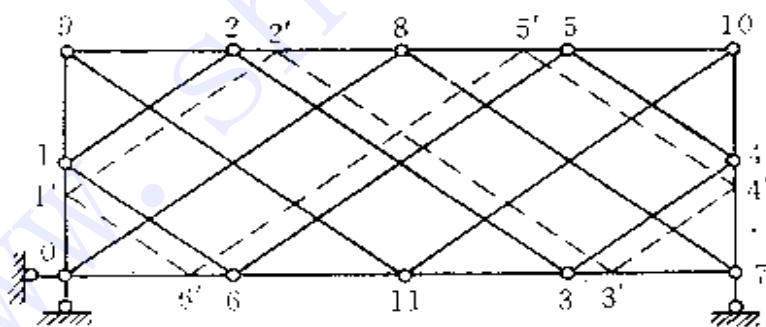


图 1-26

然后再假定 1 点的表影在图中的 1' 处，便可依次求得其余各点的表影。于是可以发现，此体系每根杆的表影皆与本身平行，故体系是瞬变的。此类瞬变的多重腹杆桁架，其构造特点是一部分斜杆构

成闭合的通路(本例为通路 1 2 3 4 5 6 1),当其余结点均不动时,此通路上之各结点仍可发生位移。

3 有极速度图法

此法与上面的速度图法原理完全相同,区别之处仅在于将各点的位移(或速度)集中画到一处来表示,所有各点的原位置均用同一点表示,此点称为极点,而所绘得之速度图称为有极速度图。与之区别,前面讲的速度图则称无极速度图。

作图 1-27a 所示体系的有极速度图时,在图 1-27b 中任选一点 0 作为极点,体系中所有点的原有位置在此图中都是 0,所有不动的点,即 0、6、7 点在图中也都是 0。在图 1-27a 中,0 点不动,1 点相对于 0 点作微小运动时,其位移方向必垂直于 01 杆,但作速度时是将此方向转 90° 来画的,因之 1 点的位移应平行于 01 杆。在图 b 中,作 01 平行于 01 杆(01 长度可任意选取),即代表 1 点的位移。同

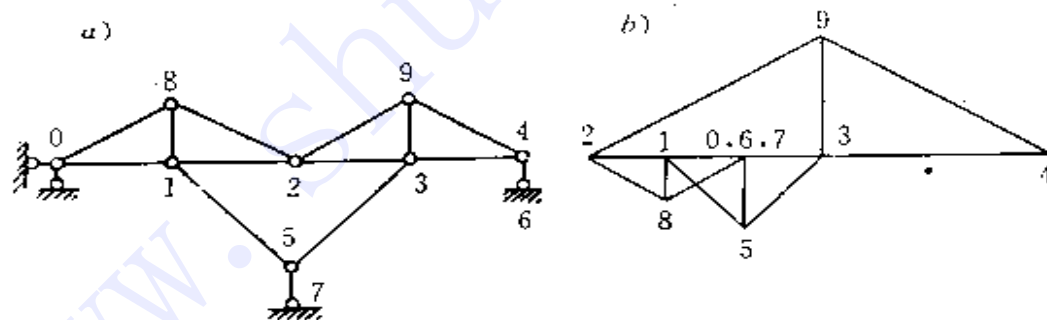


图 1-27

理,8 点对 0 点的相对位移应平行于 08 杆,而对 1 点的相对位移则应平行于 18 杆,于是在图 b 中过 0 作直线平行于 08 杆,过 1 作直线平行于 18 杆,二直线交点即为速度图中 8 点的位置。仿此可求出其余各点在有极速度图中的位置。最后发现,64 不平行于 64 杆,故体系几何不变。

4 瞬心法

两刚片作相对运动时，若把其中一个看作不动，则另一个相对于它的运动总可以归结为绕某点的转动，这一点叫做两刚片间的相对瞬时转动中心，简称相对瞬心。两刚片间用一个铰相联时，相对瞬心就是该铰；用两链杆相联时，相对瞬心在两杆交点即虚铰处。

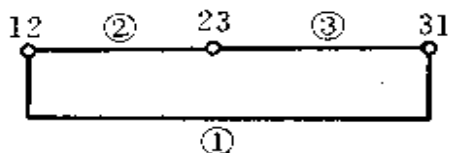


图 1-28

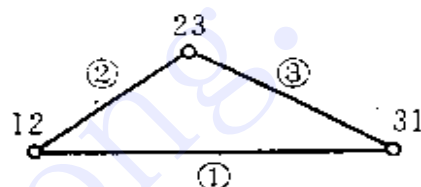


图 1-29

任何三个刚片在平面内作微小相对运动时，它们的三个相对瞬心应在同一直线上，这便是三瞬心定理。如图 1-28 所示，刚片①、②、③之间的相对瞬心分别记为 12、23、31。三瞬心共线时，体系可作瞬时微小相对位移。反之，若三瞬心不共线（图 1-29），则三刚片间不可能发生任何相对位移。对于图 1-30 的四刚片机构，相对瞬心 13 可以这样来寻求：根据三瞬心定理，13 应在 12、23 的连线上，同时又应在 14、43 的连线上，因而它必在二连线的交点处。这便是由四个已知的瞬心定出第五个瞬心的方法，这可记为

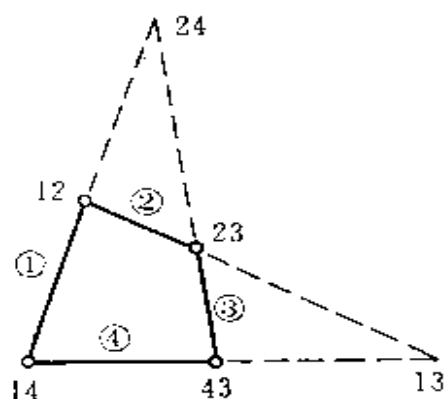


图 1-30

$$\begin{array}{l} 12-23 \\ 14-43 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 12-23 \\ 14-43 \end{array}} \right\} 13$$

同理, 可由

$$\begin{array}{l} 14-12 \\ 43-23 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 14-12 \\ 43-23 \end{array}} \right\} 24$$

定出瞬心 24 的位置。

对于 $W \leq 0$ 的体系, 用瞬心法进行机动分析, 就是利用三瞬心定理确定各刚片间的相对瞬心位置。若直到最后所定出的三个刚片的三个相对瞬心仍在一直线上, 则体系是瞬变的; 若不在一直线上则体系是不变的。

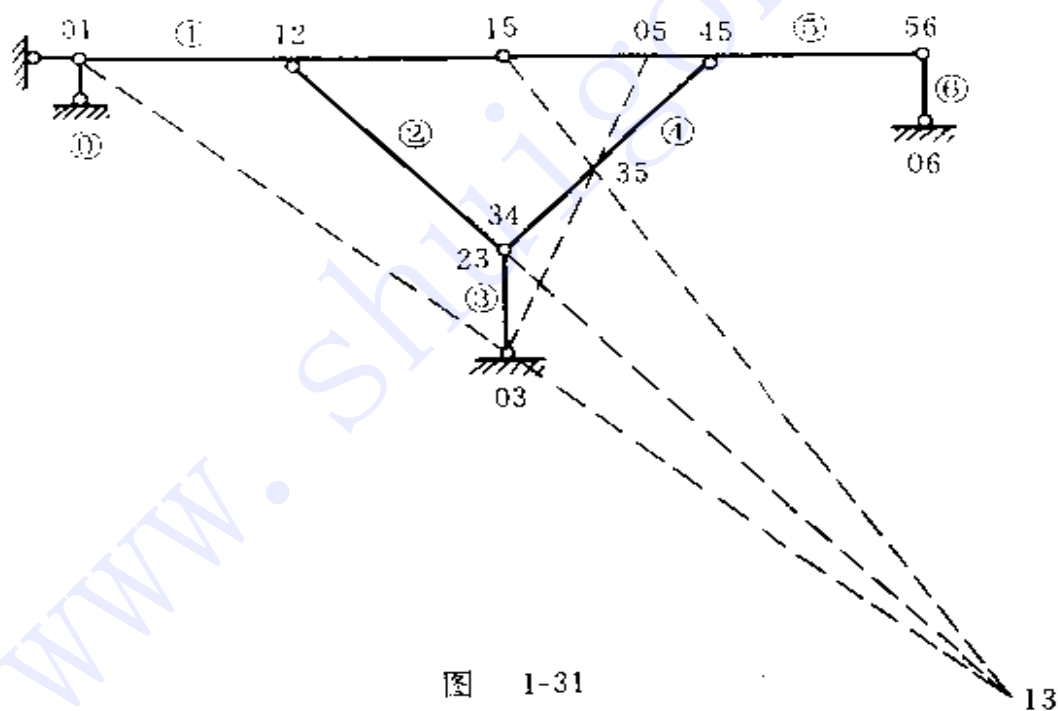


图 1-31

对于图 1-31 所示体系, 将地基作刚片①, 按下列顺序推求各相对瞬心:

$$\begin{array}{l} 01-03 \\ 12-23 \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} 13 \quad \begin{array}{l} 15-13 \\ 34-45 \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} 35 \quad \begin{array}{l} 03-35 \\ 01-15 \end{array} \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} 05$$

最后发现,05、56、06 不在一直线上,故体系几何不变。

5 矩阵求秩法

这是适合计算机的方法,其精神是将几何不变性的判定归结为体系的约束方程组的系数矩阵的秩的计算。

以平面桁架为例(图 1-32a),设结点数为 n ,杆件(包括支座链杆)数为 m (当无支座只分析体系本身时,如图 b,可设某一杆不动,该杆两端的结点不计入结点数目,该杆亦不计入杆件数目,编号可以零表示)。每一结点可能有水平、竖直两个位移,总的结点位移数为 $2n$,而每一杆件提供一个其长度不变的约束条件(图 c):

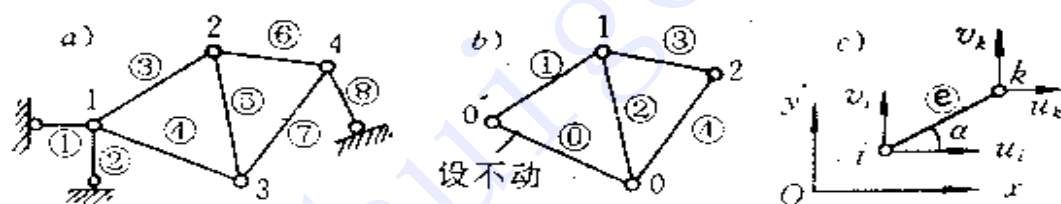


图 1-32

$$(u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha) - (u_k \cos \alpha + v_k \sin \alpha) = 0$$

用杆件两端结点的坐标来表示 $\cos \alpha$ 和 $\sin \alpha$ 则有

$$(x_k - x_i)u_i + (y_k - y_i)v_i - (x_k - x_i)u_k - (y_k - y_i)v_k = 0$$

对于支座链杆,有一端位移 u, v 均为零,则将相应的项去掉。对每根杆件都可建立一个这样的方程,故共可建立 m 个方程,它们是以 $2n$ 个结点位移为未知数的线性代数齐次方程组,可表为

$$\underset{(m \times 2n)}{[A]} \underset{(2n \times 1)}{\{\Delta\}} = \underset{(m \times 1)}{\{0\}}$$

下面括号中为矩阵的行、列数。设矩阵 $[A]$ 的秩为 r ,则当 $r = 2n$ 时, $\{\Delta\}$ 只有唯一的零解,因而体系为几何不变;当 $r < 2n$ 时,则 $\{\Delta\}$ 有非零解,体系是可变或瞬变的。至于矩阵的秩的计算,已有

多种方法，并可利用计算机进行，可参阅文献[21]。

值得指出，对于非桁架体系，由于任何刚片总可以设法用铰结三角形组成的刚片代替，因而总可以化为桁架体系来分析，所以上述方法并不失一般性。

§ 1-7 再论瞬变体系

瞬变体系已是一个“古老的问题”，但近年仍有一些论文讨论它。这说明，确有一些理论概念需要澄清。目前若干文献中，关于瞬变体系的定义和判别准则的论述，尚存在值得商榷之处。对其定义，有些提法欠确切或自相矛盾；对其判别，则有些结论欠完善，有漏洞。现对此再作一简略讨论。

1 瞬变体系的特性

弄清瞬变体系的特性，有助于讨论它的定义。图 1-33 所示瞬变体系，当 C 点沿竖直方向产生微小位移 δ 而到达 C' 时， AC 杆（或 BC 杆）的伸长量 λ 为

$$\begin{aligned} \lambda &= AC' - AC \\ &= \sqrt{l^2 + \delta^2} - l \\ &= l \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{l}\right)^2} - l \\ &= l \left[1 + \left(\frac{\delta}{l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - l \\ &= l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \right. \end{aligned}$$

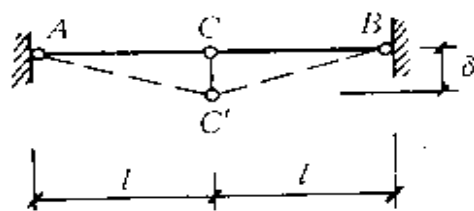


图 1-33

$$- \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{l}\right)^4 + \frac{1}{16} \left(\frac{\delta}{l}\right)^6 - \frac{5}{128} \left(\frac{\delta}{l}\right)^8 + \dots] - l \approx \frac{\delta^2}{2l}$$

可见，当 δ 为微量时， λ 为二阶微量。当 δ 为无穷小时， λ 为二阶无穷小，但二阶无穷小并不等于零。然而，对于刚体（或刚片），其变形恒为

零,即 $\lambda \equiv 0$, 于是由上式可知, 只能是 $\delta = 0$ 。由此可见, 瞬变体系具有如下特性:

1) 如果把各构件都作为理想的刚体, 则瞬变体系不可能发生任何位移。

2) 如果考虑构件的变形, 则瞬变体系的位移将不是“微小”的而是非常显著。

如所周知, 在荷载作用下, 如果仍按瞬变体系的初始位置来考虑平衡条件, 则其内力将是不定值(在某些特殊荷载作用下, 例如零荷载, 或图 1-33 体系在杆上承受水平荷载) 或无穷大(在一般荷载下)。实际上在加载之初瞬变体系即偏离初始位置, 此时微小的荷载仍将引起相当大的内力而使构件变形, 同时引起比构件变形更大得多的位移。例如在上例中, 当杆件伸长为 $\lambda = l/2000$ 时, C 点位移将达到 $\delta = l/31.6$, δ 比 λ 大 60 多倍。这就是为什么瞬变体系的模型无论材料多坚固(总会有一定的变形), 制作多精密(接头总会有间隙), 轻轻一压位移便非常大而绝非“微小”的原因。

2 瞬变体系的定义

1) 流行的提法 例如“这种本来是几何可变、经微小位移后又成为几何不变的体系可称为瞬变体系”^[18]; “这种在某一瞬时可以产生微小运动的体系, 称为瞬变体系”^{[1][22]} 等等。这些提法的共同之处是认为“可以产生微小位移”。但问题在于这些文献在讨论几何构造分析时, 都是在把构件作为刚体的前提下进行的。如前所述, 对于刚体, 瞬变体系不可能产生微小位移; 产生微小位移时, 构件内已产生了高阶微量的变形, 因而不是刚体。这似乎是不言而喻的, 但未予指出则容易含混, 因而上述提法是不够确切的。

拉宾诺维奇曾提及这一问题^[28]。他写道: “在任一机构中, 取任意两点 A 及 B , 此两点属于不同的环节……有这么一瞬间, ……当机构继续向两边有极微位移时, 此距离维持不变。” 此处他加了

一个注:“更精确地来说,距离的变化量为高一级的极微量”。然后继续说“假如在此瞬刻,我们将两点用杆联结,则体系仍具有极微的可动性,……称之为瞬变体系”。这也就是说,瞬变体系发生极微位移时,杆将产生高一级微量的变形。

2) 力学词典的提法 1990年中国大百科全书出版社出版的《力学词典》^[24],对瞬时可变结构定义为“外载荷开始作用瞬间象机构一样发生微小宏观变形(不考虑元件自身变形),经历一定变形后又象结构一样能承载的元件系统”。

如果说上面的流行提法仅仅是没有指出元件有高阶微量变形,则这种提法指明“不考虑元件自身变形”就是自相矛盾的了。既然元件不变形,连高阶微小变形也没有,瞬变体系何以能发生微小而且是“宏观”的变形呢?其次,后半句话强调“又象结构一样能承载”,而没有强调瞬变体系(经历一定变形后)内力和位移都比一般结构大得多的特点,也是欠妥当的,没有突出瞬变体系的特性。

3) 汤家旭的提法 汤家旭 1991年在文[25]中提出(见图 1-34):

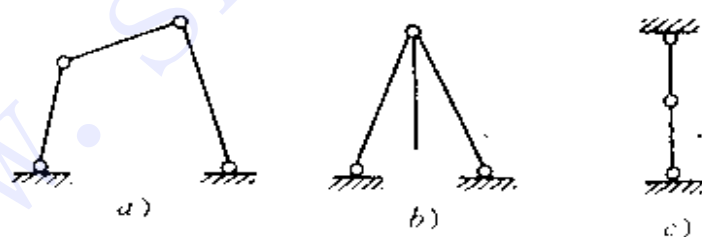


图 1-34

“请看图 c,虽然该结构的形状不能改变(假定各杆子皆为刚体),但是一个几何可变(瞬变)体系。因此,几何可变的定义应为:体系中某点可具有一非零速度”

这里的几何可变包括常变(图 a、b)和瞬变。对于瞬变体系,既

然已经“假定各杆子皆为刚体”因而“形状不能改变”,也就不可能发生任何位移,即体系中任何一点的位移都恒为零。速度是位移对时间的一阶导数,位移恒为零,速度自然为零,又何以能具有非零速度呢?所以上述定义对于瞬变体系也是自相矛盾的。

4) **李慰萱的提法** 李慰萱抛弃了刚体假设,提出了结构几何不变性的定义^[26](表述略有改动):

设 λ 为同一构件上两点间距离改变量的最大值(绝对值), δ 为体系中任何两点间距离改变量的最大值(绝对值),则当且仅当 $\lambda = 0$ 时, δ 可等于任何充分小的正数,体系是常变的;当且仅当 $\lambda = 0$ 时, $\delta = 0$, $\lambda \neq 0$ 时,有一组位移解答可使 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\delta} = 0$,体系是瞬变的;不属以上两种者,即当且仅当 $\lambda = 0$ 时, $\delta = 0$, $\lambda \neq 0$ 时,无一组解答能使 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\delta} = 0$,体系是几何不变的。

这是迄今见到的最严谨的定义。

5) **笔者的建议** 李氏的上述定义虽严谨但欠通俗,而且直接由这样的定义来建立判据也较为困难。为了较通俗简明地定义瞬变体系,兹建议两种提法:

(1) 几何可变体系发生微小位移后即成为几何不变者(注:此时构件有高阶微量的变形)称为瞬变体系。

(2) 一个几何可变体系,若在其可变方向上与之邻近而组成方式相同的体系为几何不变,则该几何可变体系称为瞬变体系。

第一种提法弥补了刚体的局限;第二种提法则仍可在刚体的前提下适用。

3 瞬变体系的判别

对于简单组成规则无法分析的体系(例如图 1-24a),零载法及 § 1-6 介绍的各种方法都能有效地识别几何不变体系和几何可变体系。然而遗憾的是,以上各种方法,包括近年提出的一些计算机

方法[26,25,21],对于几何可变者究竟是常变(指 $0 \leq W$ 时)还是瞬变却无法进一步区分(虽然在工程实用上一般无必要作进一步区分)。因此可以说,瞬变体系的识别还是一个尚未完善解决的问题。所以现在只好暂时退到简单组成规则的范围内来讨论瞬变体系的识别问题。

在二元体体系中,三铰共线为瞬变。在两刚片三链杆相联的体系中,三杆延长交于一点为瞬变;特殊地,三杆交于一实铰则为常变;三杆平行不全等长为瞬变,平行全等长为常变。以上已为周知,无需论证。

表 1 三刚片两两铰联时的几何构造性质

三铰位置	判 据	结 论
三铰均有限远	三铰不共线	不变
	共线	瞬变
一铰无穷远	两平行链杆与另二铰联线不平行	不变
	两平行链杆与另二铰联线平行	瞬变
	两平行链杆与另二实铰联线平行且三者等长	常变
两铰无穷远	两对平行链杆相互不平行	不变
	两对平行链杆相互平行但不全等长	瞬变
	两对平行链杆相互平行且四杆全等长	常变
三铰均无穷远	三对平行链杆相互均不平行且至少一对自身不等长	瞬变
	有两对平行链杆相互平行但不全等长	瞬变
	有两对平行链杆相互平行且四杆全等长	常变
	三对平行链杆各自等长但相互不全平行	常变
	三对平行链杆各自等长且相互全平行	常变或瞬变*

* 可按“四连杆机构分析法”[12]判定。

对于三刚片两两铰联(包括虚铰)的体系,文[27]将其归纳为

7 种情形，结论只有几何不变和瞬变两种。其实这里还有若干常变的情况尚未论及，例如图 1-35 的几种情况均属常变而非瞬变。其

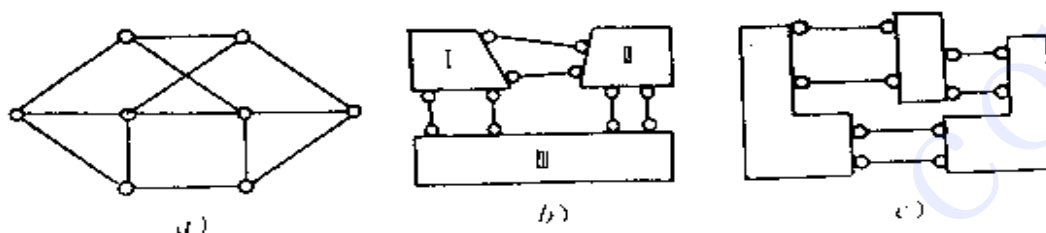


图 1-35

中图 a 属常变是周知的；图 b 有两对四根链杆平行且等长，此时刚片 I、II 相对不动，刚片 III 相对于它们的平动可一直进行下去，故为常变；图 c 情况则可用前面 § 1-4 的四连杆机构分析法判断为常变（见图 1-17）。现将三刚片两两铰联体系的各种情形归纳如表 1，这是一个比较完善的罗列。

力学

第二章 静定结构内力分析

§ 2-1 弯矩图的快速绘制

静定结构的弯矩图在很多情况下可以不求或少求反力(或只需判定反力方向)即可作出,熟练掌握这种方法,对于迅速绘制弯矩图和校核其正确性是极为有益的。快速绘制弯矩图所依赖的工具只不过是以下若干熟知的规律:

- 1) 结构上凡有悬臂部分和简支梁(含任何两铰直杆),其弯矩图恒可首先绘出;
- 2) 直杆的无荷区段弯矩图为直线;
- 3) 剪力相等则弯矩图斜率相同;
- 4) 铰处为零;
- 5) 刚结点力矩平衡;
- 6) 作弯矩图的区段叠加法;
- 7) 对称性利用(如果有的话)。

等等。图 2-1 ~ 2-5 都是不求反力可绘出弯矩图的。

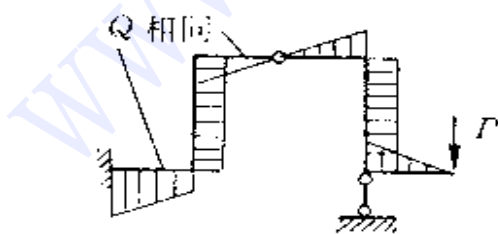


图 2-1

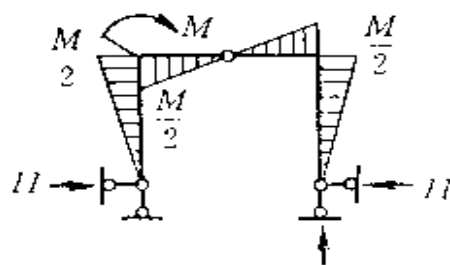


图 2-2

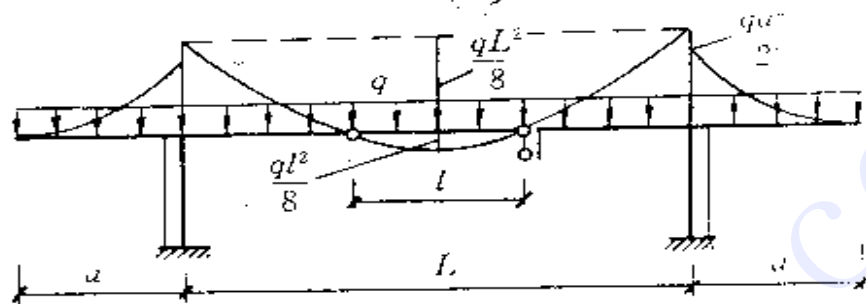


图 2-3

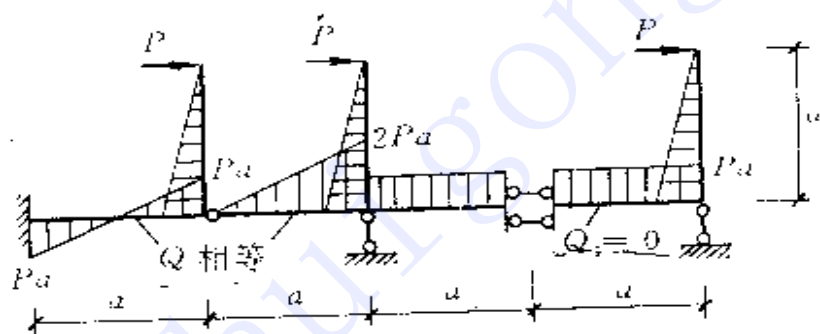


图 2-4

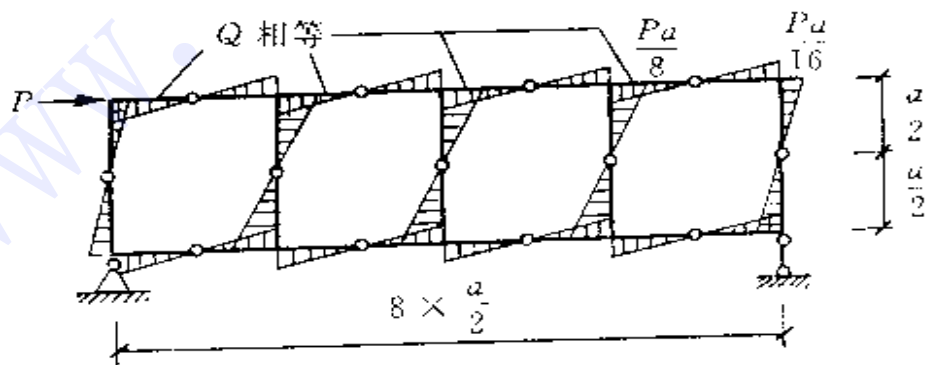


图 2-5

图 2-6 ~ 2 8 的结构只需求出一个水平反力(这极方便)即可画出全部杆件的弯矩图。

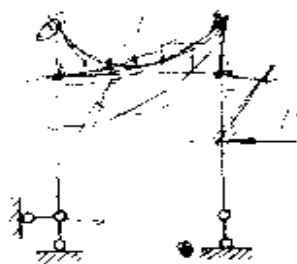


图 2-6

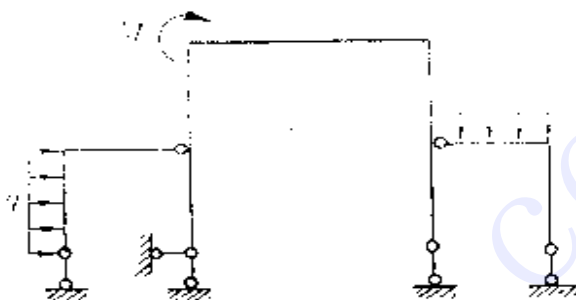


图 2-7

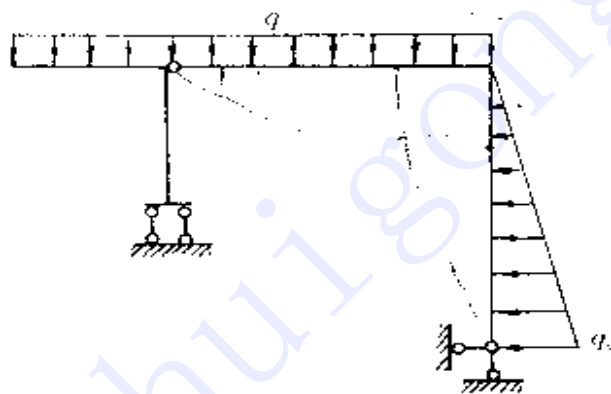


图 2-8

图 2-9 及 2-10 所示情况,若先求反力将是比较迂回的;若首先作出弯矩图(利用对称性),再由杆端剪力来推求反力以及链杆内力,将简便得多。

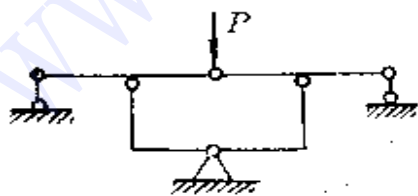


图 2-9

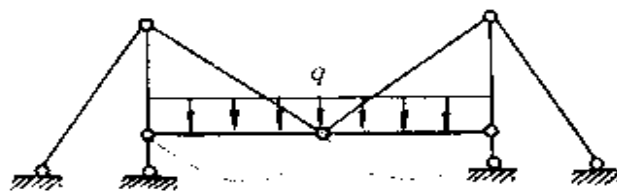


图 2-10

§ 2-2 图形叠加的画法

已知两弯矩图 M_1 和 M_2 ，要作 $M = M_1 + M_2$ 的图形，这当然是一个极简单的问题。然而，若不依循一定的法则，往往会在基线问题和正负号的判定上发生混乱。图形叠加的画法通常不外以下几种：

1 计算竖标法 根据 M_1 和 M_2 两图的形状(图 2-11a 和 b)，选择若干必需的控制点，按照 $M = M_1 + M_2$ 计算各控制点的竖标，再于基线上绘出这些竖标，点出各控制点并连线成图(图 2-11c)。

此法任何情况都能适用。缺点是 不够简捷。当两个以上的图形叠加时多用此法(如多次超静定结构最后弯矩图的绘制)。

2 “接力赛”法 步骤是：

- 1) 以水平线为基线绘出 M_1 ；
- 2) 以 M_1 的图线为基线绘出 M_2 ；
- 3) M_2 图线与最初水平基线间所夹的竖标即为所求之 M ，

正负号以最初基线为准来判定(见图 2-11d)。

此法当 M_1 图为一 段直线时最为方便，在一般较简单的弯矩图的叠加中应用最广。当两图中无一为一段直线时则此法不便应用。

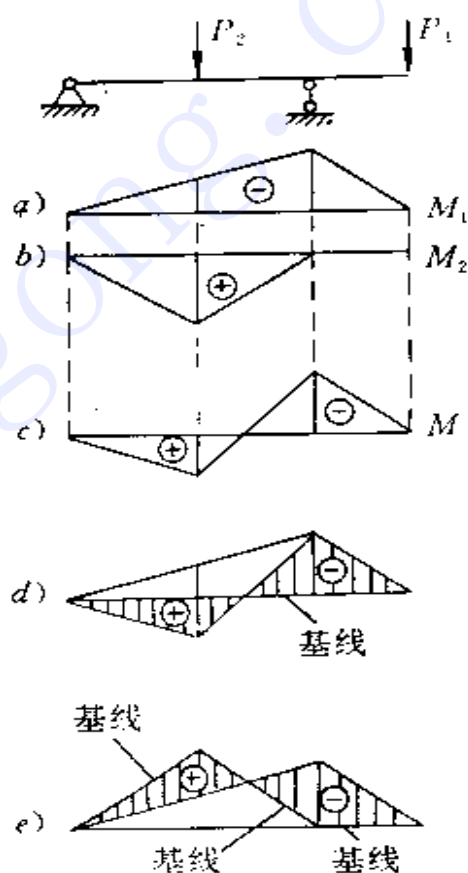


图 2-11

- 3 一图反号法 步骤是：
- 1) 以水平基线绘出 M_1 ；
 - 2) 仍以原水平基线将 M_2 反号绘出，亦即绘出 $-M_2$ ；
 - 3) M_1 与 $-M_2$ 之间所夹竖标即为所求之 M ，而以 $-M_2$ 为基线来判定其正负号（见图 2-11e）。

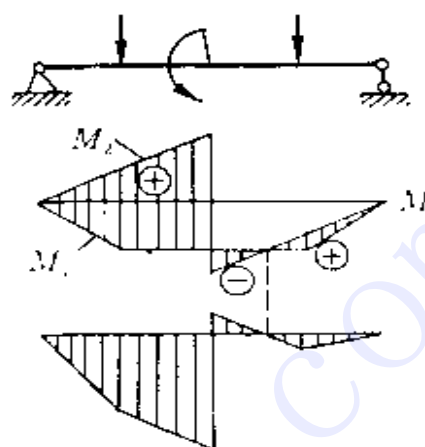


图 2-12

当两图均不为一段直线时，用此法较方便，可迅即获得所需之叠加图形（如图 2-12a）。此法缺点是往往还需将图形再改绘一次以便把基线摊平（图 2-12b），使之符合习惯和便于应用。在三铰拱内力影响线的绘制中即曾采用此法。

§ 2 3 曲杆的荷载与内力间的微分关系及应用

在绘制三铰拱的内力图时，荷载与内力间有没有像直梁中那样的微分关系，剪力为零处弯矩是否有极值？现对此作一讨论。

今从曲杆上取一长为 ds 的微段（图 2-13），其曲率半径为 R ，两端横截面上作用有弯矩、剪力、轴力，并作用有法向分布荷载 q_n 和切向分布荷载 q_t （图中所绘各力均为正值的，注意轴力以压力为正）。由于 ds 为无穷小，可认为法向荷载合力为 $q_n ds$ ，作用线与 CO 重合；切向荷载合力为 $q_t ds$ ，作用线通过 C 点而与 CO 垂直。

取 C 为原点并设 n, s 轴，由投影平衡方程 $\sum n = 0$ 和 $\sum s = 0$ 及力矩平衡方程 $\sum M_C = 0$ ，并取 $\cos \frac{d\varphi}{2} = 1$ ， $\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2} = \frac{ds}{2R}$ 和略去二阶微量，可得

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{ds} &= q_n - \frac{N}{R} \\ \frac{dN}{ds} &= q_t - \frac{Q}{R} \\ \frac{dM}{ds} &= Q \end{aligned} \quad (a)$$

这便是曲杆的荷载与内力间的微分关系。其中第三式和直梁的相似；第一、二式则复杂些，除荷载外，还存在着 Q 、 N 之间互为导数的因素。由于此时 s 不是直线坐标，而是曲线坐标，绘内力图时，若取曲杆轴线为基线，各图之间的这些微分关系不易明显看出。虽然如此，根据微分关系来推断图上某些特征点和重大变化之处，还是有用的。例如，由式(a)可推知：

- 1) Q 为零或变号处， M 有极值(或局部极值)；
 - 2) Q 突变处， M 有尖角；
 - 3) 法向集中荷载(包括集中荷载的法向分力)作用处， Q 有突变，而 N 图有尖角；
 - 4) 切向集中荷载(包括集中荷载的切向分力)作用处， N 有突变，而 Q 图有尖角；
 - 5) 在 $q_t = 0$ 的区段， Q 为零或变号处， N 有极值。
- ……等等。读者还可推出其他一些对应关系，但主要的是上面几条。

在绘制拱的内力图时，为了作图方便，有时也常以拱轴线的水平投影作为基线。此时有

$$dx = ds \cdot \cos\varphi$$

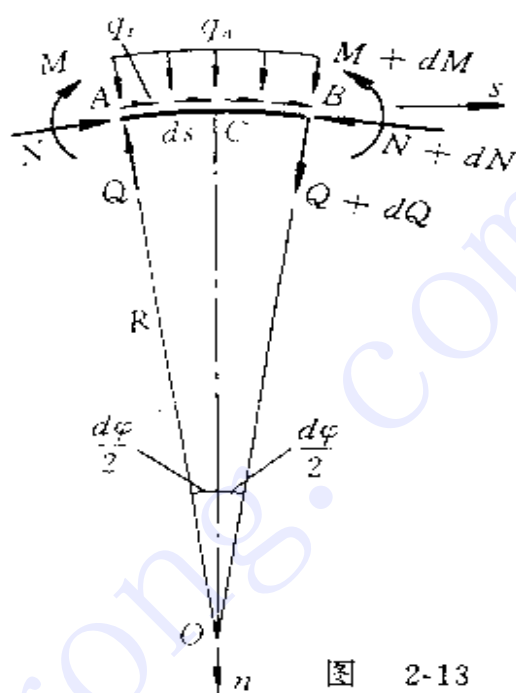


图 2-13

这里 φ 为拱轴切线的倾角，将上式代入式(a)，即可得此时各内力图的斜率为

$$\frac{dQ}{dx} = (-q_n \pm \frac{N}{R}) \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\frac{dN}{dx} = (q_t \mp \frac{Q}{R}) \frac{1}{\cos\varphi} \quad (b)$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{Q}{\cos\varphi}$$

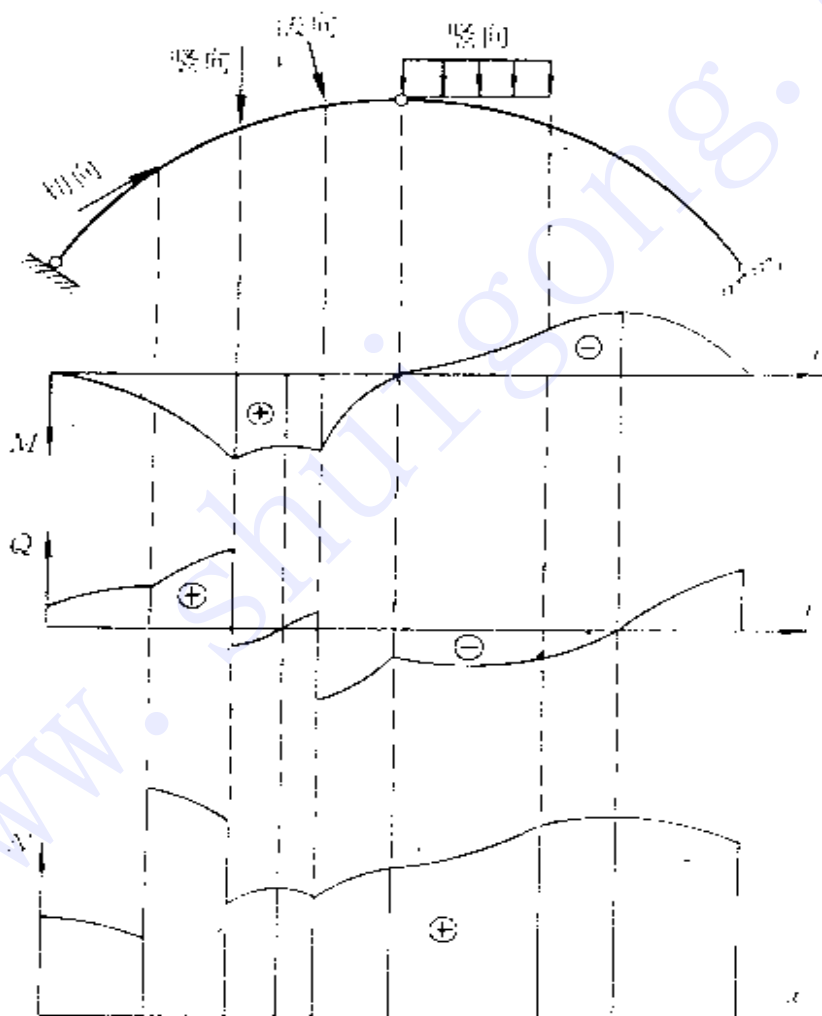


图 2-14

此时作图方便些了，但微分关系更复杂了，又引进了 $\cos\varphi$ 的因素 ($\cos\varphi$ 本身也是变量)。然而，上述的突变、尖角、极值等对应关系依然是存在的。图 2-14 为一拱结构承受各种荷载时的内力图形状，读者可依照微分关系，自行对照检验，不再赘述。

§ 2-4 通路法

通路法为我国学者胡海昌 1950 年所创，是分析复杂桁架内力的一种有效方法，它是结点法的巧妙运用，依次递推而避免解算联立方程。

试看图 2-15 所示桁架，反力易求，内力难算。但若设法首先求出某一杆的内力，则其余各杆可迎刃而解。兹假设 AB 杆内力为 $\sqrt{2}x$ ，依次取结点 B 、 C 、 D 推算(见图)，最后到结点 A ，可求得 $x = P/2$ 。至此求其余各杆内力已无困难。

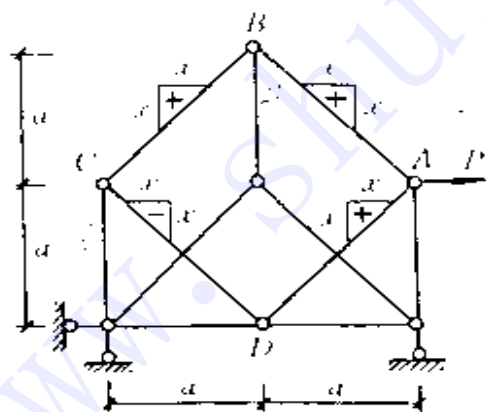


图 2-15

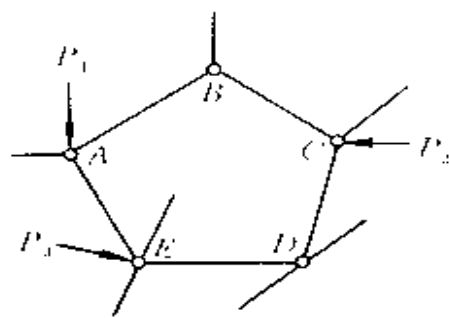


图 2-16

推广到一般情况：在桁架上取一闭合通路(图 2-16)，通路上各结点均为三杆结点或四杆结点而非通路上二杆共线，设通路上任一杆内力为 x ，沿通路依次用结点法推算一圈，最后便可解得 x 。

§ 2-5 复杂桁架难题举例

这里讨论复杂桁架内力分析，有意识地避免采用杆件代替法和再分桁架法（由于电算日益普及，这类手算的特殊方法的必要性已日渐减小，目前教学大纲及多数教材已不涉及），而是使用普通的结点法（包括通路法）和截面法求解。当然，这样有时会遇到一些困难，需要一定的经验和技巧，下面举数例说明。

图 2-17 所示桁架，需求出反力后方可计算各杆内力，而求反力不可避免解联立方程，问题是如何尽量解得简便一些。较简便的方案之一是挑两个反力来联解。例如选 R_A 和 R_B ，可由整体平衡 $\Sigma M_O = 0$ 建立一个方程。然后由 $\Sigma X = 0$ 看出 $R_D = R_B$ ，再由结点 B, D 知两斜杆的水平、竖直分力均为 $-R_B$ 。于是作截面 I 由 $\Sigma Y = 0$ 又可建立一个只包含 R_B 和 R_A 的方程。按上述分析，由整体 $\Sigma M_O = 0$ 有

$$3R_A - 3R_B - P = 0 \quad (1)$$

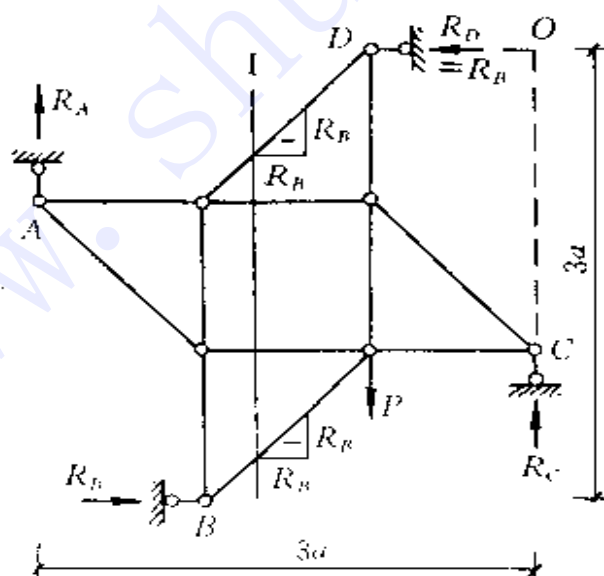


图 2-17

由截面 I 以左部分 $\sum Y = 0$ 有

$$R_A - 2R_B = 0 \quad (2)$$

联解(1)、(2) 便得： $R_A = \frac{2}{3}P \uparrow$ ， $R_B = \frac{P}{3} \rightarrow$ ，其余内力、反力进而均易求出，不再赘述。

图 2-18 所示桁架，欲求 BD 杆内力。去掉零杆后，由结点 C 可看出， CD 杆内力为 $+P$ （拉力）。再看结点 D ， CD 、 ED 两杆内力已满足该结点 $\sum Y = 0$ 的平衡条件，故知 BD 杆为零杆。

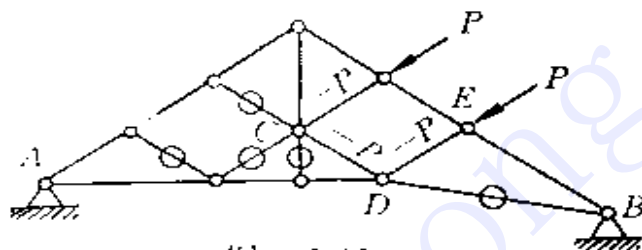


图 2-18

图 2-19 所示桁架，反力易求，内力以用通路法求解较简便。初看似选通路 23452 或 23612

较方便，因为通路较短。其实不然，这样需取斜向的坐标轴，其投影计算是很不方便的。现取通路 2341652，设 23 杆为压力，水平分力为 X ，则立刻可知所有斜杆的水平分力绝对值均为 X ，而正负号如图所注。再由结点 2 看出，12 杆内力为 $-2X \tan \alpha$ 。然后取结点 1，由

$$\sum Y = 0$$

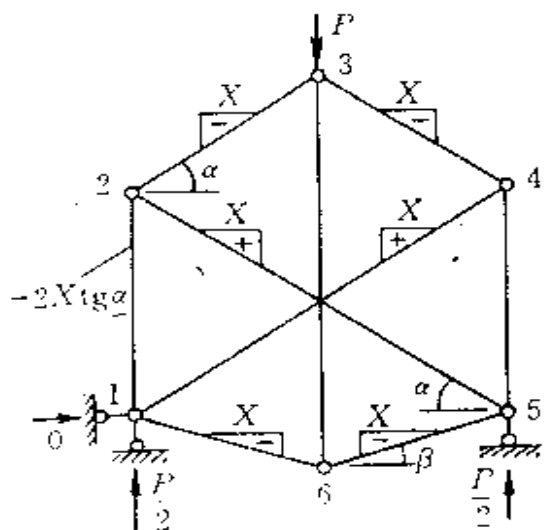


图 2-19

有
$$2X \operatorname{tg} \alpha - X(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) - \frac{P}{2} = 0$$

得
$$X = \frac{P}{2(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)}$$

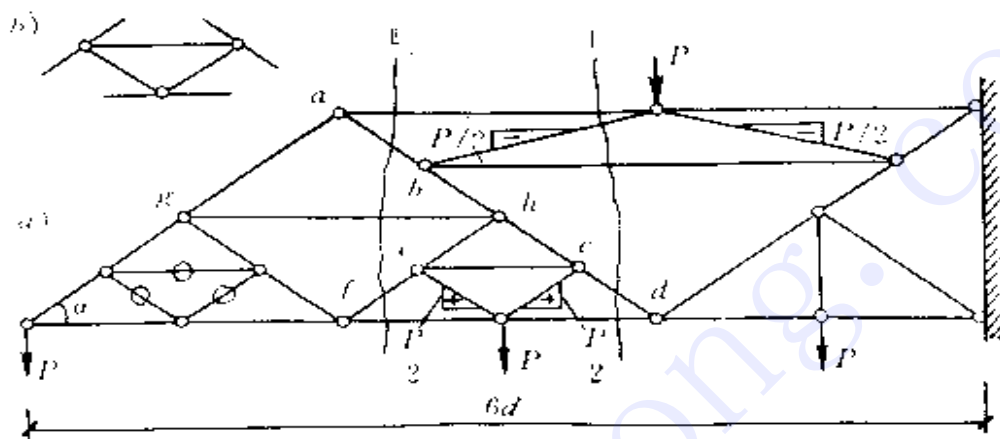


图 2-20

然后各杆内力便不难确定,例如
12 杆内力为

$$S_{12} = \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

图 2-20a 所示桁架,欲求 ab 和 cd 杆内力。本题不用再分桁架法同样可求解,只需熟练地运用结点法(含通路法)技巧即可。我们首先注意到形如图 b 的三角形通路,由结点法易证当三结点均无外荷载时三杆均为零杆;当中间结点有竖直荷载 P 时两斜杆内力相等,竖向分力各为 $P/2$ 。于是在图 a 中各小三角形此类通路上杆件内力已可定出,取截面 I 以左由 $\sum Y = 0$ 便可求出 cd 杆的竖向

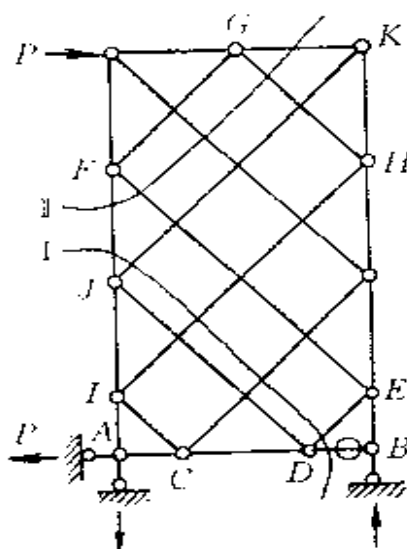


图 2-21

分力为

$$Y_{cd} = P - P - \frac{P}{2} = -\frac{5P}{2}$$

此外，由通路 $efghe$ 易知， ef 与 he 两杆内力等值反号；从而由结点 e 的 $\Sigma Y = 0$ 可知 ef 杆的竖向分力为 $-\frac{P}{4}$ (压)；再取截面 I 以左由 $\Sigma Y = 0$ 便可求出

$$Y_{ab} = -P - \frac{P}{4} = -\frac{5P}{4}$$

图 2 21 所示桁架反力及 AC 、 AI 、 BE 杆内力易确定， DB 为零杆，其余各杆内力便较难求解。此时较简便的计算方案有两种，一是取通路 $CDEFGHC$ 求解；如不用通路法，则可首先作截面 I，由投影平衡方程求得 FJ 杆内力，再作截面 II 由投影平衡方程求出 GK 杆内力，其余各杆内力则不难求得。

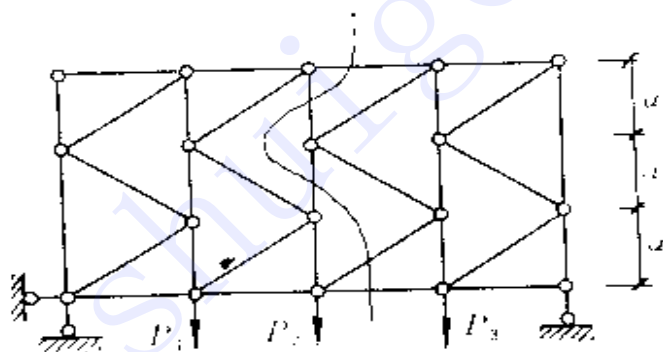


图 2 22

图 2 22 所示桁架，弦杆内力可借助于形如 I 的截面由力矩式求得；斜杆的竖直分力担负所在节间剪力的 $1/3$ ；竖杆内力则需在求出斜杆内力后由结点法计算。此桁架系静定结构而非瞬变体系，这由零载法很容易证明。

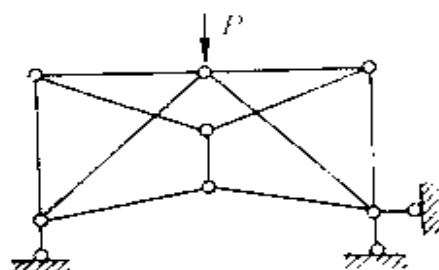


图 2 23

图 2-23 所示桁架初看似乎较难求解，其实只要注意到水平反力为零，便可知其受力是对称的。利用对称性由上弦中间结点 $\Sigma Y = 0$ 开始求解将极其简单。同类型的题目均可如此处理。

图 2-24 所示复杂桁架，需先设法求出反力，方可计算各杆内力。由整体平衡， $\Sigma M_A = 0$ 有

$$3R_A - 3R_C - 2P = 0 \quad (1)$$

然后标出零杆，由结点法分别从两端依次推算，不难判定有关各斜杆的垂直分力如图中所注。再由结点 D 的 $\Sigma Y = 0$ 有

$$\frac{R_A}{2} + \frac{R_C}{2} - P \quad (2)$$

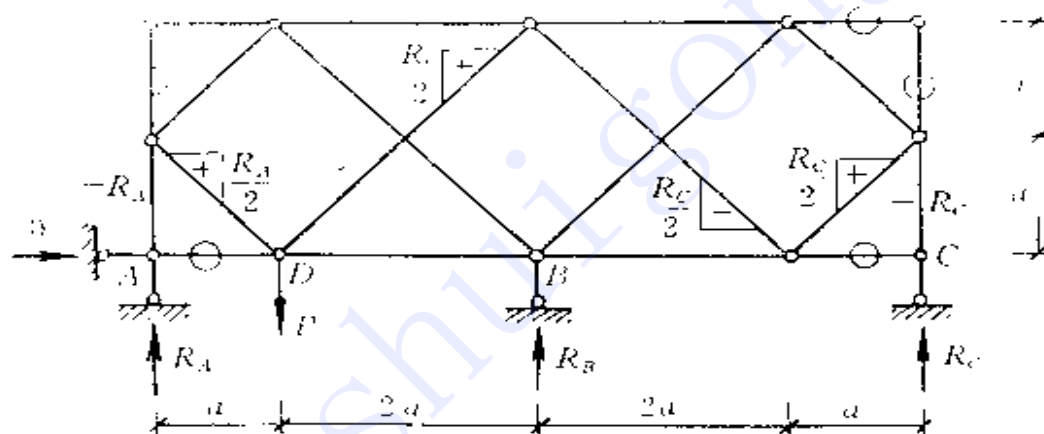


图 2-24

联解(1)(2)两式可得

$$R_A = \frac{4}{3}P \uparrow, \quad R_C = \frac{2}{3}P \uparrow$$

至此，其余各杆内力及反力 R_B 已不难求出，从略。

第三章 影响线及应用

§ 3-1 作影响线的联合法

作静定结构的反力、内力影响线，当情况比较简单时，无论用静力法或机动法都较方便。当情况比较复杂时，则往往单用静力法或单用机动法均不方便。用静力法需要分段列出影响线方程并注意各方程适用范围以及进行函数图形的叠加，这是很烦琐的；用机动法则确定竖标数值颇感困难。此时，将二法各取其长，结合使用，常常更为简便，这就是：用机动法判断形状，用静力法计算竖标。这可称之为“联合法”。用机动法判定影响线形状，首先去掉所求内力或反力相应的联系，体系便成为一个自由度的机构，然后根据

一段刚片，一段直线。

两刚片间，铰处交点。

竖向支座，竖标为零。

滑动联结，两边平行。

等法则，便可得知影响线的段落和大致形状。用静力法计算竖标，就是将荷载 $P = 1$ 置于所需确定竖标的控制点处，然后即和恒载作用的情况一样，由平衡条件求出所求内力或反力的数值。

例如欲求图 3-1a 所示静定结构反力 R_B 的影响线，去掉 B 处的支座链杆后，可知影响线由 AE 、 EF 、 FD 三段直线组成，而在 A 、 D 处为零点，故只需确定 E 、 F 两处竖标即可。将 $P = 1$ 置于 E ，求 R_B 。为了避免列出许多方程来联解，我们可仿照计算复杂桁架内力的通路法的技巧，依次取图 b 、 c 、 d 的隔离体，将涉及到的有关各力均

用 R_B 的函数来表示。最后回到整体平衡(图 a)，由 $\Sigma M_C = 0$ 有

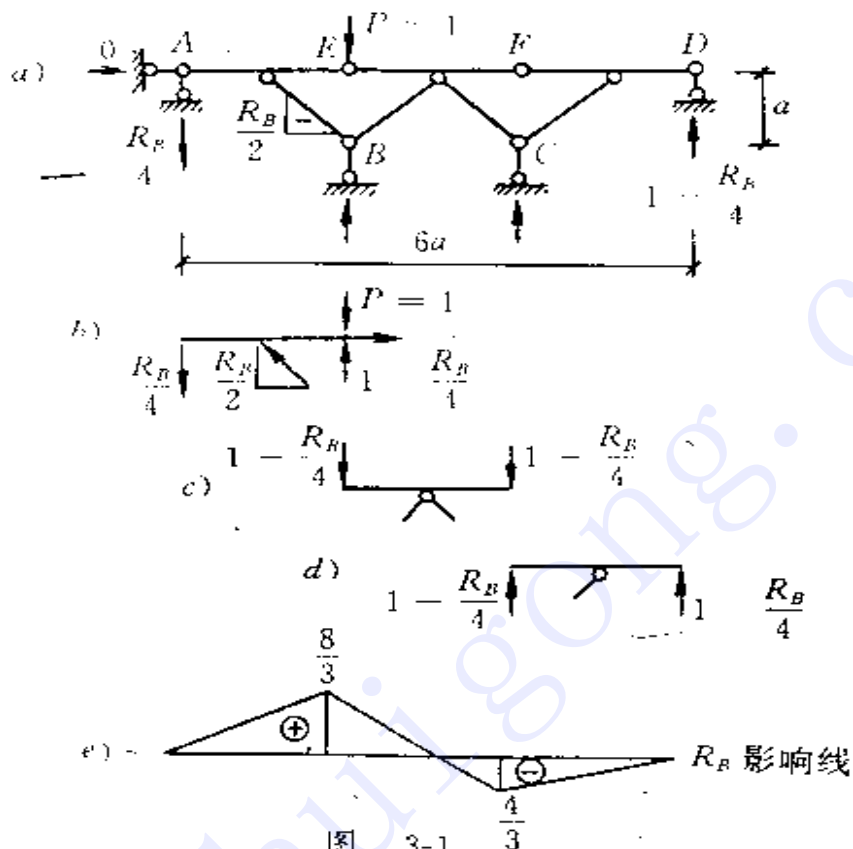


图 3-1

$$R_B(2a) - \frac{R_B}{4}(4a) - 1(2a) - (1 - \frac{R_B}{4})2a = 0$$

得
$$R_B = \frac{8}{3} \uparrow$$

再由 $\Sigma Y = 0$ 可求得

$$R_C = -\frac{R_B}{2} = -\frac{4}{3} \downarrow$$

由对称可知，当 $P=1$ 在 F 时亦有 $R_B = -\frac{4}{3} \downarrow$ 。于是可作出 R_B 的影响线如图 e 所示。

§ 3-2 机动法作影响线的几个问题

1 不用瞬心法可求解的较复杂例

图 3-2a 所示多跨静定梁，今欲求指定截面 K 的弯矩、剪力影响线。此题用静力法、联合法均麻烦，而纯粹用机动法最简捷。在机动法中，情况稍复杂时，一般说需使用瞬心分析方法。然而对于本例可运用技巧，利用简单几何关系即可求解。

先作 M_K 影响线。拆去相应联系，将 K 处改为铰（图 3-2b），可知影响线由 AK 、 KF 、 FI 和 ID 四段直线组成。使体系发生位移时，注意到下层托梁的杠杆构造，则可知 E 点与 G 点的竖向位移必等值反向， H 点与 J 点的竖向位移亦等值反向。因此，若设 J 点位移为 δ （设向上），则 H 点位移亦为 δ （向下）；再由 I 点位移为 2δ （向上），即可绘出 FI 段直线；并可定出此段直线之零点位置在 H 点右 $\frac{a}{3}$ 处， G 点及 F 点竖标分别为 4δ 及 7δ （向下）。然后又可知 E 点位移应为 4δ （向上），从而可绘出 AK 及 KF 两段直线；并可知 K 点位移为 6δ ，进而定出 KF 段直线的零点在 K 点右 $\frac{6}{26}a$ 处。将 KF 延长与 A 处竖线相交，由比例知该处竖标应为 45δ 。又由 K 处两直线相对微小转角为 1 可知，该竖标又应为 $1.5a$ ，故有

$$45\delta = 1.5a$$

得
$$\delta = \frac{a}{30}$$

从而所有各点竖标均告确定，这就完成了全部 M_K 影响线。

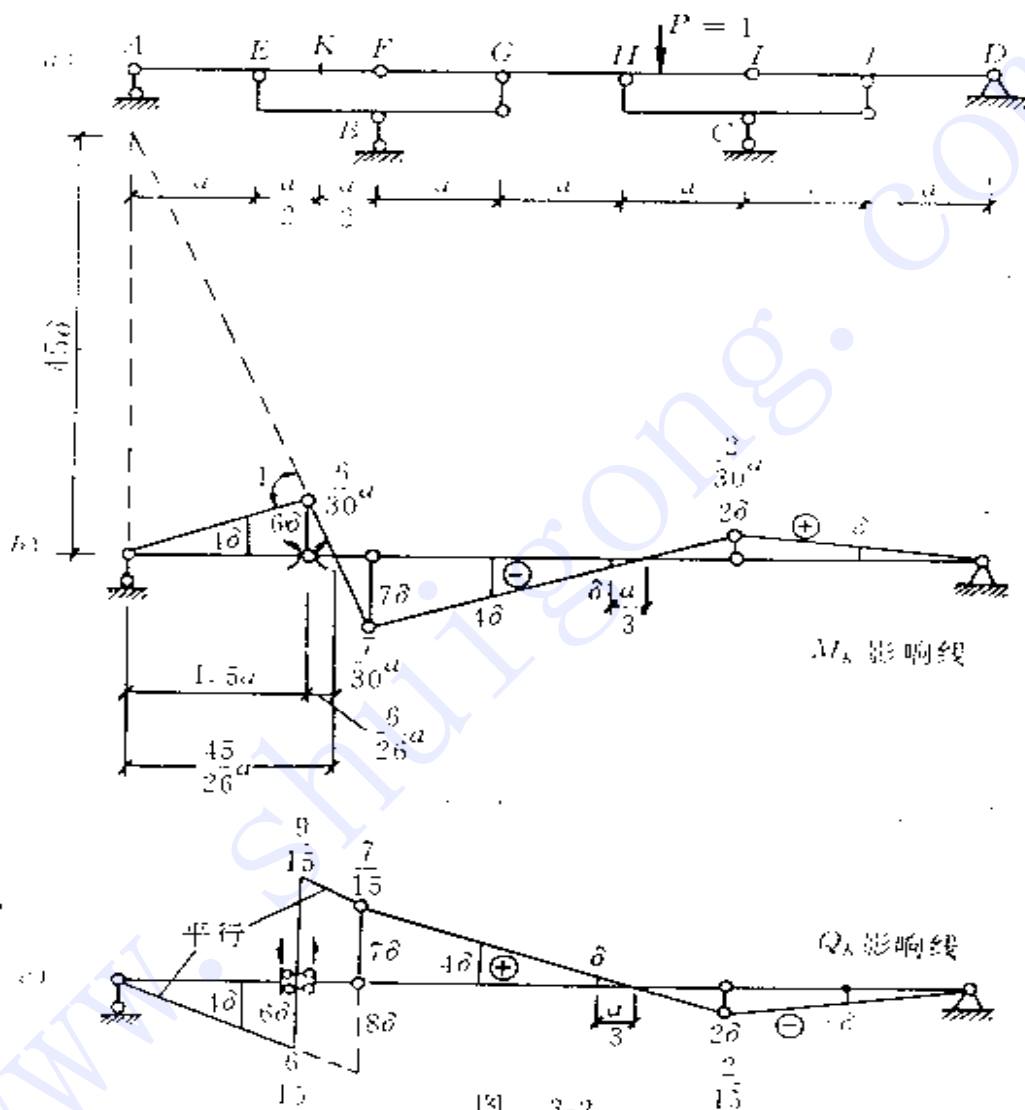
再来作 Q_K 影响线，改 K 处为二平行链杆滑动联结（图 3-2c），同理设 J 点位移为 δ （向下），于是可推知各点位移如图所注，不需详述。最后由

$$7\delta + 8\delta = 1$$

得

$$\delta = \frac{1}{15}$$

据此便可确定所有竖标之值。



2 绝对瞬心法和相对瞬心法

用机动法作静定结构的内力、反力影响线,判断直线段落数目

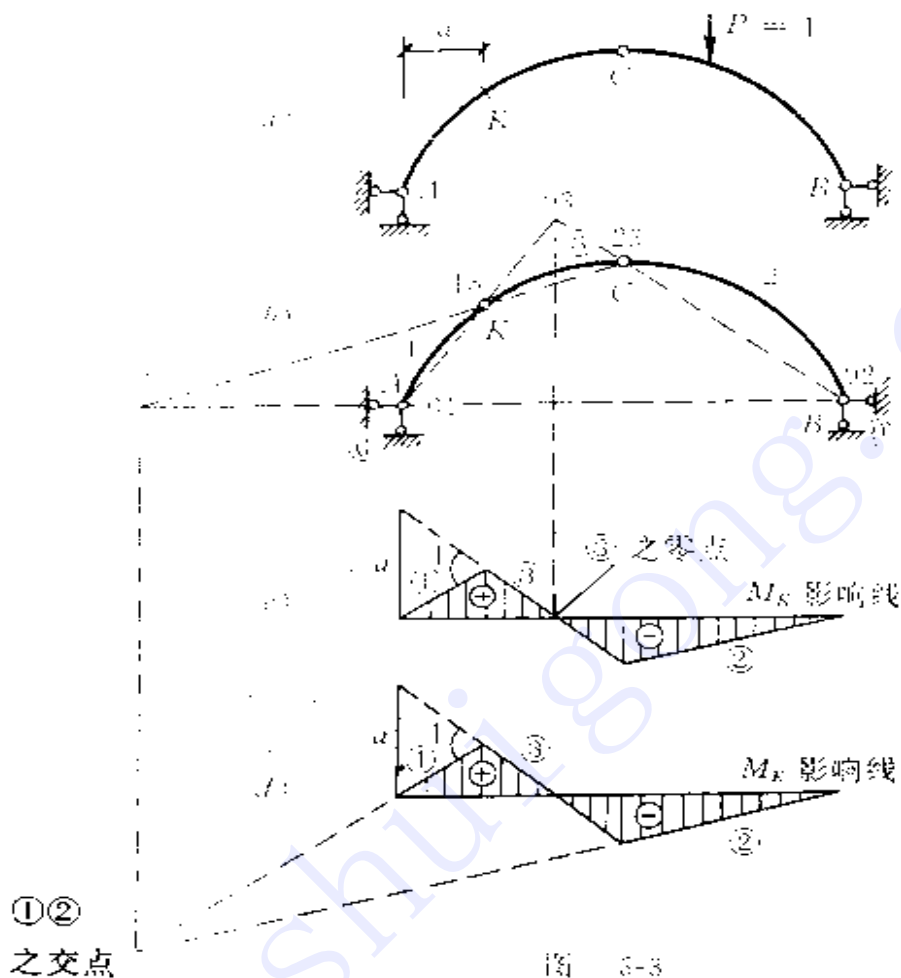
及每段直线的范围是很容易的；常常感到困难的是：1) 某些线段的位置如何确定；2) 竖标数值的求出。

确定影响线所有线段的位置的一般方法是瞬心法。体系产生刚体位移时，任何两个刚片之间的瞬时相对转动中心简称相对瞬心或瞬心。瞬心的位置除直接可以判断的外，需借助于三瞬心定理来确定，即任何三个刚片间产生相对运动时其三个瞬心必在同一直线上。在所有刚片中，通常总是认为地基是不动的，因此某刚片与地基之间的相对瞬心便可称为该刚片的绝对瞬心。由于绝对瞬心是不动的，刚片运动时即绕该点转动，因而通过该瞬心的竖线上的各点只产生水平位移而竖直位移为零，因此绝对瞬心处便是该刚片竖向位移图的零点。用机动法作影响线时，每相邻两刚片间的瞬心通常是已知的或很容易确定的，因此我们若设法又确定了每一个刚片的绝对瞬心，则整个影响线形状即可绘出，这便是绝对瞬心法或称零点法。但有时也不一定把所有刚片的绝对瞬心都求出，而是求出必要的某些不相邻刚片间的相对瞬心，也可作出整个影响线，这可称为相对瞬心法或交点法。

例如图 3-3a 所示三铰拱，作 M_K 影响线时，将 K 处改为铰接，体系成为三段刚片 ①、②、③，地基称为刚片 ④，则刚片 ①、② 的绝对瞬心 O_1 、 O_2 就是左右拱趾两铰，刚片 ②、③ 的相对瞬心 O_{23} 即顶铰 C ，刚片 ①、③ 的相对瞬心 O_{13} 即为铰 K ，详见图 3-3b。

用绝对瞬心法求解时，需定出刚片 ③ 的绝对瞬心 O_3 的位置。根据三瞬心定理， O_3 应在 O_1 、 O_{13} 的连线上，又应在 O_2 、 O_{23} 的连线上，因而该两直线交点即为 O_3 。这样就确定了刚片 ③ 的竖向位移图上的零点位置，从而可作出 M_K 影响线如 3-3c 所示。若用相对瞬心法求解，则可按相似的步骤定出相对瞬心 O_{12} (图 3-3b)，这就是刚片 ①、② 的位移图线段延长线的交点位置，据此同样可作出 M_K 的全部影响线，见图 3-3d。

在有些情况下，相对瞬心法比绝对瞬心法简便。如图 3-4a 所



示桁架，欲求斜杆 CD 的内力影响线，假想截断该杆后可知影响线由刚片 ①、③、② 三段直线构成。① 的绝对瞬心即为固定铰支座 O_1 ，再定出相对瞬心 I_{12} ，并进而定出 ② 的绝对瞬心 O_2 ，即可绘出影响线形状(图 3-4b)。但若要求刚片 ③ 的绝对瞬心 O_3 ，则仅根据 O_1 、 I_{13} 连线和 O_2 、 I_{23} 连线还无法求得，因为此二直线恰好重合，无法定出交点位置。因而还需先定出 O_4 ，再作 O_4 与 I_{34} (在竖直方向无穷远处)的连线，与上述二直线相交而定出 O_3 ，从而确定刚片 ③ 线段的零点位置。显然这就比前一种方法麻烦多了。

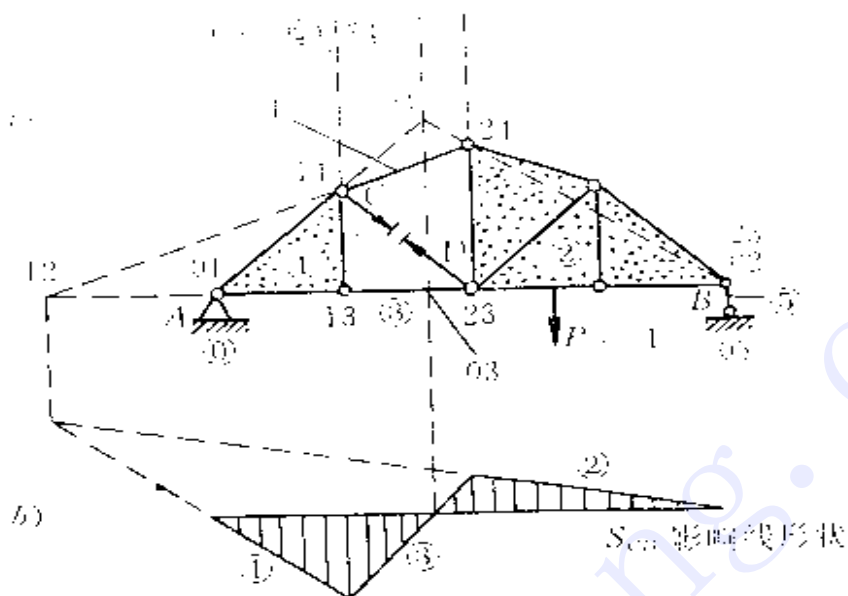


图 3-4

有时,情况恰相反,相对瞬心法不便解决问题,则要使用绝对瞬心法。如图 3-5a 所示桁架,欲求中间竖杆的内力影响线。这用静方法本是极简单的问题,用机动法则可算是较困难的问题了。将该

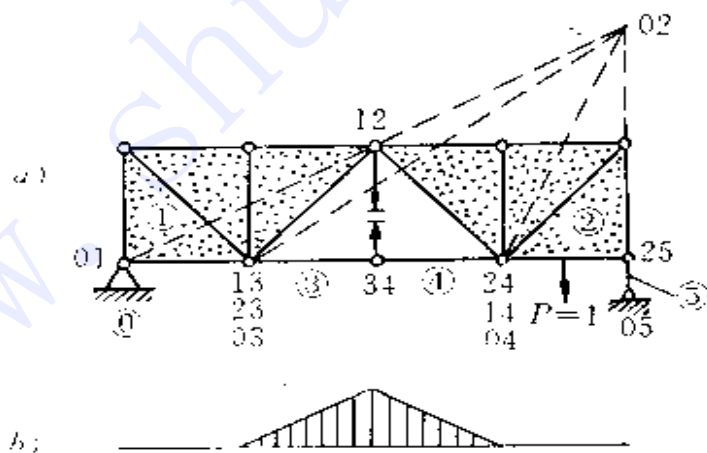


图 3-5

杆截断后,受载弦(下弦)成为四段刚片。现在关键是要证明体系发生位移时刚片①、②不动。在定出刚片①、②的绝对瞬心 01、02

以及相对瞬心 2_3 、 1_4 之后，仍不能直观判定 ①、② 不动（可以有办法论证，但不够简便和明显）。于是再继续运用三瞬心定理，定出刚片 ③、④ 的绝对瞬心 0_3 、 0_4 恰好就分别在 1_3 、 2_4 处，这就证明了 ①、② 的确不能动，从而可绘出影响线形状（图 3-5b）。

3 怎样确定桁架影响线的竖标值

前已述及，机动法作影响线的第二个难点是竖标数值的确定，这对梁、三铰拱等“实心结构”还较为直观，这里不再讨论；下面就桁架影响线如何用机动法定竖标加以说明。

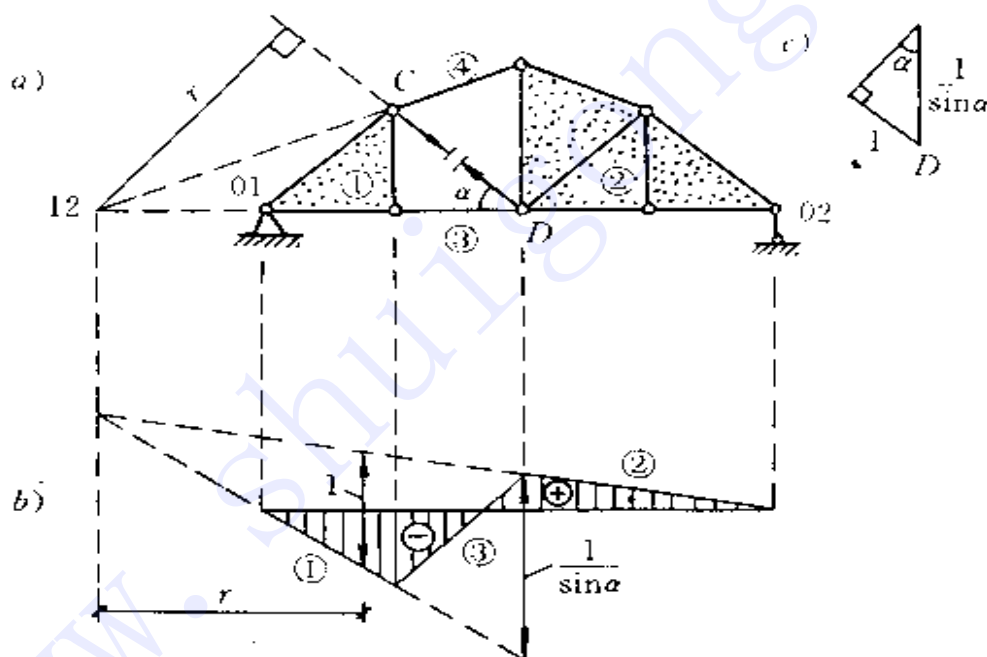


图 3-6

我们知道，机动法定影响线竖标的依据是使体系沿所求内力或反力的正向发生单位位移。桁架杆件只受轴力，通常以拉力为正，故沿内力正向发生单位位移就是该杆件缩短 1，或者说该杆两端结点相互靠拢 1，这个“相互靠拢 1”如何体现在竖向位移图的纵坐标上呢？可以有两种方法，即刚片转角法和结点位移法，现结合

例子加以说明。

图 3-6a 所示桁架 CD 杆内力影响线形状已按前述方法绘出如图 3-6b 所示。确定竖标时, 考虑 C 、 D 两点相对靠拢 1。 C 、 D 两点分属刚片 ①、②, 假设刚片 ① 不动, 刚片 ② 则绕瞬心 12 转动。欲使 D 点在 DC 方向的分位移为向 C 点靠拢 1, 设瞬心 12 至 CD 杆垂直距离为 r , 则刚片 ② 的转角应为反时针的 $\frac{1}{r}$ 。又可推知, 设想刚片 ② 上有在瞬心 12 右边水平距离为 r 之点, 则其竖直位移为向上的 1。于是, 我们可在图 3-6b 中, 以刚片 ① 之直线为基线, 而在距 ①、② 两直线交点右边的水平距离为 r 处, 向上作竖线至 ② 直线, 并令其值为 1, 这便确定了整个影响线竖标的控制值, 各处竖标可据此由比例关系推定。若在距瞬心 12 右边 r 处从 ① 作竖线至 ② 为向下, 则表明开始勾绘影响线形状时方向恰好弄反了, 应予全部反号。以上便是刚片转角法。

影响线竖标还可以用下述方法标定: 设刚片 ① 不动, 刚片 ② 绕 12 转动, D 点位移即垂直于 D 与 12 连线方向, 目前恰好为竖直方向。欲使 D 点向 C 点靠拢 1, 则其竖直位移应为向上的 $\frac{1}{\sin\alpha}$ (见图 3-6c)。于是我们可在图 3-6b 中直接于 D 点处, 由直线 ① 至 ② 定为向上的竖标 $\frac{1}{\sin\alpha}$ (若为向下, 则整个影响线须反号)。这便是结点位移法。

§ 3-3 中 - 活载的来历及沿革

我国铁路桥涵设计使用的标准活载, 称为中华人民共和国铁路标准活载, 简称“中 - 活载”, 它是 1951 年制定的, 1974 年经过修改, 八十年代又将其改用国际单位制。

铁路上行驶的机车车辆种类繁多, 其轴重、轴距、轴数各不相同, 且随着生产发展, 型号不断更新, 重量亦不断增加。因此, 标准

活载不能只仿照某种类型的机车、车辆来制定，而应当是当前各种机车车辆的综合代表，以保证按标准活载设计的桥梁，在各种实际活载作用下，各部分都能安全地工作，并且须预计到将来的发展，以免在活载稍有增加时桥梁就需加固或更换；但同时又不能预留过多的储备，致使桥梁在很长时期内（甚至在全使用期限内）都不能充分发挥其潜力，造成投资的积压浪费。总之，标准活载须根据安全和经济两方面的原则来制定，而且其图式应力求简单，方便计算。

1 1951年制定的中 - 活载

当时铁路上行驶的都是蒸汽机车，根据以下原则：

- 1) 式样较新或在最近将来大量制造的；
- 2) 轴重较大的；
- 3) 目前最通用的。

选择了6种机车，作为制定标准活载的依据。这种6种机车的型号是MK1, MK4, MK6, PF3, PF6, PF7。其中MK1见图3-7，它有一对导轮，4对动轮，一对从轮，4对煤水车轮，机车全重103.85t，煤水车全重58.2t。又如MK4机车全重124.64t，煤水车全重75.76t，等等。显然，欲使标准活载对各种跨度桥梁所产生的最大

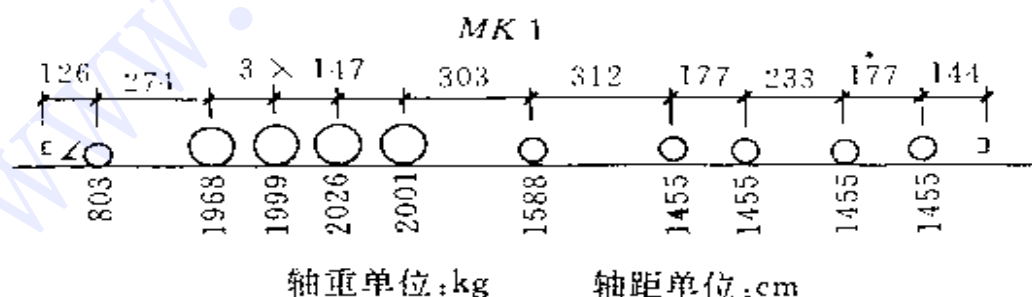


图 3-7

内力同时包括这6种机车的影响，则应首先分别计算这6种机车对不同跨度桥梁所产生的最大内力。计算时考虑双机牵引的不利

情况，而其后面的车辆则根据当时的情况简化为 6 t/m 的均布荷载(图 3-8)。



图 3-8

不一定总重量大的机车对桥梁产生的内力就更大，这还取决于桥梁的跨度、机车的轴重、轴距、排列，以及所计算截面的位置等因素。一般说，大约 2 m 以下的跨度，最大内力取决于最大轴重的机车；稍大的一些跨度，决定于动轮的轴重及轴距； 10 m 左右的跨度，决定于动轮的轴重及轴数；再大一些的跨度，机车总重才逐渐起决定作用。把这些最大的影响凑在一起，便可绘出各种机车对各种跨度桥梁(或影响线载重长度)所产生最大内力的综合曲线，称为“特一级综合线”(见图 3-9，仅以 $\alpha = 0.5$ 即跨中截面为例)。

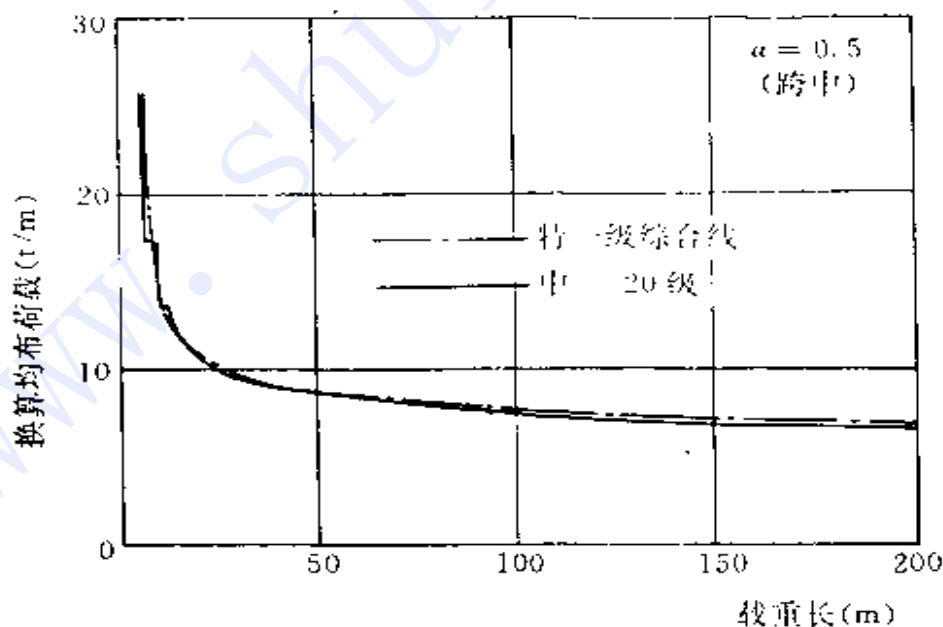


图 3-9

有了这一条综合线，便可设计标准活载的图式。标准活载的影响应尽量接近这条综合线，但并不是要求处处密合。考虑到桥面系的纵横梁系统受动载的锤击作用较烈，又受到主梁变形所引起的附加应力，且因枕底积水锈蚀因而最易损坏的情况，故在标准活载图式中把动轮加多，轴距加密，并设置特种活载反映较大轴重对短跨梁的影响。同时，对第一台机车的煤水车及第二台机车和其煤水

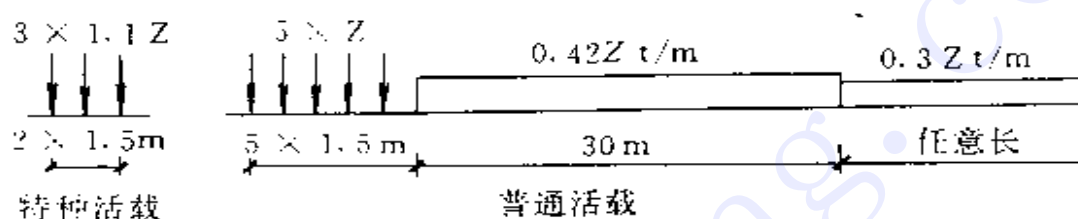


图 3-10

车则一起简化为 30 m 长的均布荷载。因为对短跨梁的设计，有前面 5 个集中荷载及特种活载已经够用；而跨度更长时，后面荷载用集中力还是均布力，结果相差无几。这样，便制定出中 活载的图式如图 3-10 所示，其中 Z 称为活载等级。

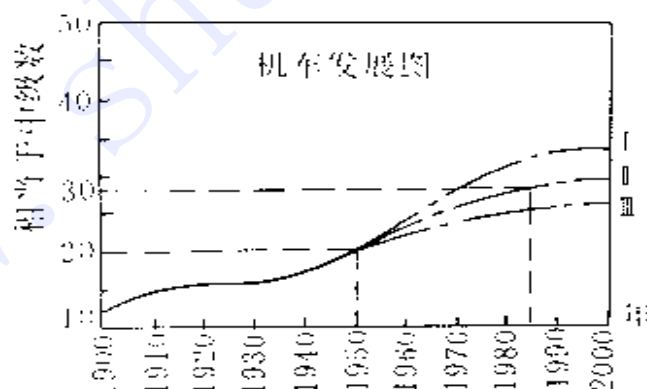


图 3-11

设计桥梁时 Z 值应采用多少呢？当时的“特一级”约相当于中-20 级。但新建一座桥梁要用几十年上百年甚至更长时间，因此设计时必须考虑将来的发展。统计当时铁路钢梁，跨度 30 m ~ 50 m

者占 39.1%, 尤以 32 m 钣梁最多, 故以其作为典型来分析。将历年的 32 m 钣梁均用中-Z 级来检算, 可得出“机车发展图”(图 3-11)。对 1950 年以后的发展趋势, 则作了迅速、适中和缓慢三种比较曲线。至于应采用多少年后的等级, 则应根据投资的经济效果来确定。

最经济的使用年限与建桥时钢梁的价值, 复利年利率, 钢梁每年损耗的价值, 使用结束后尚保留的价值(重新加固, 移作载重较轻之线路或作废料重新冶炼等) 等许多因素有关。经分析(略), 对于 32 m 钢钣梁, 经济使用年限约为 25 ~ 35 年。今取 35 年, 则由图 3-11 可定出相应的活载等级约为中-28 级。

是否就以中-28 级来进行桥梁设计呢? 还不足的。因为这样一来, 一旦将来活载发展到超过中-28 级时, 线路上的所有桥梁均同时需要加固或更换, 这将这给工作造成极大不便。所以又采用降低容许应力, 同时降低活载等级的方法来设计, 这样就可以避免上述弊端。因为不同跨度的桥梁, 其恒载与活载所产生的最大应力之比是不同的, 活载发展, 恒载却不变, 故它们不会在同一时间均达到使用年限。兹对此说明如下: 设

$[\sigma]$ —— 钢材基本容许应力, 亦称检定容许应力

$[\sigma]'$ —— 设计时使用的降低了的容许应力, 称设计容许应力

Z —— 最经济的中级数, 即检定级数

Z' —— 与 $[\sigma]'$ 相应的中级数

σ_q —— 恒载产生之最大应力

σ_K —— 中-Z 级静活载产生之最大应力

σ_K' —— 中-Z' 级静活载产生之最大应力

$1 + \mu$ —— 活载冲击系数

则应有 $\sigma_q + (1 + \mu)\sigma_K = [\sigma]$

和 $\sigma_q + (1 + \mu)\sigma_K' = [\sigma]'$

又有

$$\frac{Z}{\sigma_K} = \frac{Z'}{\sigma'_K}$$

由以上各式可得

$$Z' = Z \left(\frac{[\sigma]'}{[\sigma]} - \left(1 - \frac{[\sigma]'}{[\sigma]}\right) \frac{\sigma_a}{(1 + \mu)\sigma_K} \right) \quad (a)$$

令 $a = \frac{\sigma_a}{(1 + \mu)\sigma_K}$, 即恒、活载最大应力之比值, 则式(a)可写为

$$Z' = Z \left(\frac{[\sigma]'}{[\sigma]} - \left(1 - \frac{[\sigma]'}{[\sigma]}\right) a \right) \quad (b)$$

对于3号桥梁钢, $[\sigma] = 1700 \text{ kg/cm}^2$ (即 170 MPa), $[\sigma]' = 1400 \text{ kg/cm}^2$ (即 140 MPa), 因而有

$$Z' = Z \left(\frac{1.4}{1.7} - \left(1 - \frac{1.4}{1.7}\right) a \right) = Z(0.823 - 0.177a) \quad (c)$$

对于32 m 钢板梁, 约有 $a = 0.21$, 故当 $Z = 28$ 时, 有

$$Z' = 28(0.823 - 0.177 \times 0.21) = 22$$

这表明, 对32 m 钢板梁, 最适宜的设计活载是中-22级。而其它跨度的桥梁亦均按中-22级设计, 实际能承担的检定活载即并非中-28级, 或者说其使用年限就不是35年, 而是略短于或长于35年(但相差不会很远, 因为在 Z' 的计算公式中第二项的影响较小), 这就避免了在同一时期需对所有跨度、类型的桥梁进行加固或更换的现象。

因此, 原“桥规”规定, I级铁路的钢桥, 钢筋混凝土板和梁(跨度 $\leq 40 \text{ m}$) 及圬工墩台(跨度 $\leq 40 \text{ m}$) 均用中-22级设计; 而大跨度钢筋混凝土梁、桁架、拱桥及跨度大于40 m之圬工墩台, 则因更换不易, 采用中-26级设计; II级铁路之钢桥、木桥用中-18级设计, 其余仍用中-22级; 跨度大于128 m之桥梁, 投资巨大使用年限长久, 设计活载等级另定, 例如武汉和南京长江大桥钢梁即采用中-24级设计。

2 修改后之中 - 活载

至 1974 年, 情况有了若干变化。在机车方面, 牵引动力逐渐由蒸汽向内燃和电力过渡, 但蒸汽机车的使用仍有相当长的时间, 当时并仍有少量生产, 主要机型为前进型, 在桥跨 60 m 以内, 相当于中 -21 级。内燃机车, 当时制造多为东风 4 型, 轴重 23 t; 电力机车当时国产最大的韶山 2 型(6340 马力), 轴重 23 t。内燃和电力机车轴重虽较大, 但总重量小, 轴距大, 两台机车联挂在桥跨 50 m 以内一般相当于中 -15 ~ 20 级, 而且它们的冲击力也较蒸汽机车为小。综合各种机车的轴重、轴距和总重等因素, 在桥梁设计上仍以蒸汽机车为控制活载。

车辆方面, 客、货车已由原多为 30 t、40 t 增长为 50 t、60 t, 平均重量尚在 6.6 t/m 以内; 但油罐车、石碴车、散装水泥车等已超过 7 t/m; 有些专用线已有总重 100 t 轴重 25 t 的矿石车, 平均重量达 8 t/m; 而运送大型设备的特种平车总重达 500 t, 按 20 轴设计, 轴重达 25 t, 已超过机车的最大轴重。

总的说来, 原中 -22 级图式对机车尚能适应, 且有一定余地, 对车辆则已不足。因此, 修改后的中 - 活载, 在普通活载的机车部分仍保持原中 -22 级的状况, 车辆部分则增加为 8 t/m, 特种活载

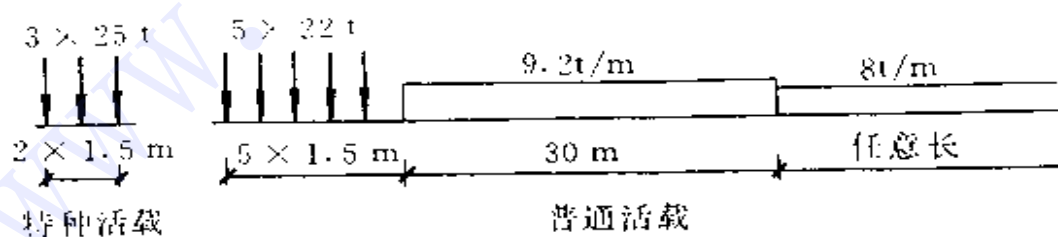


图 3-12

根据某些机车车辆的较大轴重, 采用 25 t, 其图式如图 3-12 所示。同时, 考虑到各种机车车辆在各等级线路上都能行驶, 故修改后的中 - 活载采用固定数值, 不再分等级。

至 1984 年，又将上述修改后的中 - 活载的重量单位由 tf(吨力)改为 kN，按 $1 \text{ tf} = 10 \text{ kN}$ 折算，数字均增大 10 倍，如图 3-13 所示。实际上， $1 \text{ tf} = 9.81 \text{ kN}$ ，故等于又将活载增加了 1.9%。

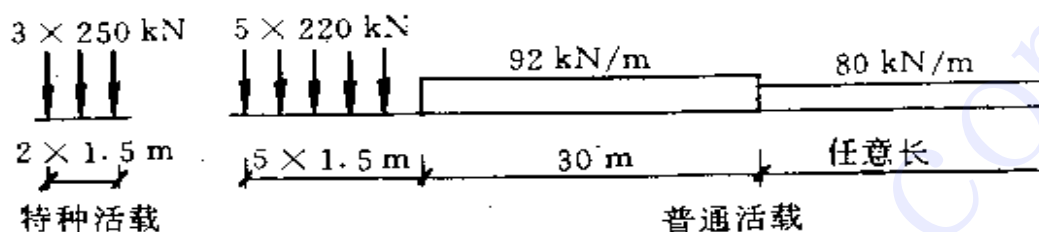


图 3-13

§ 3-4 中 - 活载的换算均布荷载

标准活载的图式制定之后，其换算均布荷载的求得只是一个结构力学的计算问题，这是一件颇为麻烦也是饶有趣味的工作。今将中 - 活载对三角形影响线的换算均布荷载的求法作一简介。

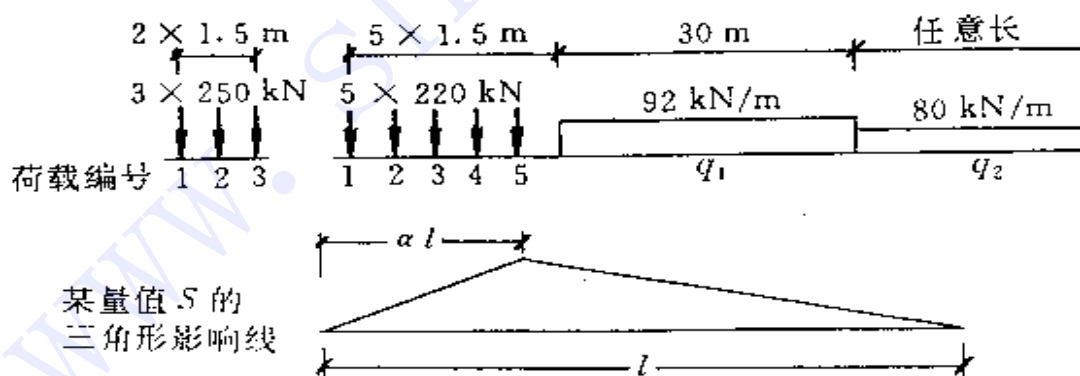


图 3-14

如果对于各种不同长度 l 和顶点位置 α 的三角形影响线(图 3-14)，每给定一组 l 、 α 值，都去单独地求出一个相应的换算均布荷

载 K 值,那工作量就太大了,因为 l, α 的数值理论上说可以有无穷多个。如果我们选择足够多的有限个 l, α 去计算,工作量也相当大,且带有一定的盲目性,最终还不能解决任意 l, α 值下的计算问题。因此,要统筹地解决这一问题,较好的方法是使计算过程解析化、公式化。

为了便于称呼,将中-活载的各荷载编号如图 3-14 所示。对于一切三角形影响线,中-活载所有可能的最不利荷载位置不外表 1 所列 28 种,表中圆圈内数字为每种荷载位置的编号。对于每一种编号的荷载位置,均不难导出其换算均布荷载 K 的计算公式。

表 1 最不利荷载位置编号

在梁上的 全部荷载	位于影响线顶点处的荷载						
	1	2	3	4	5	q_1	q_2
1	①						
1 2	②	②'					
1 2 3	③	③'	③'				
1 2 3 4	④	④'	④'	④'			
1 2 3 4 5	⑤	⑤'	⑤'	⑤'	⑤'		
1 2 3 4 5 q_1	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	
1 2 3 4 5 q_1 q_2	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦

例如,对于 ③ 号荷载(图 3-15a),此时显然应取特种活载,为简便,可设 S 影响线顶点处纵坐标为 1,因而影响面积 $\omega = \frac{l}{2}$,于是可求得换算荷载为

$$K_s = \frac{S}{\omega} = \frac{2}{l} \left[3 \times 250 \times \left(1 - \frac{\alpha}{l} \right) \frac{1.5}{(1 - \alpha)l} \right]$$

$$= \frac{1500}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{2250}{(1 - \alpha)}$$

显然,将上式中的 $(1 - \alpha)$ 换为 α ,即得到 ③' 号荷载(图 3-15b)的换算荷载公式:

$$K_{\omega} = \frac{1500}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{2250}{a}$$

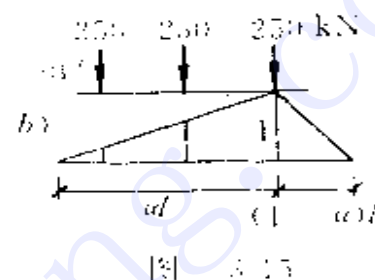
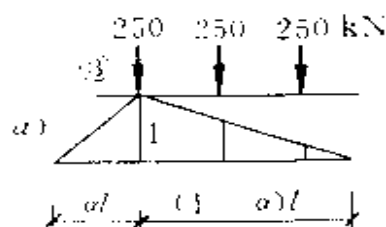
又如，对于②号荷载(图 3-16)，此时应先由下式求出 x 值：

$$5 \times \frac{220}{al} + 92 \times 30 \frac{al - x}{al} - 80x = 80$$

得 $x = al - \frac{386}{8}$

然后可求得

$$\begin{aligned} K_{\omega} &= \frac{S}{\omega} \\ &= \left[\frac{2}{l} \left[1100 \frac{al - x}{al} - 34.5 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 92 \times 30 \frac{al - x}{al} - 15 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 80x - \frac{al}{2} \frac{x}{al} + 80 \left(\frac{1-a}{2} l \right) \right] \right. \\ &= \frac{2}{l} \left[1100 - \frac{al - al + \frac{386}{8}}{al} - \frac{34.5}{al} \right. \\ &\quad \left. + 2760 - \frac{al - al + \frac{386}{8} - 15}{al} \right. \\ &\quad \left. + 80 \left(al - \frac{386}{8} \right) - \frac{al - \frac{al}{2} + \frac{193}{8}}{al} - 40(1-a)l \right] \\ &= \frac{2}{l} \left[\frac{121000}{8al} - \frac{734160}{8al} + 40al \right. \\ &\quad \left. + 1930 - 1930 - \frac{744980}{8al} + 40l - 40al \right] \\ &= 8 - \frac{27545}{al^2} \end{aligned}$$



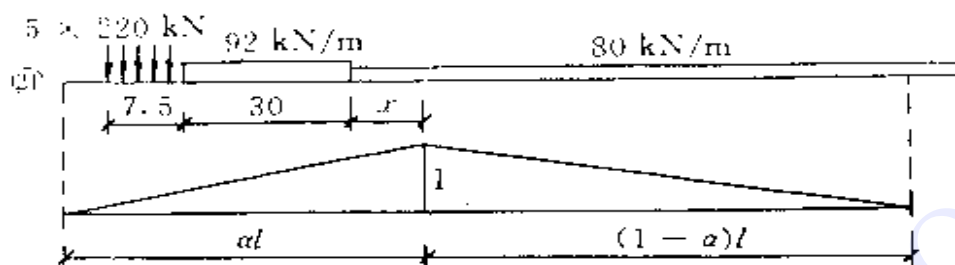


图 3-16

同理，可推导出其他各号最不利荷载位置时的换算荷载计算公式，今汇写如下：

$$\textcircled{1} \quad K = \frac{500}{l}$$

$$\textcircled{2} \quad K = \frac{1000}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{750}{1-\alpha}$$

$$\textcircled{2}' \quad K = \frac{1000}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{750}{\alpha}$$

$$\textcircled{3} \quad K = \frac{1500}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{2250}{1-\alpha}$$

$$\textcircled{3}' \quad K = \frac{1500}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{2250}{\alpha}$$

$$\textcircled{4} \quad K = \frac{1500}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{750}{\alpha(1-\alpha)}$$

$$\textcircled{5} \quad K = \frac{1760}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{660 + 1320\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$

$$\textcircled{5}' \quad K = \frac{1760}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{1980 + 1320\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$

$$\textcircled{6} \quad K = \frac{2200}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{6600}{1-\alpha}$$

$$\textcircled{6}' \quad K = \frac{2200}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{6600}{\alpha}$$

$$\textcircled{7} \quad K = \frac{2200}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{660 + 3300\alpha}{\alpha(1-\alpha)}$$

$$\textcircled{7} \quad K = \frac{2200}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{3960 - 3300\alpha}{\alpha(1 - \alpha)}$$

$$\textcircled{8} \quad K = \frac{2200}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{1980}{\alpha(1 - \alpha)}$$

$$\textcircled{9} \quad K = 92(1 - \alpha) + \frac{820}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{1425}{1 - \alpha}$$

$$\textcircled{10} \quad K = 92(1 - \alpha) + \frac{1096}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{12 - 660/\alpha}{1 - \alpha}$$

$$\textcircled{11} \quad K = 92(1 - \alpha) + \frac{1372}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{1863 - 1980/\alpha}{1 - \alpha}$$

$$\textcircled{12} \quad K = 92(1 - \alpha) + \frac{1648}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{4128 - 3960/\alpha}{1 - \alpha}$$

$$\textcircled{13} \quad K = 92(1 - \alpha) + \frac{1924}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{6807 - 6600/\alpha}{1 - \alpha}$$

$$\textcircled{14} \quad K = 80(1 - \alpha) + \frac{1720}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{18300}{1 - \alpha}$$

$$\textcircled{15} \quad K = 80(1 - \alpha) + \frac{1960}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{15540 + 660/\alpha}{1 - \alpha}$$

$$\textcircled{16} \quad K = 80(1 - \alpha) + \frac{2200}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{12420 + 1980/\alpha}{1 - \alpha}$$

$$\textcircled{17} \quad K = 80(1 - \alpha) + \frac{2440}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{8940 + 3960/\alpha}{1 - \alpha}$$

$$\textcircled{18} \quad K = 80(1 - \alpha) + \frac{2680}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{5100 + 6600/\alpha}{1 - \alpha}$$

$$\textcircled{19} \quad K = 92 + \frac{3252}{\alpha l^2}$$

$$\textcircled{20} \quad K = \frac{1}{1.15} \alpha \left[92(1 - \alpha) + \frac{1158}{l} + \frac{1}{l^2} \left(27545 - \frac{3740}{\alpha} \right) \right]$$

$$\textcircled{21} \quad K = 8 + \frac{27545}{\alpha l^2}$$

这便是铁路“桥规”附 8 中所列出之 26 个公式(见文[10],但现在改为国际单位,故上述公式中数字已增大 10 倍)。此外,还有两个公式:

$$\textcircled{22} \quad K = \frac{1760}{l} + \frac{1}{l^2} \frac{3960}{1 - \alpha}$$

$$\textcircled{23} \quad K = \frac{1760}{l} - \frac{1}{l^2} - \frac{3960}{\alpha}$$

此两式在实际应用中不会出现,但在分析过程中要用到。

以上共有 28 个公式。然而对于任何给定之一组 l 、 α 值,真正的最不利荷载位置一般只有一种,即除此种外,其他编号的荷载位置或者不可能出现,或者虽可能出现但其换算荷载值小于(特殊情况下可等于)上述最不利荷载位置时的换算荷载值。那末,对于任一组给定的 l 、 α 值,究竟应该采用哪一个公式来计算 K 值呢?这就是如何确定每个公式的适用范围问题。要表示每个公式的适用范围,最直观而方便的办法是用图形表示,即将 l - α 图划分为若干个区域,每个区域即代表一个公式的适用范围。应用时只需看所给定之 l 、 α 值的点落在何区内,即采用该区之公式计算 K 值。于是,现在的问题在于如何确定各区的分界线。

为了确定各区之分界线,可首先判断各编号荷载位置可能出现的条件,而在某同一条件内数种荷载位置均可能出现时,再比较它们 K 值的大小来进一步确定分界线。

为了便于分析,我们把 28 种荷载位置按“落于顶点之荷载”不同分为 7 组:轮 1 落于顶点者为第 1 组,轮 2 落于顶点者为第 2 组,…… q_2 落于顶点者为第 7 组。下面先来确定每一组中各号荷载的分界线。

第 1 组的各号荷载位置示于图 3-17 中。根据各轮的排列及轮距数值,不难判断,只有当 $(1-\alpha)l$ 在某一范围内时某号荷载才有出现的可能。例如只有当 $(1-\alpha)l = 0 \sim 1.5 \text{ m}$ 时才可能出现 ① 号荷载,而只有 $(1-\alpha)l = 1.5 \sim 3 \text{ m}$ 才能出现 ② 号荷载。于是可知, $(1-\alpha)l = 1.5 \text{ m}$ 便是 ①、② 号荷载的分界线。其余各号荷载可能出现的 $(1-\alpha)l$ 的范围均注于图中。这些最小、最大的 $(1-\alpha)l$ 值称为各号荷载出现之“极限距离”。

特别指出,当 $(1-\alpha)l > 4.5 \text{ m}$ 后,既可相继出现 ②、⑥ 等号

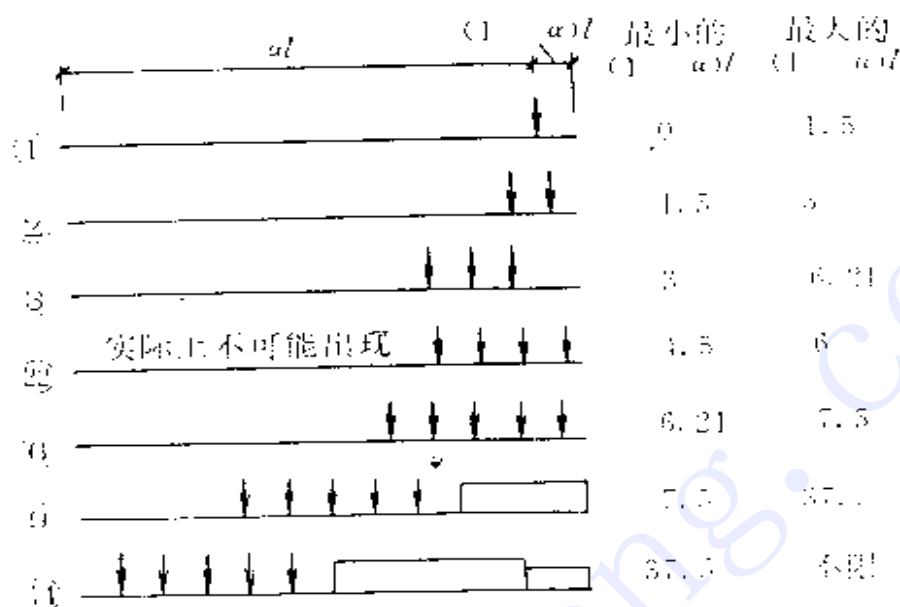


图 3-17

荷载，又仍可继续出现 ③ 号荷载（因为特种荷载只有三个轮子），故应将 ③ 号荷载与后继各号荷载进行比较，看何时何者产生之 K 值更大，即可判断何时应出现何者，从而确定其分界线。现将 ③ 号与 ② 号比较，令

$$K_{11} = K_{22}$$

$$\text{有} \quad \frac{1500}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{2250}{(1-\alpha)} = \frac{1760}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{3960}{(1-\alpha)}$$

$$\text{得} \quad (1-\alpha)l = \frac{171}{26} = 6.58 \text{ m}$$

由此可知，当 $(1-\alpha)l < 6.58 \text{ m}$ 时，③ 号之 K 值较大（因为 $(1-\alpha)l$ 短时显然特种活载产生之量值更大）；只有当 $(1-\alpha)l > 6.58 \text{ m}$ 时 ② 号之 K 值才比 ③ 号的大（即 $(1-\alpha)l$ 长时，轮子多的产生的量值更大）。但是，早在 $(1-\alpha)l > 6 \text{ m}$ 时，② 号荷载就不可能出现了！因此，可以得出结论：实际上 ② 号荷载永远不会作为真正的最不利位置出现，从而完全可以将它删去。并同理可推知，②' 号荷

载在其可能出现的范围内其 K 值恒小于 ③' 号的 K 值,实际上同样不可能作为真正的最不利位置出现,故同样可以删去。这样,就只剩下 26 种最不利荷载位置,亦即只有 26 个 K 值计算公式了。

下面继续将 ③ 号与 ⑥ 号进行比较。令

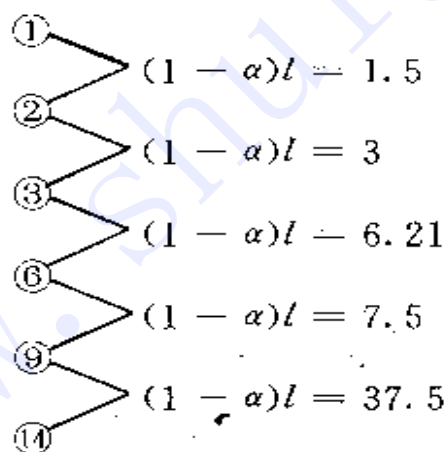
$$K_3 - K_6$$

有
$$\frac{1500}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{2250}{(1-\alpha)} = \frac{2200}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{6600}{(1-\alpha)}$$

得
$$(1-\alpha)l = \frac{87}{14} = 6.21 \text{ m}$$

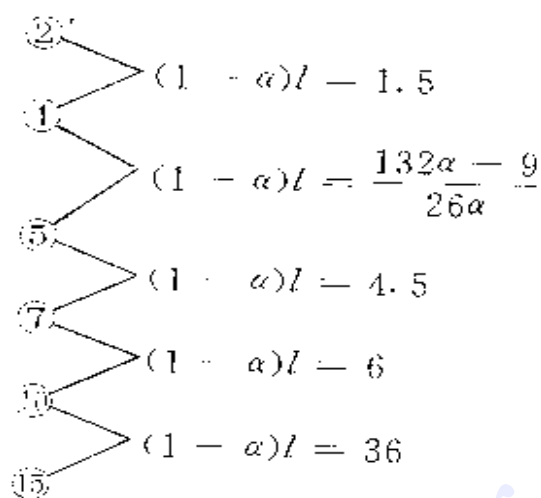
这表明 ③、⑥ 号荷载之分界线为 $(1-\alpha)l = 6.21 \text{ m}$,亦即当 $(1-\alpha)l < 6.21 \text{ m}$ 时 ③ 号之 K 值大,出现 ③;当 $(1-\alpha)l > 6.21 \text{ m}$ 时 ⑥ 号之 K 值大,出现 ⑥。而当 $(1-\alpha)l > 7.5 \text{ m}$ 时,出现 ⑨,此时 ⑨ 的 K 值显然比 ⑥ 的大,因而更比 ③ 的大了,故再无必要将 ③ 与 ⑨ 比较。同理,更毋须将 ③ 与 ⑭ 比较了。

这样,我们就确定了第 1 组的各号荷载出现的 $(1-\alpha)l$ 值的范围及它们之间的分界条件,这可表为:

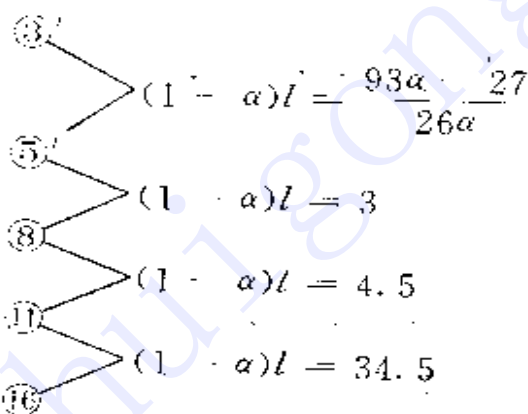


在 $l-\alpha$ 图中,将以上五式绘成曲线(它们都是双曲线),就是上述 6 种荷载位置的分界线,它们已将 $l-\alpha$ 图分为 6 个区,在每区中,第 1 组的 6 种荷载只能出现一种。至此,我们已完成了第 1 组中各号荷载之间的分区工作。

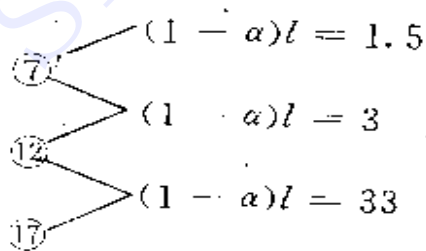
按同样的方法,可确定第 2 组各号荷载间的分界线为



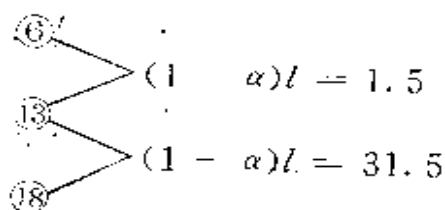
第 3 组的为



第 4 组的为



第 5 组的为



第 6 组的两种荷载位置出现的 $(1 - \alpha)l$ 范围分别是

- ⑱ $(1 - \alpha)l = 0 \sim 30$
- ⑳ $(1 - \alpha)l = 0 \sim \text{不限}$

可见，在 $(1 - \alpha)l = 0 \sim 30$ m 间，两种荷载均可能出现，故此时应由 $K_{19} = K_{20}$ 的条件来确定其分界线，可得

$$l = 41.96$$

这便是 ⑱、⑳ 号荷载的分界线。

第 7 组只有一种荷载位置即 ㉑ 号，故不存在分区问题，其出现的范围是

- ㉑ $(1 - \alpha)l = 0 \sim \text{不限}$

至此，我们已完成了每组中各号荷载位置之间的分区工作，这一成果可用图 3-18 表示。

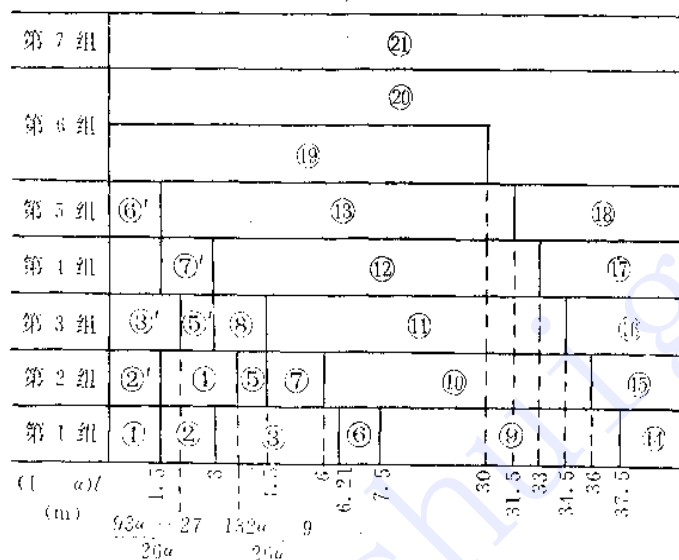


图 3-18

对于某一给定的 $(1 - \alpha)l$ 值，每组中只能出现一种荷载，但各

组中均有一种荷载出现，因此，进一步还要在组与组间进行比较，确定其分界线，才能最后解决全部分区问题。

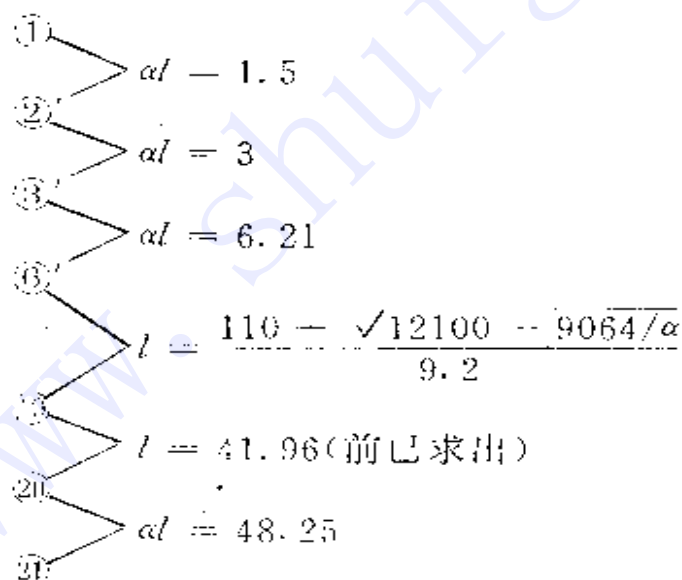
为清晰起见，组与组间的比较可按 $(1 - \alpha)l$ 值的范围分段进行。

首先来比较 $(1 - \alpha)l = 0 \sim 1.5$ m这一范围内的各组荷载。由图 3-18 可见，此时①②'③'⑥'⑩⑪⑫各号荷载皆可能出现，和前面一样，应按 K 值相等的条件来确定它们的分界线。例如，相邻的第 1 组和第 2 组的荷载分别为①和②'号，令 $K_1 = K_2$ ，有

$$\frac{500}{l} = \frac{1000}{l} - \frac{1}{l^2} \frac{750}{\alpha}$$

得 $al = 1.5$

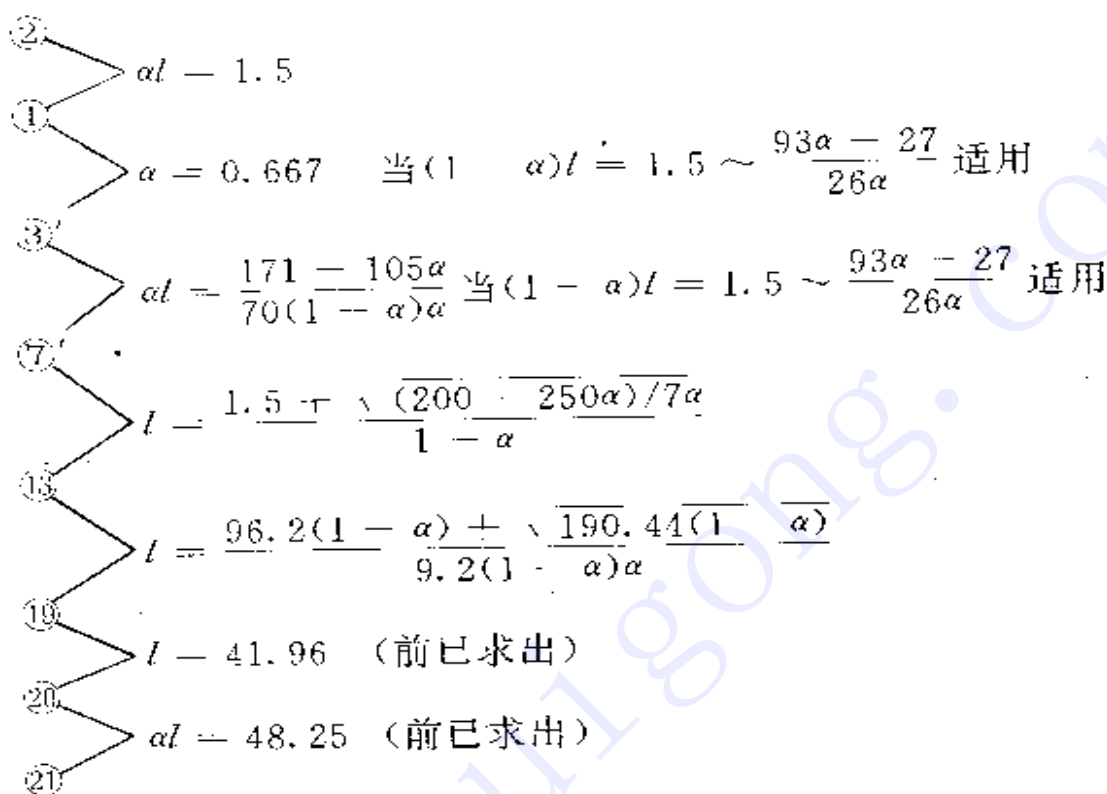
此方程代表的曲线即为①、②'号荷载的分界线。并可知，当 $al < 1.5$ m 时出现①（此时 al 段上只能摆放一个轮子）； $al > 1.5$ m 时则出现②'（此时 al 段上可摆放两个轮子）。仿此作法，可求得其余各相邻组的荷载之间的分界线。兹将结果汇写如下：



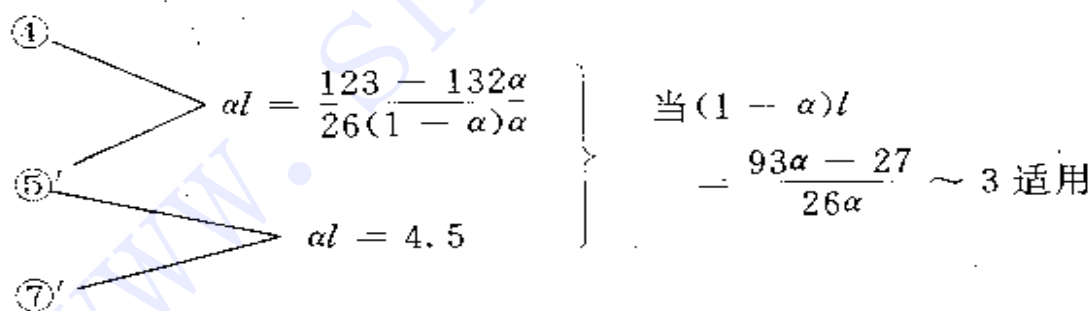
于是，可将以上各式在 $l-\alpha$ 图中绘成曲线，详见文[10]附 8 图 1 及图 2。本书图 3-19 示出其一部分。由图可见，在 $(1 - \alpha)l = 0 \sim 1.5$ m 范围内，以上各分界线均无相互交叉现象，故知在不相邻的各组

之间就毋须再行比较。

当 $(1 - \alpha)l = 1.5 \sim 3$ m 范围时，同样可求得：



同时还有：



绘出以上各曲线后，将发现在 $(1 - \alpha)l = 1.5 \sim 3$ 的范围内，③'、⑦' 之分界线与 ⑦'、⑬ 之分界线交叉（详见图 3-20），于是 ③' 与 ⑬ 重复了一小块范围，这样就使得 ③' 与 ⑬ 两区接触而应确定其分界线。由 $K_3 - K_{13}$ ，自可得到它们分界线的方程。不过，此段

线由于极短，因而可以直线联结之。顺便指出，文[10]之附8图1在此处联线有误，应参照图3-20改正之。

依照类似的方法，可继续进行 $(1-\alpha)l$ 在其余范围时各组之间的比较，便可最后完成整个 $l-\alpha$ 图的分区工作，兹不一一赘述。这样，就确定了26个公式的适用范围。

选定一系列足够数量的 l 和 α 值，分别按照每一组 l 、 α 值所适合的公式算出 K 值，便可编制出换算荷载表。

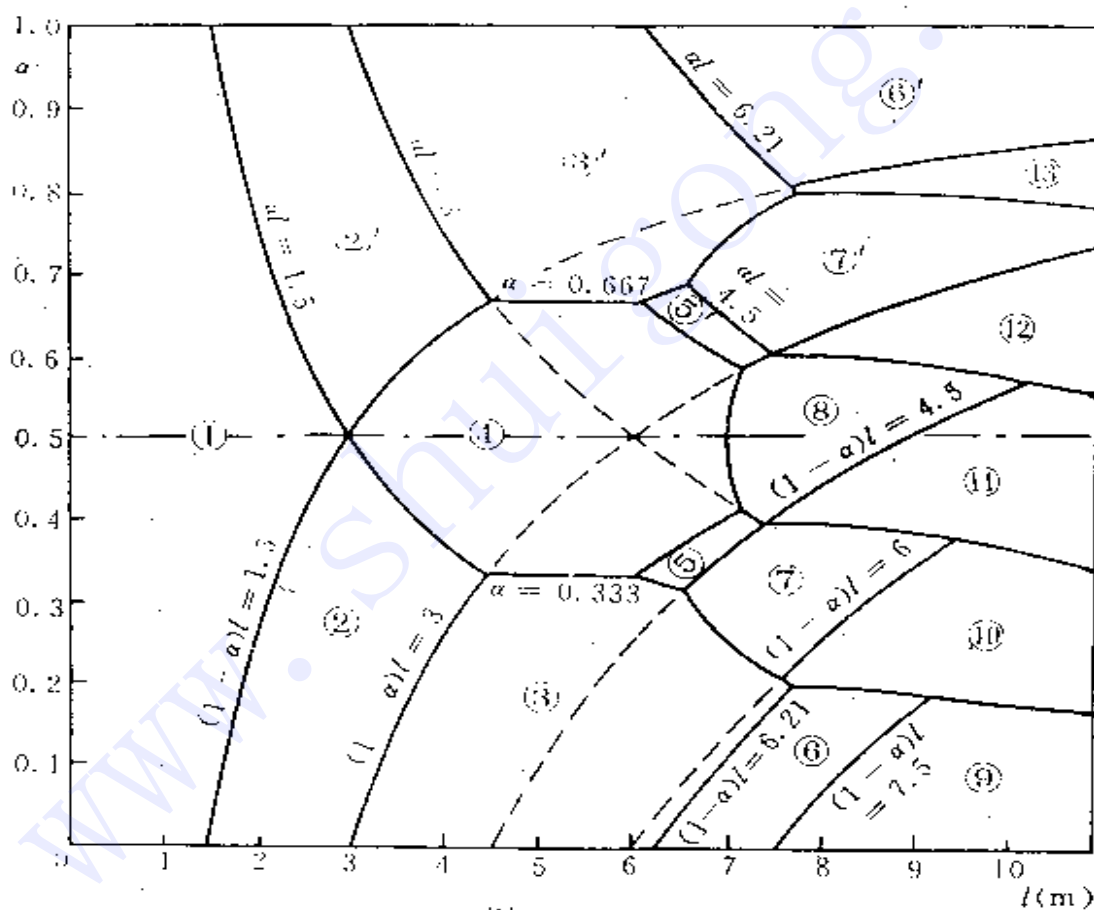


图 3-19

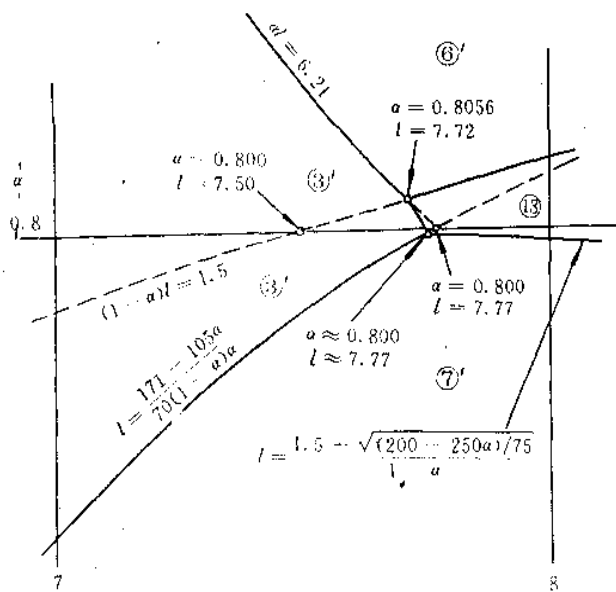


图 3-20

§ 3-5 绝对最大弯矩猜想

如所周知,简支梁的绝对最大弯矩通常比跨中截面的最大弯矩大不了多少,且有时就以后者近似地代替前者。那末,前者比后者最多可能大多少呢?显然,如能知道这个上限值,无论在理论上或实际设计中均有一定参考价值。

这里先提出一个答案:简支梁在同向移动荷载(即大小、间距不变但可整体移动的一系列平行同向荷载,包括集中荷载和分布荷载,但不得有力偶荷载)作用下,绝对最大弯矩 M_{max} 比跨中截面最大弯矩 M_c 最多可能大 12.5%,即

$$M_{\max} \leq \frac{9}{8} M_C \quad (1)$$

上述答案虽未发现反例，但只是在经验性结论的基础上推理而得，缺乏严格数学证明，因此还只能算是“猜想”。推理过程如下：

简支梁在一系列移动集中荷载作用下，绝对最大弯矩将发生在某集中力与梁上荷载合力对称于梁中点时该集中力作用处的截面上。计算经验表明，此集中力通常就是使跨中截面产生最大弯矩的临界力，而且它通常是靠近合力的。显然，若此集中力恰与梁上荷载合力的位置重合，则绝对最大弯矩就等于跨中最大弯矩。因此，可以设想，此集中力与合力相隔愈远，绝对最大弯矩与跨中最大弯矩的差值可能愈大。而相隔最远的情况莫过于梁上只有两个相等的集中力作用的情况了，因此我们只需研究这种极端情况。

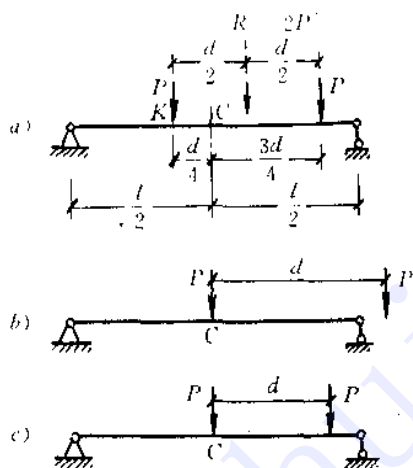


图 3-21

如图 3-21a 所示，设梁上有两个相等的荷载 P ，间距为 d ，梁的跨度为 l ，将二力之一与合力对称于梁中点 C ，则该力所在截面 K 可能产生绝对最大弯矩，其值为

$$M_K = \frac{2P}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{d}{4} \right)^2 = \frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{d}{2l} \right)^2 \quad (d \leq \frac{2}{3}l) \quad (2)$$

注意，这种荷载布置只有当 $\frac{3d}{4} \leq \frac{l}{2}$ (见图 3-21a) 时亦即当 $d \leq \frac{2}{3}l$ 时才可能实现。

至于跨中截面最大弯矩，需分两种情况考虑：当梁上只有一个荷载时(图 3-21b)为

$$M_{C1} = \frac{Pl}{4} \quad (d \geq \frac{l}{2}) \quad (3)$$

当梁上有两个荷载时(图 3-21c)为

$$M_{C2} = P \left(\frac{l}{4} + \frac{l}{4} \frac{\frac{l}{2} - d}{\frac{l}{2}} \right) = \frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{d}{l} \right) \quad (d \leq \frac{l}{2}) \quad (4)$$

为了便于分析，现将式(2)、(3)、(4)绘成图线如图 3-22 所示。若令 $M_K = M_{C1}$ ，有

$$\frac{2P}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{d}{4} \right)^2 = \frac{Pl}{4}$$

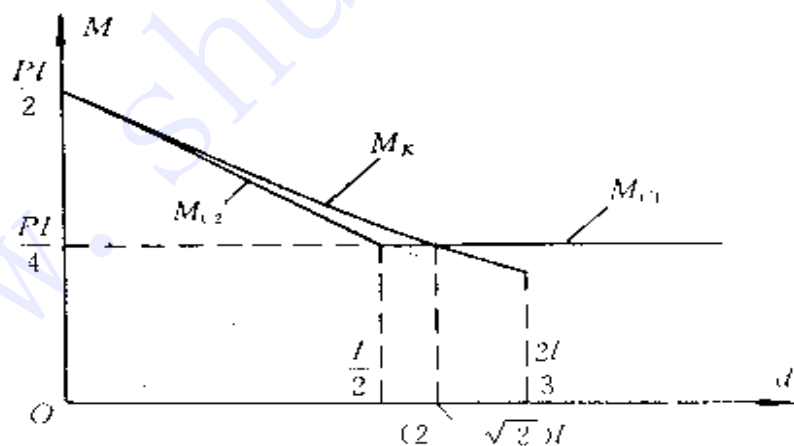


图 3-22

可解出 $d = (2\sqrt{2}/3)l$ (5)

可见，梁的绝对最大弯矩为

$$\text{当 } d \leq (2 - \sqrt{2})l, \quad M_{\max} = M_K = \frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{d}{2l}\right)^2 \quad (6)$$

$$\text{当 } d \geq (2 - \sqrt{2})l, \quad M_{\max} = M_{C1} = \frac{Pl}{4}$$

又可见,当

$$d = \frac{l}{2} \quad (7)$$

时,绝对最大弯矩与跨中最大弯矩相差最大,前者为

$$M_{\max} = M_K = \frac{Pl}{2} \left(1 - \frac{l/2}{2l}\right)^2 = \frac{9}{32}Pl \quad (8)$$

后者为 $M_C = M_{C1} = M_{C2} = \frac{Pl}{4} \quad (9)$

此时有 $M_{\max} = \frac{9}{8}M_C \quad (10)$

于是有前面的式(1)。

至于有分布荷载的情况,由于分布荷载可以看成是许多微小的集中荷载,故上面的讨论并不失一般性。

第四章 结构位移计算

§ 4.1 怎样勾绘变形曲线

要比较正确地勾绘结构的变形曲线，一般说应先绘出弯矩图（或勾出 M 图的形状）。根据 M 图可确定每根杆的变形曲线形状，再根据足够的杆端位移条件（包括支承条件和结点处位移连续条件）便可确定每根杆变形曲线的位置，从而绘出结构的变形曲线。具体说，应注意以下几点：

- 1) M 图的受拉边是变形曲线的凸出边。
- 2) 受拉边变换处，变形曲线有反弯点（拐点）。
- 3) 等截面杆， M 与曲率成正比（通常不必精确表现此点）。
- 4) M 为零的直杆，仍保持直线。
- 5) 各支座处的已知位移条件。
- 6) 结点处各杆端线位移相等，刚结点处各杆端夹角保持不变。
- 7) 已求出的某些截面的位移或转角，或可直观判断的某些位移或转角的方向。
- 8) 受弯杆件轴向变形忽略不计，即其长度保持不变。
- 9) 位移是微小的（虽然画得很夸张），因而圆弧可用切线代替等等。
- 10) 如果有温度变化，还应叠加上温度变化产生的变形。

图 4-1 示出一简单的例子。

图 4.2a 所示伸臂梁，除绘出其 M 图（图 b）外，还需求出截面 B 的转角，而当 φ_B 为反时针时还需再求出 C 点的挠度，才能较准确

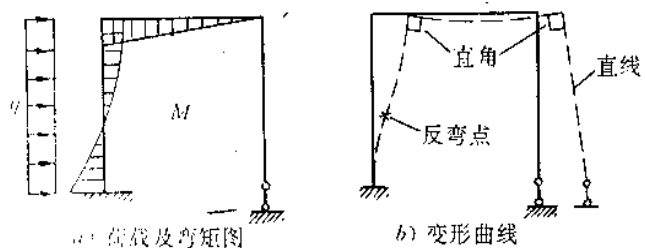


图 4-1

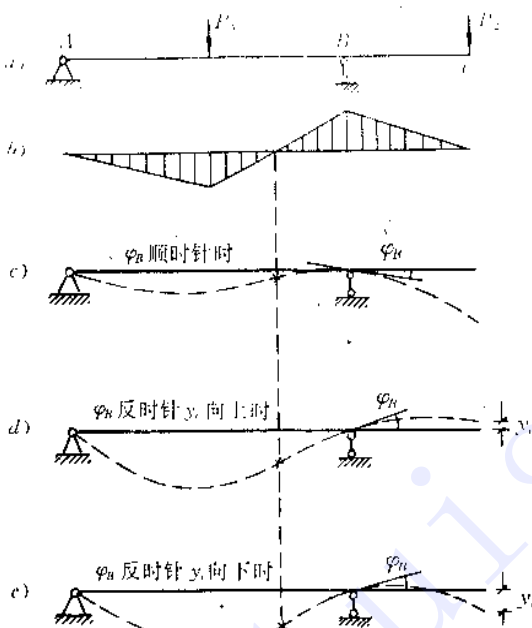


图 4-2

地勾出变形曲线(图 c、d、e)。

图 4-3 为一稍难的例子，在绘出结构的 M 图后，可首先绘出下

面两根杆的变形曲线。然后由图乘法可看出 B 点的竖直位移是向下的而水平位移是向右的(这不必具体计算,只需勾出或仅仅想到虚拟状态的弯矩图形状即可判断);再由受弯直杆长度不变可推定 A 、 C 点的位置,从而可绘出变形曲线。

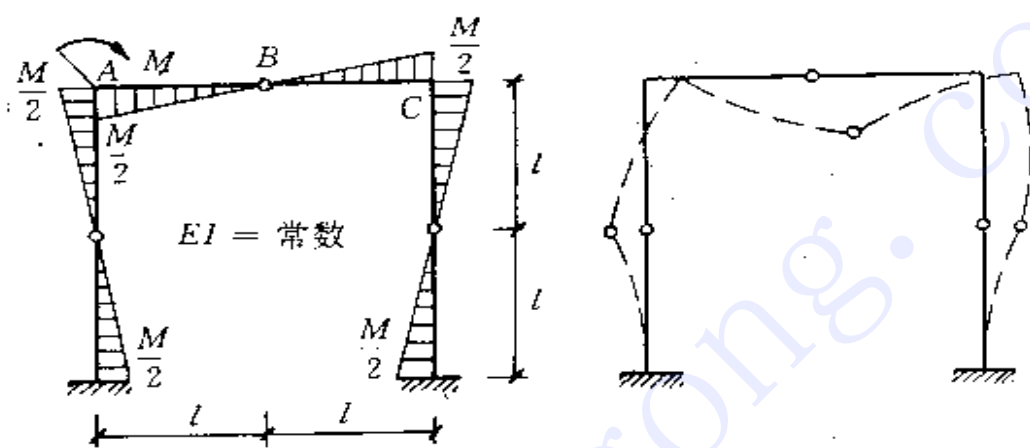


图 4-3

如果结构还发生了支座位移,则只需注意在支座处变形曲线应符合给定的位移条件即可。至于结构还发生温度变化时,则各杆的变形曲线应为弹性变形曲线与温度变化产生的变形曲线的叠加,具体绘制较为麻烦,亦较少用到,故举例从略。

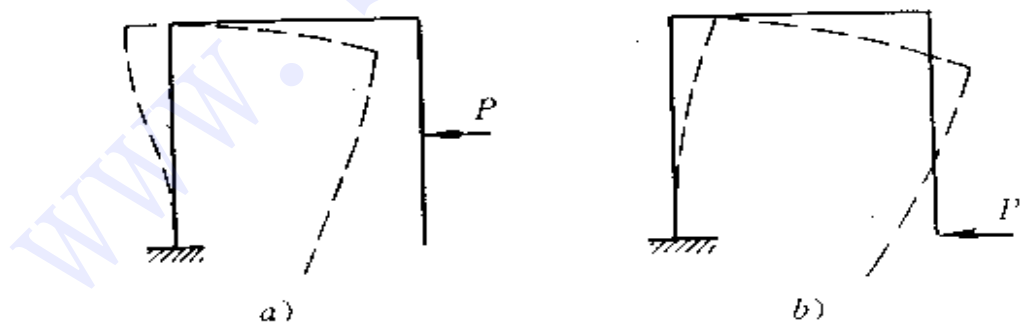


图 4-4

有时,我们还常需要在求出结构的弯矩图之前就勾绘一下变形曲线,这当然不要求很准确,但形状应大致合理。此时宜事先稍

加分析，判断变形曲线的方向和大体轮廓。如感到困难，可草绘 M 图大体形状，借以判断变形曲线的可能位置。如若不然，只凭想当然随手一勾，则往往出现大的毛病，这是应予避免的。

例如图 4-4a 所示刚架，荷载 P 向左，左柱是向左偏移的。若将 P 移到下面，仍然向左(图 4b)，此时左柱却是向右偏移的。如不留心，则会把大方向画错。又如图 4-5a 所示对称刚架承受水平荷载 P ，显然刚架是向右偏移的，其变形曲线为反对称，此乃大家熟知。但若仿此来画图 b 的变形曲线就错了，图 b 虽然也是反对称，但刚架应是向左偏移的(这稍加分析即可得知)。然而若又仿图 b 来画图 c 的变形曲线，那又错了！在图 c 情况下，刚架却又是向右偏移的。

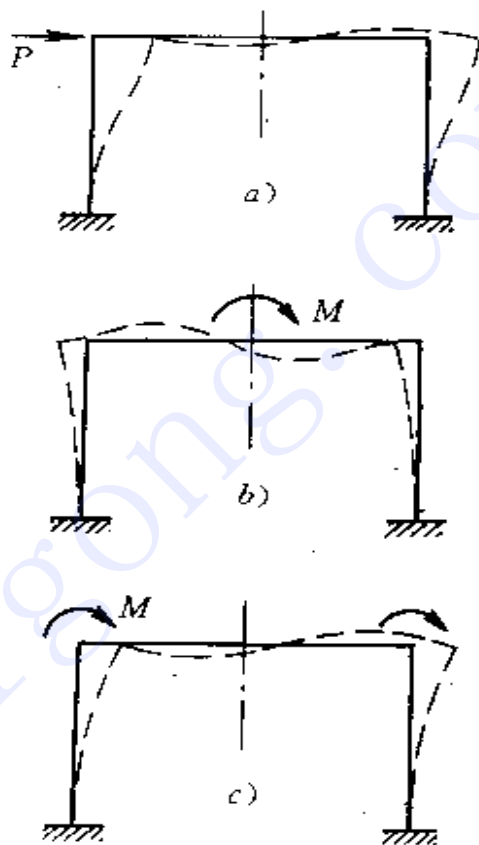


图 4-5

图 4-6a、b 示出两例变形曲线，可以说是常见的错误，它们有何毛病？读者自可分析纠正。

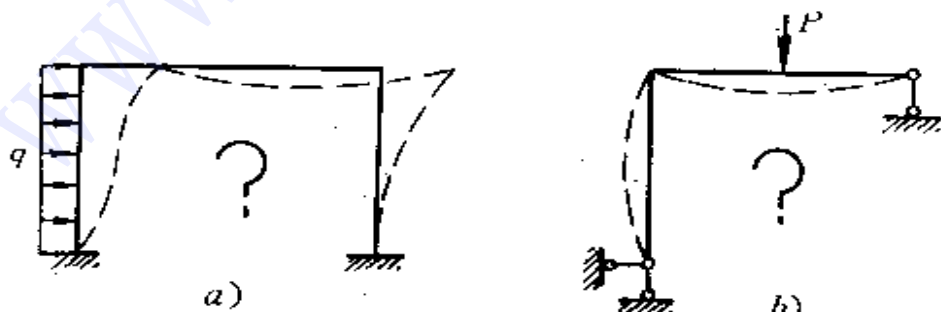


图 4-6

图 4-7a、b 两例，读者可试行不经具体计算（或心算）而勾出其变形曲线，以兹练习。

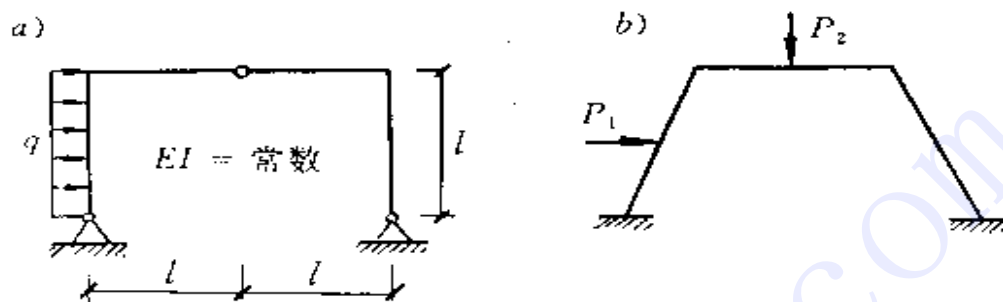


图 4-7

§ 4-2 圆形截面剪应力不均匀系数

在杆系结构的位移计算公式（以及应变能计算公式）中，剪力之功一项乘有系数 k 。这是由于剪应力在横截面上分布不均匀而在计算其相当的平均剪切角时引用的改正系数。

对于圆形截面，以往不少教材如[4]、[5]、[8]、[9]、…等，给出 $k = \frac{32}{27}$ ，有误，应为 $\frac{10}{9}$ ，推导如下。

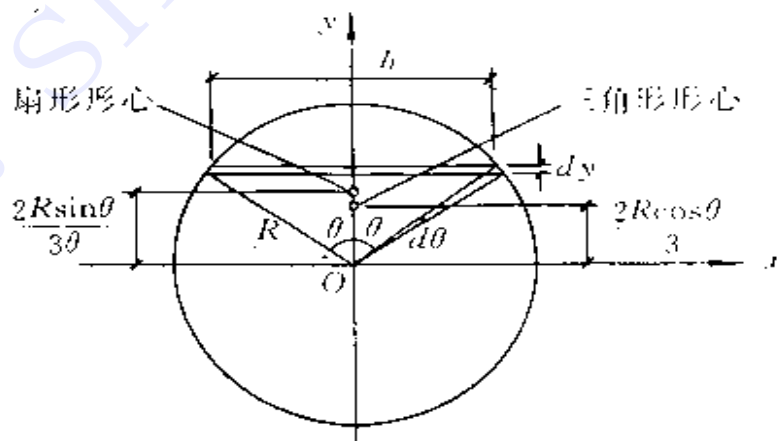


图 4-8

k 值计算公式为

$$k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA$$

式中各符号意义已周知，不赘述。今取 $dA = bdy$ (图 4-8) 有，

$$\frac{dA}{b^2} = \frac{bdy}{b^2} = \frac{dy}{b} = \frac{Rd\theta \sin\theta}{2R\sin\theta} = \frac{d\theta}{2}$$

计算 S 时，用扇形面积对 x 轴之静矩减去三角形面积对 x 轴之静矩，得

$$\begin{aligned} S &= R^2\theta - \frac{2R\sin\theta}{3\theta} = R^2\sin\theta\cos\theta - \frac{2R\cos\theta}{3} \\ &= \frac{2R^3}{3}\sin\theta(1 - \cos^2\theta) = \frac{2R^3}{3}\sin^3\theta \end{aligned}$$

将以上 $\frac{dA}{b^2}$ 及 S 代入 k 值公式，有

$$\begin{aligned} k &= \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2 dA}{b^2} = \frac{\pi R^2}{(\frac{\pi R^4}{4})^2} \int_0^\pi \frac{4R^6}{9} \sin^6\theta \frac{d\theta}{2} \\ &= \frac{32}{9\pi} \int_0^\pi \sin^6\theta d\theta = \frac{64}{9\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta d\theta \end{aligned}$$

根据定积分公式(见文[20]: 188)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \quad (n \text{ 为偶数})$$

令 $n = 6$ ，故可求得

$$k = \frac{64}{9\pi} \left(\frac{5}{6} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{10}{9}$$

推导毕。

不过，应予指出，对于圆形截面杆，弯曲剪应力采用公式

$$\tau = \frac{QS}{Ib}$$

来计算，本来就是近似的，故由此而导出的 k 值计算公式对圆形截面来说本身就不准确，因此，这里求出的 $\frac{10}{9}$ 也并无什么准确意义。

§ 4-3 工字形截面剪应力不均匀系数 公式合理性的讨论

位移公式中剪为虚功一项所乘的剪应力分布不均匀系数 k ，对于工字形截面，一般教材都是给出

$$k = \frac{A}{A_f} \quad (1)$$

式中 A 为工字形截面面积， A_f 为腹板截面面积。显然，这是由于考虑到腹板承担了几乎全部竖向剪力 Q 而且其剪应力 τ_f (图 4-9) 接近于均匀分布的缘故。然而，翼缘部分虽然几乎不承担竖向剪应力，但却仍存在着相当可观的水平剪应力 τ_e (图 4-9)，计算内力功时理应同样加以考虑，而式(1)显然是忽略了这部分影响。那末，这样做的误差有多大呢？

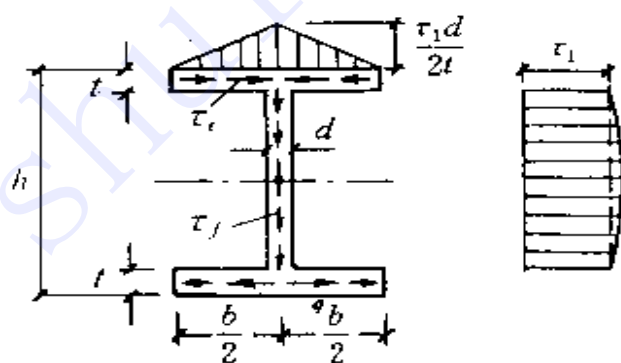


图 4-9

为了考虑翼缘部分的影响，我们不妨把 k 值公式表为如下形式：

$$k = k_f + k_e - k_f \left(1 + \frac{k_e}{k_f} \right) \quad (2)$$

其中 k_f 和 k_e 即分别表示腹板和翼缘部分的影响，而 k_f 即按式(1)

计算,即

$$k_f = \frac{A}{A_f} \quad (1')$$

在杆件的任一微段 ds 上,剪力所作虚功 dW_Q 可通过分布剪应力所作虚功来计算:

$$dW_Q = \int_A \tau \frac{\tau_P ds}{G} dA = \frac{ds}{G} \int_A \tau \tau_P dA$$

式中 τ 、 τ_P 分别为虚拟状态和实际状态的剪应力,它们的分布规律是相同的,故可写为 $\tau_P = \lambda \tau$,这里 λ 为某一比例系数,从而有

$$dW_Q = \frac{\lambda ds}{G} \int_A \tau^2 dA$$

可见, dW_Q 与 $\int_A \tau^2 dA$ 成正比。因此,由功的计算而导出的 k 值自然亦与 $\int_A \tau^2 dA$ 成正比。于是,式(2)中的比值 $\frac{k_i}{k_f}$ 即与翼缘和腹板两部分的 $\int \tau^2 dA$ 之比相等,可以写为

$$\frac{k_i}{k_f} = \frac{\int_{A_i} \tau_i^2 dA}{\int_{A_f} \tau_f^2 dA} \quad (3)$$

这里 A_i 、 A_f 分别为翼缘和腹板部分的面积。

腹板部分剪应力由材料力学公式计算:

$$\tau_f = \frac{QS}{Id}$$

翼缘部分剪应力亦可由同样的公式计算,只不过需将式中之 d 换为 t :

$$\tau_i = \frac{QS}{It}$$

于是可知,若腹板上、下端剪应力为 τ_1 ,则翼缘中间处剪应力为 $\frac{\tau_1 d}{2t}$ (见图 4-9)。翼缘部分剪应力系呈线性变化。设腹板部分剪应力

近似取为均匀分布且大小均为 τ_1 (如虚线所示, 这样处理偏小), 而腹板高度近似取为 h (这样又偏大, 于是正好相宜)。这样, 式(3) 右边分子、分母的积分式皆可由图乘代替, 从而有

$$\frac{k_i}{k_j} = \frac{1 \times \frac{1}{2} \frac{b}{2} \frac{\tau_1 d}{2t} \times \frac{2}{3} \frac{\tau_1 d}{2t} \times t}{h \tau_1^2 d} = \frac{bd}{6ht} \quad (3')$$

于是得到

$$k = \frac{A_i}{A_j} \left[1 + \frac{bd}{6ht} \right] \quad (4)$$

这便是考虑翼缘影响后 k 值的较精确公式。

一般来说, 工字形截面总是 $h > b, t > d$, 故式(4) 中后一项影响不大, 因而式(1) 是可用的。例如, 按式(4) 计算, 有:

$$20a \text{ 工字钢} \quad k = 1.051 A/A_j$$

$$40b \text{ 工字钢} \quad k = 1.045 A/A_j$$

$$63c \text{ 工字钢} \quad k = 1.037 A/A_j$$

而当相对于 b 和 d 来说 b 较大和 t 较小时, 则不宜忽略翼缘影响, 例如

$$20b \text{ 工字钢} \quad k = 1.067 A/A_j$$

又如若 $b = h, t = d$, 有 $k = 1.17 A/A_j$ 。

§ 4-4 曲杆应变能及位移计算的较精确公式

对于直杆, 弯矩、轴力、剪力三者中任何一力均不在其他两个力的方向上引起变形, 故它们做功彼此互不影响而可叠加。对于曲杆, 则弯矩、轴力两者做功将相互影响, 其应变能及位移计算的较精确公式可推证如下。

在曲杆中, 弯矩通常规定以内侧受拉为正, 轴力以拉力为正。图 4-10 为曲杆的微段, 曲率半径为 R 。在单位轴力 $N = 1$ (设为拉力) 作用下, 因正应力在截面上均匀分布, 故所有纤维正应变均相

等，因而微段两端横截面将产生相对转角 $d\theta = -\frac{ds}{EAR}$ (注意，这里负号是因为此时 $d\theta$ 与正弯矩产生之相对转角方向相反)；由位移互等定理可知，在单位弯矩 $\bar{M} = 1$ (内侧受拉) 作用下，微段的轴线处的伸长亦为 $du = -\frac{ds}{EAR}$ 。于是可得曲杆应变能的计算公式为

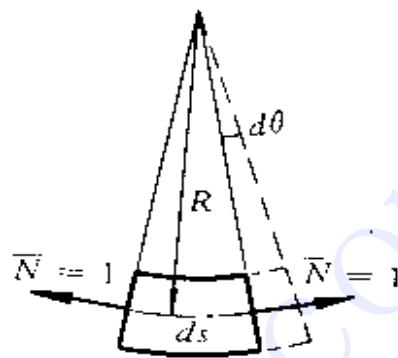


图 4-10

$$\begin{aligned}
 U &= \Sigma \int \frac{M^2 ds}{2EI} - \Sigma \int \frac{MN ds}{2EAR} \\
 &\quad - \Sigma \int \frac{N^2 ds}{2EA} - \Sigma \int \frac{NM ds}{2EAR} + \Sigma \int \frac{kQ^2 ds}{2GA} \\
 &= \Sigma \int \frac{M^2 ds}{2EI} + \Sigma \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \Sigma \int \frac{kQ^2 ds}{2GA} \\
 &\quad - \Sigma \int \frac{MN ds}{EAR} \tag{1}
 \end{aligned}$$

上式右边第 1、2、3 项若仍分别称为弯矩、轴力和剪力的影响，则第 4 项可称为曲率影响。但在上式中，第 1 项 $\Sigma \int \frac{M^2 ds}{2EI}$ 仍为近似沿用直杆的结果，因为在曲杆中弯曲正应力沿截面高度已不呈直线分布，其中性轴位置亦已不通过截面形心而是稍向内侧偏移，不过这在 $R > 4h$ (h 为截面高度) 时其误差是可以忽略的*。

在应用式(1)时须注意两点：一是内力的正负号，若轴力 N 以拉力为正，则弯矩 M 必须是以内侧受拉为正，否则将导致错误。二是应变能 U 虽恒为正，但式(1)右边之第 4 项不一定为正，也可能为负。

由式(1)不难推知，曲杆的位移计算较精确公式为

* 见文[5]293页之注

$$\Delta_{Kr} = \Sigma \int \frac{\bar{M}M_p ds}{EI} + \Sigma \int \frac{\bar{N}N_p ds}{EA} + \Sigma \int \frac{k\bar{Q}Q_p ds}{GA} - \Sigma \int \frac{\bar{M}N_p ds}{EAR} - \Sigma \int \frac{\bar{N}M_p ds}{EAR} \quad (2)$$

式中各符号含义已熟知，不赘述。右边第 1、2、3 项分别为弯矩、轴力和剪力影响，它们与直梁相同；第 4、5 项则为曲率影响。应用式 (2) 时，同样须注意内力正负号的规定，即 N 若以拉力为正， M 必须是以内侧受拉为正。

作为例子，我们来计算图 4-11a 曲杆 B 点的竖直位移。虚拟状态如图 2b 所示。两状态的内力为

$$M_p = -PR\sin\theta, \quad N_p = -P\sin\theta, \quad Q_p = P\cos\theta \\ \bar{M} = -R\sin\theta, \quad \bar{N} = -\sin\theta, \quad \bar{Q} = \cos\theta$$

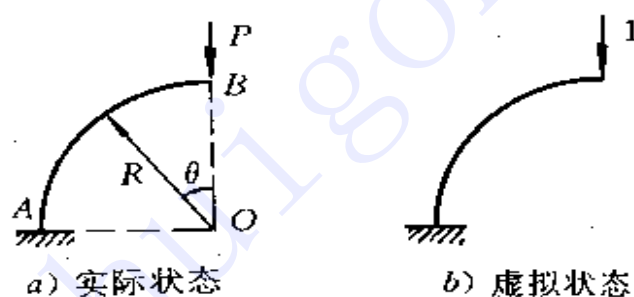


图 4-11

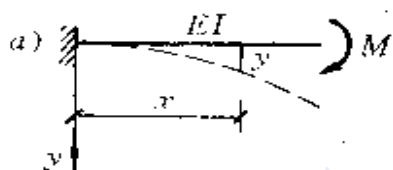
将以上各项以及 $ds = R d\theta$ 代入式 (2) 可得

$$\Delta_{Kv} = \Sigma \int \frac{\bar{M}M_p ds}{EI} + \Sigma \int \frac{\bar{N}N_p ds}{EA} + \Sigma \int \frac{k\bar{Q}Q_p ds}{GA} - \Sigma \int \frac{\bar{M}N_p ds}{EAR} - \Sigma \int \frac{\bar{N}M_p ds}{EAR} \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} PR^3}{EI} \sin^2\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} PR}{EA} \sin^2\theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} kPR}{GA} \cos^2\theta d\theta \\ - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} PR}{EA} \sin^2\theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} PR}{EA} \sin^2\theta d\theta \\ = \frac{\pi PR^3}{4EI} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{kE}{G} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$$

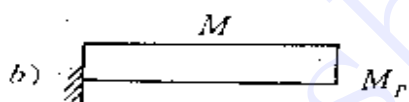
式中 $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$ ，为截面的惯性半径。方括号中第 2、3 项分别为轴力、剪力影响，第 4、5 项为曲率影响，显然，当 $\left(\frac{r}{R}\right)^2$ 很小时，它们都可略去。还可见，曲率影响与轴力、剪力影响属同一数量级，因而略去前者又只计后者是没有什么意义的。应均计入，或均略去。

§ 4-5 用图乘法求纯弯曲梁的挠曲线 为何得不到圆弧

图 4-12a 所示等截面直梁受纯弯曲作用，其挠曲线的曲率为常数：



$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{y'}{(\sqrt{1+y'^2})^3} = \frac{M}{EI} \quad (a)$$



因而挠曲线理应为圆弧；但由图乘法（图 b、c）求挠曲线却得到抛物线：

$$y = \frac{M}{2EI}x^2 \quad (b)$$

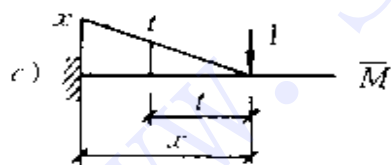


图 4-12

何故？周知，用材料力学中的重积分法求挠曲线，对纯弯曲情况也得到抛物线。那是由于在式 (a) 中将曲率近似地用 y' 代替的缘故。然而，

在由图乘法得来的式 (b) 中，却似乎难于看出近似在何处。

其实，图乘法只不过来源于积分公式：

$$y = \Sigma \int \frac{\bar{M}M_r}{EI} ds = \int_0^x \frac{tM}{EI} dt \quad (c)$$

而上式近似之处就在于用 dt 代替了 ds 。若按

$ds = dt \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ ，则上式本应为

$$y = \int_0^x \frac{xM}{EI} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (d)$$

这便是求挠曲线的精确计算式(当然此时不能再用图乘法了)。现在我们来证明式(d)和式(a)是一致的。

将式(d)两边对 x 求导,可得

$$y' = \frac{xM}{EI} \sqrt{1 + y'^2} \quad (e)$$

移项,得

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{M}{EI} x$$

两边再对 x 求导:

$$\frac{y'' \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} 2y'y''}{1 + y'^2} = \frac{M}{EI}$$

化简,得

$$\frac{y''}{(1 + y'^2) \sqrt{1 + y'^2}} = \frac{M}{EI}$$

这便正是式(a)。

下面根据由式(d)导出的式(e)来求解挠曲线。将式(e)两边

平方有
$$y'^2 = (1 + y'^2) \left[\frac{M}{EI} x \right]^2$$

可写为
$$y'^2 = (1 + y'^2) \left[\frac{x}{R} \right]^2$$

移项
$$y'^2 \left[1 - \left[\frac{x}{R} \right]^2 \right] = \left[\frac{x}{R} \right]^2$$

再移项
$$y'^2 = \frac{1}{1 - \left[\frac{x}{R} \right]^2} \left[\frac{x}{R} \right]^2$$

两边开方
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} \cdot \frac{x}{R}$$

从而
$$y = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} \cdot \frac{x}{R} dx$$

积分得
$$y = R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} + C$$

由边界条件(见图 4-12a)

$$x = 0, \quad y = 0$$

可得 $C = R$

于是 $y = R \sqrt{R^2 - x^2} \quad (f)$

这便正是图 4-13 所示圆上半部分的方程。

最后，我们来考查以抛物线代替圆弧后误差有多大。式(b)的抛物线方程可写为

$$y = \frac{1}{2} \frac{x^2}{R} \quad (b')$$

为了区别，将式(f)的圆弧方程的 y 改用 y' 表示：

$$y' = R \cdot \sqrt{R^2 - x^2} = R \left[1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (f')$$

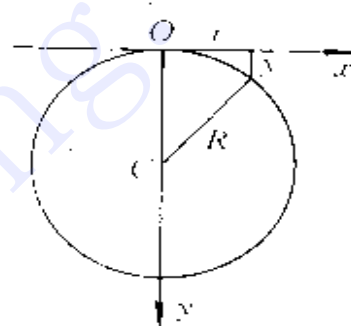


图 4-13

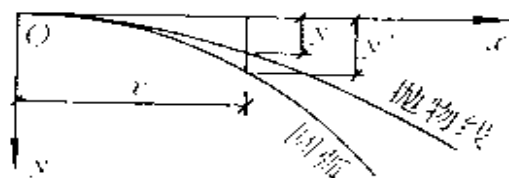


图 4-14

将 y^* 展为级数有

$$y^* = \frac{1}{2} \frac{x^2}{R} + \frac{1}{8} \frac{x^4}{R^3} + \frac{1}{16} \frac{x^6}{R^5} + \frac{5}{128} \frac{x^8}{R^7} + \dots \quad (f'')$$

比较式 (b') 与 (f''), 可知按抛物线求出之 y 值偏小 (图 4-14)。通常由于 $\frac{x}{R}$ 之值很小, 在式 (f'') 中只取前两项已足够精确, 由此可估计 y 与 y^* 之相对误差为

$$\left| \frac{y - y^*}{y} \right| = \frac{\frac{1}{8} \frac{x^4}{R^3}}{\frac{1}{2} \frac{x^2}{R}} = \left(\frac{x}{2R} \right)^2 \quad (g)$$

由于计算 R 不甚方便, 由式 (b') 有 $2R = \frac{x^2}{y}$, 代入式 (g) 有

$$\left| \frac{y - y^*}{y} \right| = \left(\frac{y}{x} \right)^2 \quad (h)$$

例如, 当 $y = \frac{x}{100}$ 时 (这在工程上算是很大的挠度了), 其值只比精确值小 $\frac{1}{100^2}$, 足见误差之小。

§ 4-6 温度变化时互等定理不成立

功的互等定理只适用于线弹性结构, 这本来是很明确的, 但应用时不注意往往会出错。

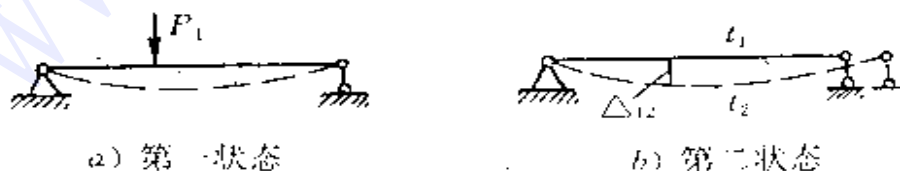


图 4-15

例如图 4-15 所示静定结构, 两个状态中第二状态的外因是温度变化, 我们有

$$T_{12} = P_1 \Delta_{12}$$

而第二状态外力为零,故

$$T_{21} = 0$$

可见 $T_{12} \neq T_{21}$ 。尽管我们可以认为此结构是理想的线弹材料制成的,两个状态都是平衡的,位移也都是微小的和协调的,然而功的互等定理仍不成立。这是为什么呢?原因就在于外力虚功互等定理是根据内力虚功(也称虚应变能或变形虚功)互等推出来的,而要内力虚功互等就必须是两个状态的变形均与各自的内力成正比,亦即符合线弹性条件。但在上例中,只有第一状态符合此条件,因为此状态的外因是荷载,故其变形与内力成正比。而在第二状态中,外因是温度变化,此时内力为零,却有变形,变形与内力不成正比,因而此时不能算是线弹性结构,所以互等定理不适用。

对于超静定结构,当两个状态中有一个状态为温度变化时(图4-16),功的互等定理同样不适用。温度变化时,超静定结构的内力虽不为零,但其变形是与内力成正比的弹性变形和温度变形的叠加,因而总的变形与内力并不成正比,故互等定理不成立。例如图4-16,我们有 $T_{12} = P_1 \Delta_{12}$;第二状态虽有内力和反力,但第一状态并无任何支座位移,故仍有 $T_{21} = 0$,可见 $T_{12} \neq T_{21}$ 。

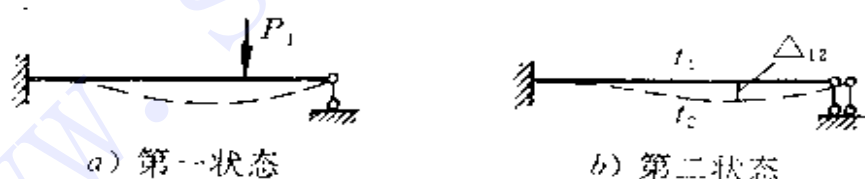


图 4-16

与此类似,在材料收缩、制造误差、徐变、松弛等情况下,互等定理亦不成立。总之,在结构的两个状态中,只要任何一个状态出现与内力不成正比的变形,功的互等定理均不再适用。

当然,在上述各种情形下,虚功原理 $T_{12} = W_{12}$ 和 $T_{21} = W_{21}$ 仍分别成立,因为虚功原理并不受线弹性条件的限制而是对一切变

形体系都普遍适用的。

至于线弹性结构发生支座位移时，则功的互等定理仍适用。对于静定结构，支座位移不引起内力和反力，也不引起变形，虽然有刚体位移，但内力与变形均为零，故仍符合形变与内力成正比的条件。对于超静定结构，支座位移将引起内力，同时产生变形，变形与内力仍成正比，故互等定理可用。实际上，反力互等定理和反力位移互等定理正是将功的互等定理应用于有支座位移的情况而推导出来的。

§ 4-7 难题选解

以下题目选自上海交大，长沙铁道学院，铁道科学研究院等硕士研究生入学考试试题及英国牛津大学试题。有些题目颇带思考性，有一定难度。

例 1 等截面薄板条置于刚性平台上，一端伸出支持面之外（图 4-17a），薄板条将由于自重而产生弹性变形，试求平台上弯曲

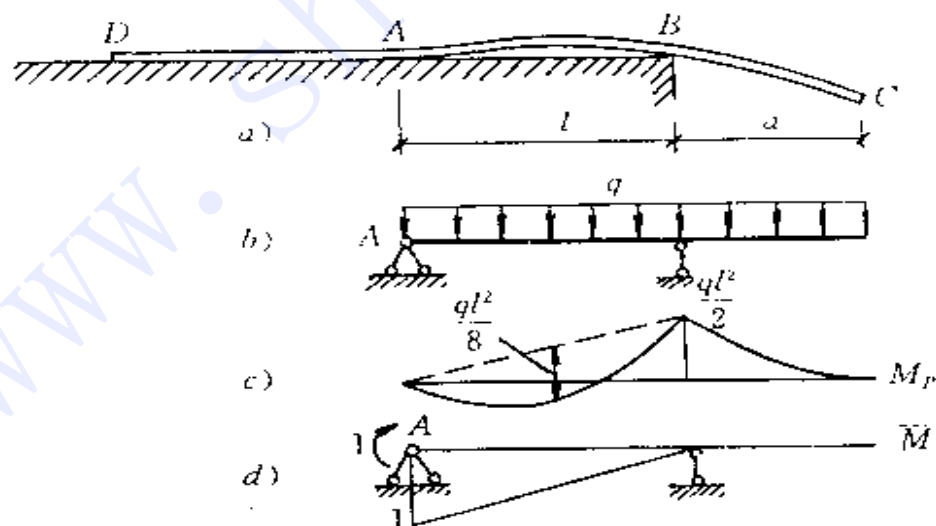


图 4-17

部分长度 l 与外伸部分长度 a 之比。

解 此题计算简单,主要难在怎样取计算简图,怎样分析控制条件。虽然 AB 段已经悬空,但 AD 段仍密贴接触于平台而保持直线故其弯矩为零,因而 A 点弯矩为零相当于铰。于是可不考虑 AD 段,而将 ABC 部分视为伸臂梁(图 4-17b)。根据变形的连续性可知,截面 A 的转角应等于零,于是由图乘法(图 c、d)立刻可得

$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left[\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{qa^2}{2} l \times \frac{1}{3} \right] = 0$$

有
$$\frac{l^2}{24} = \frac{a^2}{12}$$

故得
$$l = \sqrt{2} a$$

例 2 求图 4-18a 所示等截面简支梁在图示移动荷载作用下

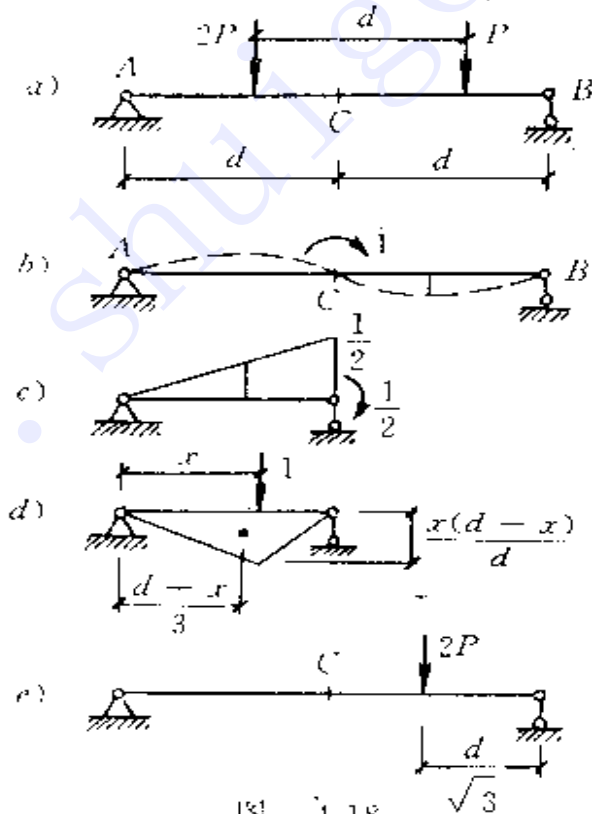


图 4-18

跨中截面 C 的最大转角(绝对值最大)。

解 先求截面 C 转角 φ_c 的影响线。由位移互等定理知 $\varphi_c = \delta_{pc}$ ，这里 δ_{pc} 是单位力偶作用在截面 C 处时梁的竖向位移图(图 4-18b)，此时是反对称的，故可取一半以简化计算。取一半时 C 处相当于活动铰支座，分别绘出实际状态和虚拟状态弯矩图如图 c、d 所示，由图乘法可得

$$\varphi_c = \delta_{pc} = -\frac{1}{EI} \frac{x(d-x)}{2d} \cdot d \times \frac{1}{2} \frac{d+x}{3d} = -\frac{x(d^2-x^2)}{12dEI} - \frac{x^3}{12dEI} \quad (0 \leq x \leq d)$$

右半部分曲线是反对称的，故仍可用以上方程，只不过 x 应以右支座 B 为坐标原点起算。于是可判定，最不利位置应为将荷载 $2P$ 置于 φ_c 影响线 CB 段曲线的最低点处。由

$$\frac{d\varphi_c}{dx} = 0$$

有
得

$$3x^2 - d^2 = 0$$

$$x = d/\sqrt{3} \quad (\text{图 } e)$$

故可求出

$$|\varphi_c|_{\max} = -\frac{2P}{\sqrt{3}} \frac{d}{12dEI} \left(d^2 - \frac{d^2}{3} \right) = \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{Pd^2}{EI}$$

例 3 水平面内的曲杆为半圆周(图 4-19a)，在 A 铰处受有竖直集中荷载 Q ，求 A 点竖直位移。截面抗弯和抗扭刚度分别为 EI 和 GJ 。

解 这是平面刚架承受垂直荷载，属空间问题，此结构本为超静定的，但注意到结构和外力对 xz 平面是对称的，故取一半从 A 铰切开时，该处的剪力和扭矩均为零，如图 4-19b 所示，问题简化为静定的。

实际状态的弯矩和扭矩为

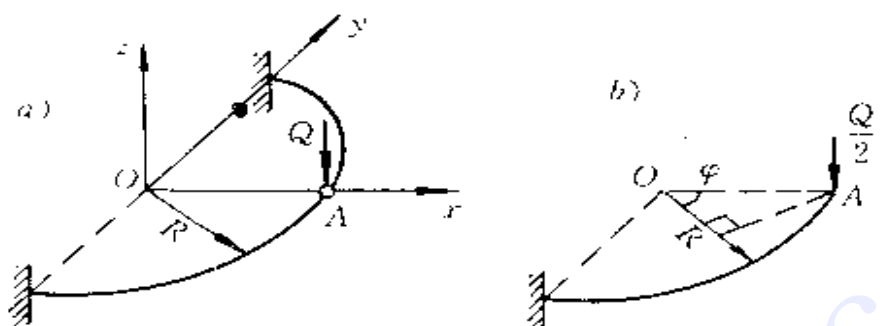


图 4-19

$$M_p = -\frac{Q}{2}R\sin\varphi, \quad M_{nr} = \frac{Q}{2}R(1 - \cos\varphi)$$

虚拟状态(图略)的弯矩和扭矩为

$$\bar{M} = -R\sin\varphi, \quad \bar{M}_n = -R(1 - \cos\varphi)$$

故有

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \sum \int \frac{\bar{M}M_p ds}{EI} + \sum \int \frac{\bar{M}_n M_{nr} ds}{GJ} \\ &= \frac{QR^3}{2EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi + \frac{QR^3}{2GJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{\pi}{8} \frac{QR^3}{EI} + \frac{3\pi - 8}{8} \frac{QR^3}{GJ} \end{aligned}$$

例 4 图 4-20a 为二悬臂梁，两自由端连有一弹簧，已知 P 作用于 B 点时， B 、 D 两点位移分别为 δ_1 、 δ_2 ； AB 梁单独承受 P 时 B 点位移为 δ_1 (图 b)；试求当 P 作用于 D 点时弹簧的伸长量 Δ (图 c)。

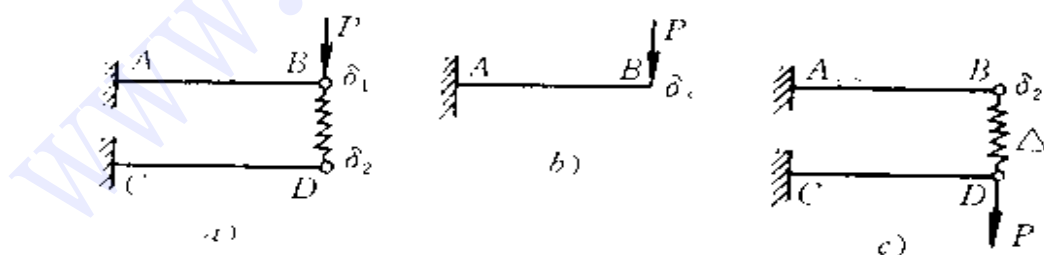


图 4-20

解 此题可有多种解法，较简便的是利用功的互等定理。首先，由位移互等定理可知，在图 c 中 B 点的位移应等于图 a 中 D 点

的位移 δ_2 。设弹簧刚度为 k 。对图 a 和图 b 的 AB 梁应用功的互等定理，有

$$[P - k(\delta_1 - \delta_2)]\delta_3 = P\delta_1 \quad (1)$$

再对图 b 和图 c 的 AB 梁应用功的互等定理，有

$$P\delta_2 = k\Delta\delta_3 \quad (2)$$

由式(1)

$$k = \frac{P(\delta_3 - \delta_1)}{(\delta_1 - \delta_2)\delta_3}$$

代入式(2)得

$$\Delta = \frac{\delta_1}{\delta_3} - \frac{\delta_2}{\delta_1}\delta_2$$

本题的另一解法为：对图 a 和图 c 的 AB 梁应用功的互等定理（亦设弹簧刚度为 k ），有

$$[P - k(\delta_1 - \delta_2)]\delta_2 = k\Delta\delta_1$$

又由图 b 和图 c 的 AB 梁的受力和位移之比应相等（线性变形体系），即

$$\frac{P}{\delta_3} = \frac{k\Delta}{\delta_2}$$

有

$$P - k\Delta = \frac{\delta_3}{\delta_2}$$

代入前式同样得到

$$\Delta = \frac{\delta_1}{\delta_3} - \frac{\delta_2}{\delta_1}\delta_2$$

第五章 超静定结构的计算

§ 5-1 对称性利用中的若干问题

1 何为正对称和反对称

在判断正、反对称的力时，常会出现一些糊涂观念，这主要是定义不明确所致。举图 5-1 中的各例判断其荷载或内力是否正、反对称，对澄清概念有一定作用。

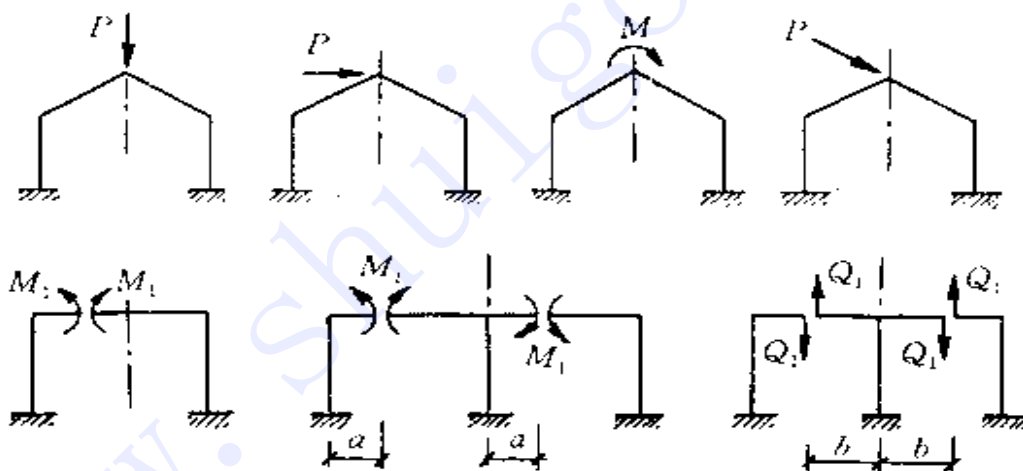


图 5-1

确定这些力是否正、反对称，不能只凭直观，而要根据严格的定义。所谓正、反对称的力，是

1) 指对称结构而言(非对称结构是无所谓正、反对称的力的)。

2) 指对于结构的对称轴而言(而不是对其他任何直线)。

3) 指对称轴两边处于对称位置上的两个力(或两组力)而言(而不是非对称位置上的两个力)。

4) 必需(也只需)二力大小相等且将结构的一半绕对称轴转 180° 后,二力作用点、作用线重合而指向相同(正对称)或相反(反对称)。

5) 对剪力,是指其力的实际指向,而不是指其正负号。

2 如何取得对称的基本结构

用方法计算对称的超静定结构时,应选取对称的基本结构,方可利用对称性简化计算。显然,只有按照下列两种方式去掉多余联系,才能获得对称的基本结构:

- 1) 在对称的位置上同时去掉联系(所去联系数目必为双数);
- 2) 在对称轴上去掉联系(所去联系数可为单数)。

在一般情况下,通常凭直观即可选出对称的基本结构。但有时也遇到一些稍难的例子,如图 5-2 所示对称刚架,要选取一对称的基本结构就不是很容易的。此结构的超静定次数为 9,是单数,故知除采用上述 1) 的方式

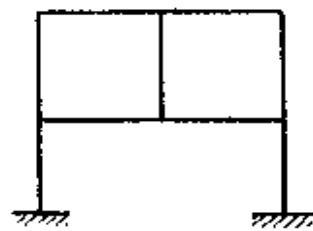


图 5-2

外,还需采用 2) 的方式去掉多余联系,方可取得对称的基本结构。当然基本结构的具体形式可有多种,读者可自行试取。

3 所去联系数目可不可以多于超静定次数

图 5-3a 框架具有两个对称轴,它是三次超静定的。若在上横梁中点作一切口则已经去掉了三个联系(图 b),但由于未利用对 x 轴的对称性,故此时尚需求解两个多余未知力 X_1 、 X_2 。为了也利用对 x 轴的对称性,再于下横梁中点作一切口,由对称知其弯矩和轴力亦为 X_1 和 X_2 (图 c)。

这样，我们一共去掉了6个联系，已超过了超静定次数3。由于图b所示基本结构已经是静定的，在荷载和多余未知力作用下，其全部内力均可由平衡条件确定，因此若在此基础上再去掉任何联系，其相应内方便不再是独立未知数，而可由平衡条件表为荷载和

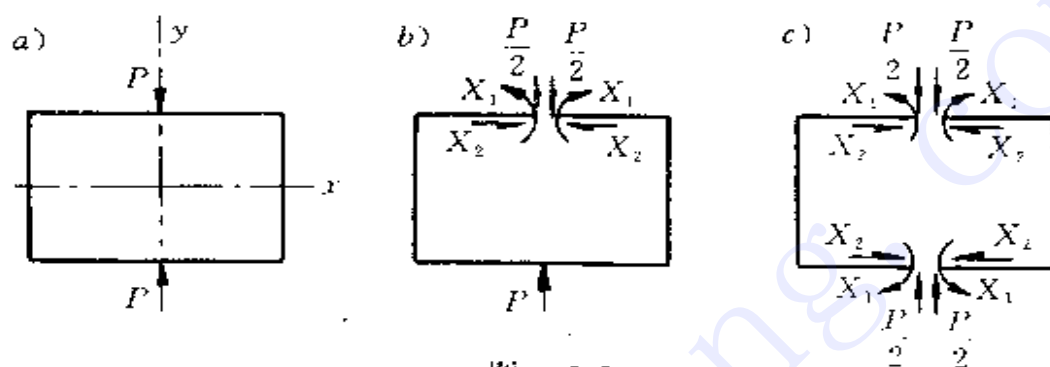


图 5-3

多余未知力的函数。由此可知，当去掉联系数目超过了超静定次数时，并不会增加多余未知力的数目，新增加的内力不是独立的，它们必须满足新增加的平衡条件。图b考虑结构整体平衡，所有外力须满足三个平衡方程。图c则已是两个隔离体，所有外力应满足的平衡方程增加到6个。现考虑左半部(或右半部) $\Sigma X = 0$ ，有

$$2X_2 = 0$$

故

$$X_2 = 0$$

至此，其余所有平衡方程也已满足。于是现在只剩下一个多余未知力 X_1 需要求解。

当所去联系数多于超静定次数时，所得基本结构是几何可变的。几何可变体系在任意荷载作用下将不能维持平衡而无静力解答，但当作用在体系上的力能满足平衡条件时，则仍可求解。因此，我们完全可以去掉比超静定次数更多的联系，而取几何可变体系为基本结构，条件是作用在基本结构上的荷载和未知力必须满足平衡条件。

例如图5-4a所示三次超静定刚架，我们可取图b的基本结构。

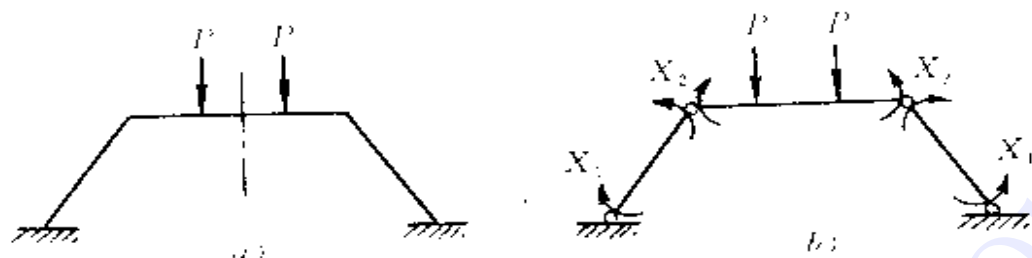


图 5-4

此时虽然去掉了 4 个联系,基本结构几何可变,但作用于其上的荷载和未知力能满足平衡条件(不管 P 、 X_1 、 X_2 是同时作用还是分别作用时),故仍可求解。并可确信,只要满足了平衡条件和原结构的位移条件,所求得内力解答就是原结构的唯一解答。

4 关于取半个结构

对称结构在正、反对称荷载作用下均可只取半个结构来计算,在不对称荷载作用下则需先将荷载分解为正、反对称的两组。

取半个结构计算的主要意义不在于少画一半图,而在于取一半时在沿对称轴剖开的地方已经按正、反对称的受力和位移特点进行了处理,用简化了的支承代替了原有约束;同时在对称轴两边

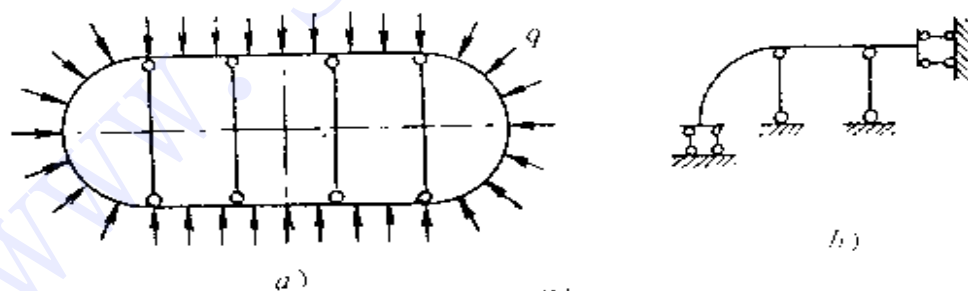


图 5-5

的多余联系只取了一半出来,所以这样得到的半个结构,其超静定次数已自动降低,从而避免了选取对称基本结构及判断正、反对称时各存在哪些未知力等手续。这是取半个结构方法的优越之处。

例如图 5-5a 所示对称结构在图示荷载作用下可简化为需求解多少个多余未知力的问题，尚需分析一番方可确定。但若先取其四分之一来看，便立刻可知它为三次超静定(图 b)。

图 5-6a 所示对称刚架本为 12 次超静定，但若重复运用荷载分

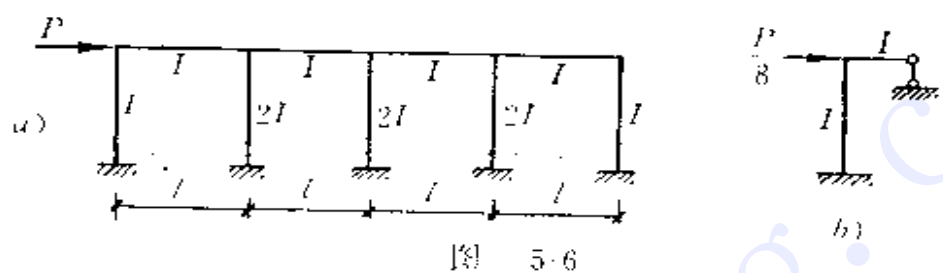


图 5-6

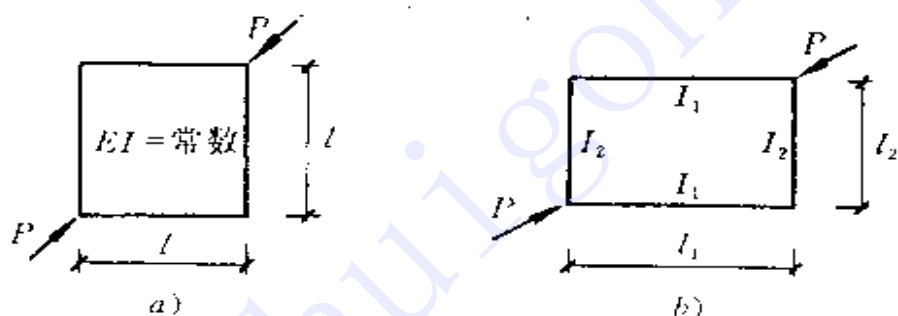


图 5-7

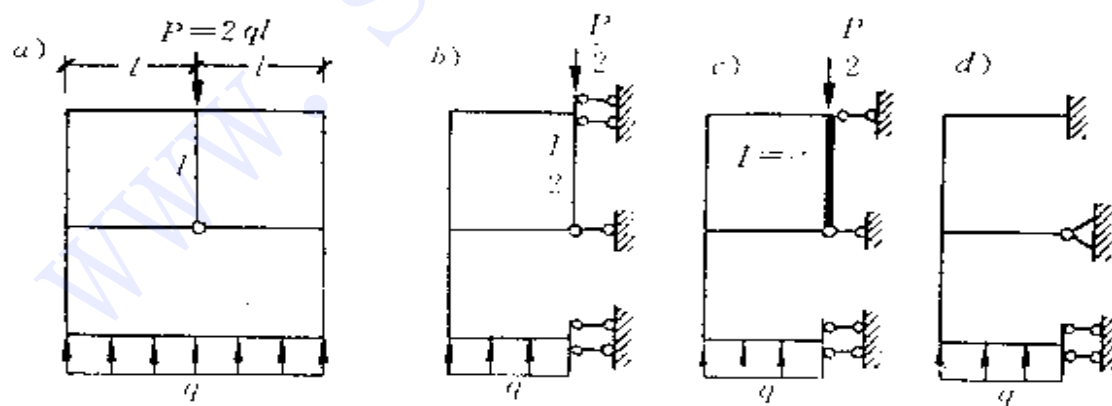


图 5-8

组和取半个结构的方法(忽略轴向变形时),最后将简化为一次超静定的问题(图 *b*)。

对于图 5-7*a*、*b* 所示情形,将荷载分组并取 1/4 计算,问题最后均简化为静定的(忽略轴向变形时),读者可自行验证。

有时也遇到稍难的情况,如图 5-8*a* 所示刚架,取一半时本应如图 *b* 所示,但图 *c*、*d* 也是等效的,读者可自行讨论,兹不赘述。

§ 5-2 多余未知力与荷载可加在不同的基本结构上

在力法计算中,多余未知力与荷载可以加在不同的基本结构上,仍将得到正确的内力解答。先看一例:

图 5-9*a* 所示超静定梁,在作 \bar{M}_1 图和 M_p 图时,若分别取悬臂梁和简支梁为基本结构(图 *b* 和 *c*),将有

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$\text{得 } X_1 = \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql}{8} \downarrow$$

显然,此时的多余未知力 X_1 并不代表支座 B 的反力 R_B ,因为周知

R_B 应为向上的 $\frac{3ql}{8}$,而现在的 X_1 却是向下的 $\frac{ql}{8}$ 。但按

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_p$$

绘制最后弯矩图,仍得到正确的结果(图 *d*)。

以上现象并非偶然巧合,而是普遍适用的法则,这可以用未知

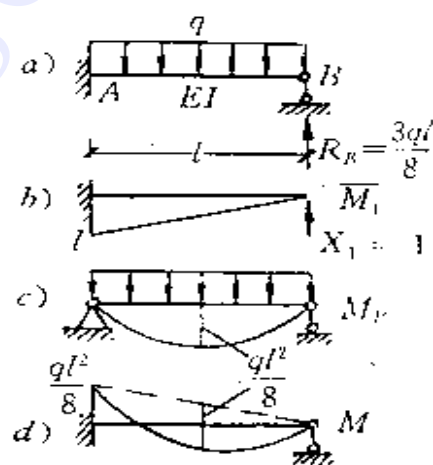


图 5-9

力分组的方法来解释。如上述图 5-9a 所示超静定梁，取悬臂梁为基本结构时，按照常规，多余未知力应为支座 B 的反力 R_B ，但我们可以把它看作是两部分的叠加：一部分为新的未知量 X_1 ，另一部分为已知量 $\frac{ql}{2}$ ，即令(图 5-10a)：

$$R_B = X_1 + \frac{ql}{2} \quad (a)$$

同时把其中第二部分即已知量 $\frac{ql}{2}$ (\uparrow) 对基本结构的影响与原荷载 q 的影响一起考虑，这样作出的 M_F 图(图 5-10b) 便正与简支梁的 M_F 图(图 5-9c) 相同。可见，所谓作 M_F 图时另取简支梁为基本结构，实际上仍是取原悬臂梁基本结构，只不过加上了 R_B 中已知部分 $\frac{ql}{2}$ 的影响。又可见，这样求解出来的多余未知力 X_1 将只是支座反力 R_B 与 $\frac{ql}{2}$ 的差值，而不是 R_B 的全部。

至于求解过程中的典型方程

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (b)$$

的物理意义，可说明如下：本来，以 R_B 为多余未知力求解时，典型方程为

$$\delta_{11}R_B + \Delta_{1(q)} = 0 \quad (c)$$

其物理意义为基本结构在多余未知力 R_B 与原有荷载 q 共同作用下， B 点的竖向位移等于零。现因 R_B 分为两部分，将式(a) 代入式(c)，有

$$\delta_{11}(X_1 + \frac{ql}{2}) + \Delta_{1(q)} = 0$$

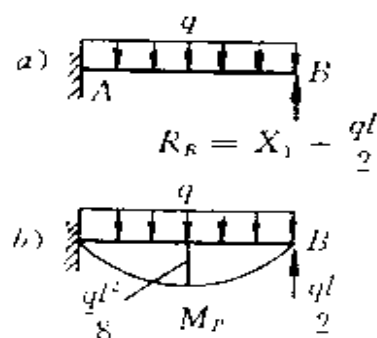


图 5-10

即
$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} \frac{ql}{2} + \Delta_{1(q)} = 0$$

可写为
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1(\frac{q}{2})} + \Delta_{1(q)} = 0$$

这里， $\Delta_{1(\frac{q}{2})} + \Delta_{1(q)}$ 为 R_B 中的 $\frac{ql}{2}$ 部分与原有荷载 q 对 B 点位移的共同影响，它正是式 (b) 中的 Δ_{1P} ，故上式即为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

这就是式 (b)。可见，式 (b) 与式 (c) 完全等价，因而式 (b) 的物理意义仍是基本结构在多余未知力与荷载共同作用下 B 点的竖向位移等于零，只不过在多余未知力 R_B 中拨了一部分即 $\frac{ql}{2}$ 归到了荷载中去，总的影晌并未改变。

以上是一次超静定的情况。对于多次超静定，上述方法同样适用。例如图 5-11a 所示刚架，作 M_1 、 M_2 图时取悬臂刚架为基本结构 (图 b、c)；作 M_P 图时则改取三铰刚架为基本结构 (图 d)，显然这样 M_P 较简单因而计算简便些。由图乘法有

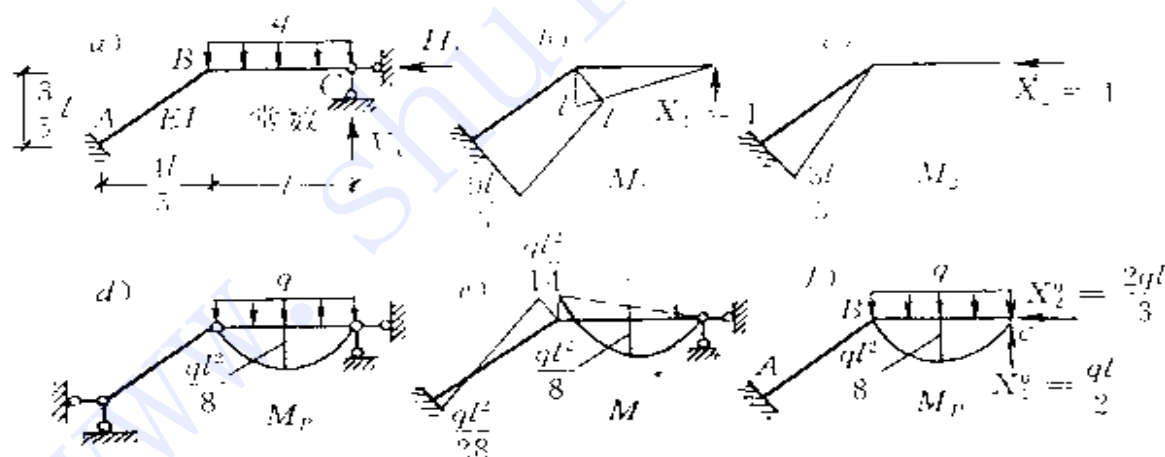


图 5-11

$$EI\delta_{11} = \frac{l^3}{3} + \frac{l \cdot l}{2} \frac{19l}{15} + \frac{l}{2} \frac{9l}{5} \frac{23l}{15} = \frac{176}{75} l^3$$

$$EI\delta_{22} = \frac{l}{2} \frac{3l}{5} \frac{2l}{5} = \frac{3}{25} l^3$$

$$EI\delta_{12} = \frac{l}{2} \left(\frac{3l}{5} \frac{23l}{15} - \frac{23}{50} l^3 \right)$$

$$EI\Delta_{1r} = \frac{2}{3} l \frac{ql^2}{8} \frac{l}{2} = \frac{ql^4}{24} \quad EI\Delta_{2r} = 0$$

典型方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{176}{75} l^3 X_1 + \frac{23}{50} l^3 X_2 - \frac{ql^4}{24} &= 0 \\ \frac{23}{50} l^3 X_1 + \frac{3}{25} l^3 X_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

解得 $X_1 = -\frac{ql}{14}, \quad X_2 = \frac{23}{84} ql$

由 $M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_r$

可绘出最后 M 图如图 5-11e 所示，它显然是正确的（这用力矩分配法极易校核）。

上述计算过程同样可看成是未知力分组，即按悬臂刚架基本结构求解时，把原多余未知力即支座 C 的竖直、水平反力 V_c 和 H_c 分别看成是新的多余未知力 X_1, X_2 与已知常数 X_1^0, X_2^0 之和，也就是令

$$V_c = X_1 + X_1^0$$

$$H_c = X_2 + X_2^0$$

其中常数 X_1^0, X_2^0 之值可以这样确定：将 X_1^0, X_2^0 与原有荷载 q 同时作用于悬臂刚架基本结构（图 f ），并令其 M_r 图与三铰刚架基本结构在 q 作用下之 M_r 图（图 d ）相同，由平衡条件即可推求 X_1^0 及 X_2^0 。在图 f 中，由 $M_n = 0$ 有

$$X_1^0 = \frac{ql}{2}$$

再由 $M_s = 0$ 可得

$$X_2^0 = \frac{ql}{2} \left(\frac{l}{2} + \frac{4l}{5} \right) - \frac{ql}{2} \frac{9l}{5} - \frac{2}{3} ql \left(\frac{3l}{5} \right)$$

上面求解出之 X_1, X_2 值即分别为反力 V_C, H_C 与 $\frac{ql}{2}, \frac{2ql}{3}$ 之差值。至于典型方程(d)的物理意义,则仍代表基本结构在多余未知力 X_1, X_2 及荷载(包括 q 和 X_1^0, X_2^0) 共同作用下 C 点的竖直、水平位移分别等于零,无需赘述。

§ 5-3 有刚度无穷大杆时位移法 基本未知量数目

周知,用位移法分析刚架时,基本未知量数目等于独立的结点角位移数与独立的结点线位移数之和,即

$$n = n_1 + n_2$$

对于一般平面刚架, $n_1 =$ 刚结点数;当不计轴向变形时, $n_2 =$ 为使相应铰接图形成几何不变所需添加的最少链杆数。

当刚架中具有 $EI = \infty$ 的刚性杆(以下简称刚性杆)时,独立的结点位移数将减少,上述法则不再适用。

例如图 5-12 所示刚架,基本未知量数目是多少?这一下子还难于判定。对于更复杂的情况确定基本未知量就更不方便了。因此,有必要制定一套简便的法则。

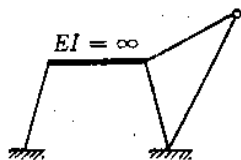


图 5-12

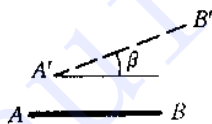


图 5-13

由于刚性杆本身不变形,在刚架发生变形时,它只作为一个刚片产生刚体位移(图 5-13)。如果它两端的线位移确定了,整个杆

件的位置即完全确定了，它所转动的角度 β 也随之确定，且其两端的刚结点转角也就是 β 。因此，刚性杆两端的刚结点的转角可不作基本未知量。至于刚性杆两端的线位移如何确定，则仍取决于整个刚架的独立线位移。确定整个刚架独立的结点线位移数目，依然可将原刚架改为相应的铰接图形来判定。但应注意，刚性杆与基础固结处或与其他刚性杆刚结处不可改为铰结，因为这样才能反映刚片无任何变形的特点。

综上所述，可建立对于具有刚性杆的刚架确定位移法基本未知量数目的法则如下：

基本未知量数目等于独立的结点角位移数与独立的结点线位移数之和，即仍表为

$$n = n_1 + n_2$$

但其中

n_1 = 全为弹性杆汇交的刚结点数（即刚性杆两端的刚结点不算）

n_2 = 为使仅将弹性杆端改为铰结（刚性杆与刚性杆或地基之间的刚结不动）的图形成为几何不变所需添加的最少链杆数。

按以上法则不难确定图 5-12 刚架基本未知量数目为

$$n = n_1 + n_2 = 0 + 1 = 1$$

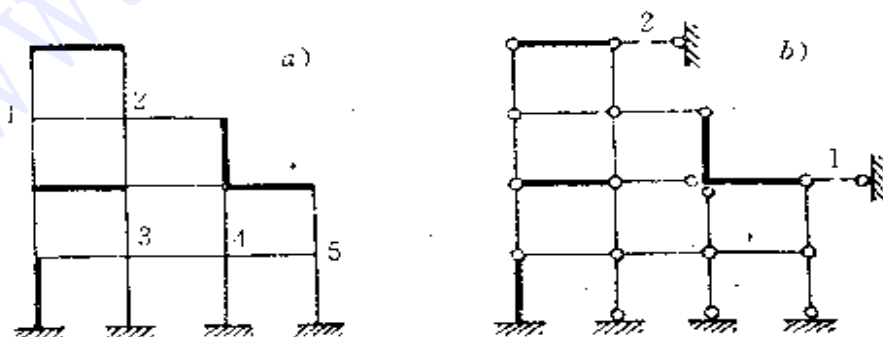


图 5-14

又如图 5-14a 所示刚架(粗线均为刚性杆),有

$$n - n_1 + n_2 = 5 + 2 = 7$$

图 5-14b 为其相应铰结图形,虚线为使其几何不变需添加之链杆。

§ 5-4 刚架承受结点集中荷载时 弯矩是否为零的判定

当忽略轴向变形时,刚架若无结点线位移,则在结点集中荷载作用下,各杆弯矩皆为零(图 5-15a、b)。

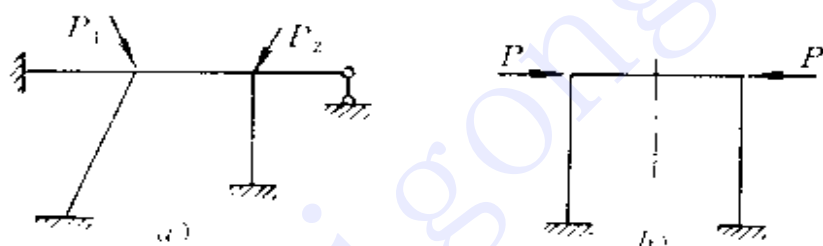


图 5-15

用位移法可以证明上述结论。因为此时既然无结点线位移,则基本未知量全是结点角位移,又因各杆 M_p 图皆为零,结点上又无力偶荷载作用,因而典型方程中所有自由项均为零,于是结点角位移解答全为零,故最后弯矩图为零(假设在所有压杆均未失稳的前提下,下同)。用力法也可以证明上述结论。因为在这种情况下总可

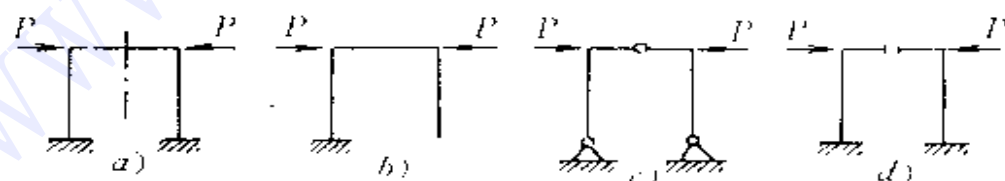


图 5-16

以取到 M_p 图为零的基本结构,从而典型方程中所有自由项为零,全部多余未知力为零,故最后弯矩图为零。例如对图 5-16a 所示刚

架，可取图 *b* 或 *c* 的基本结构，均有 M_r 图为零。但若取图 *d* 的基本结构，则 M_r 图不为零，只有解算到底才能得知最后弯矩为零。

由此可见，对于承受结点集中荷载的刚架，能否在计算之前就能判定弯矩是否为零，对位移法来说在于判断是否无结点线位移；对力法来说在于能否选到 M_r 为零的基本结构。

然而在有些情况下，例如图 5-17a 所示刚架，按位移法并不能事先看出无结点线位移；按力法更是难于一下子就选到图 *b* 这样的 M_r 为零的基本结构。因此，有必要寻求一种更简便的判定方法。

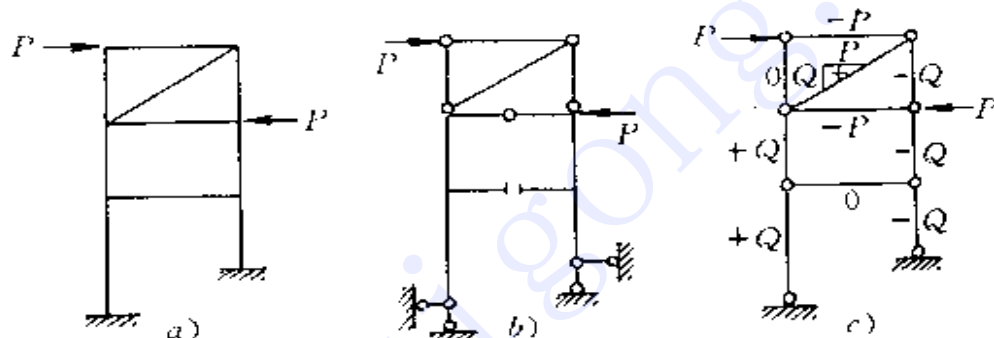


图 5-17

为此，兹提出另一种判定方法如下：

把原刚架改为相应的铰结图形，若

1) 相应铰结图形几何不变，则原刚架弯矩为零。

此结论是容易证明的，因为从位移法看，这就是无结点线位移；从力法看，可就取此铰结图形为基本结构（不论是静定还是超静定的，因为力法也可以取超静定的基本结构），显然此基本结构在结点集中荷载作用下 M_r 为零。

2) 相应铰结图形几何可变，但在所给结点集中荷载作用下能维持平衡，则原刚架弯矩亦为零。

从位移法看，此时基本结构需添加附加链杆，但在结点集中荷载作用下，不仅附加刚臂上反力矩为零，而且刚架原有各杆的轴力

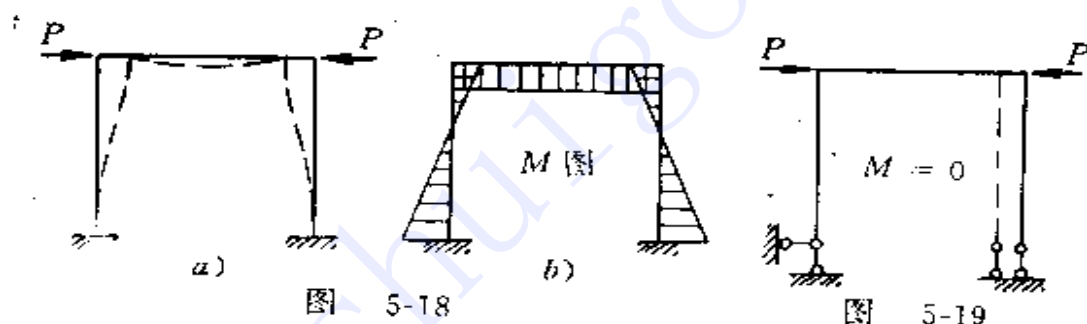
及支座反力已能平衡荷载，故附加链杆上的反力为零，从而所有自由项均为零，于是得证。从力法看，亦取此铰结图形为基本结构（基本结构可以是几何可变的，只要作用在其上的多余未知力及荷载能满足平衡条件），它在结点集中荷载作用下能维持平衡，各杆只受轴力而 M_F 为零，故知原刚架弯矩为零。

图 5-17a 刚架即属此例，其相应铰结图形（图 5-17c）虽几何可变但在荷载下可维持平衡，故原则架弯矩为零，同时也就无任何结点位移。

3) 相应铰结图形几何可变且在所给结点集中荷载作用下不能维持平衡，则原刚架弯矩不为零。

此条仿上可证，从略。

最后，应提出两点注意。一是上述结论的前提是略去轴向变



形。当考虑轴向变形时，上述结论对超静定刚架不再适用，此时杆件的伸长缩短必将引起杆件的弯曲而产生弯矩（如图 5 18）；然而对于静定刚架则上述结论仍然成立，因为静定刚架内力与变形无

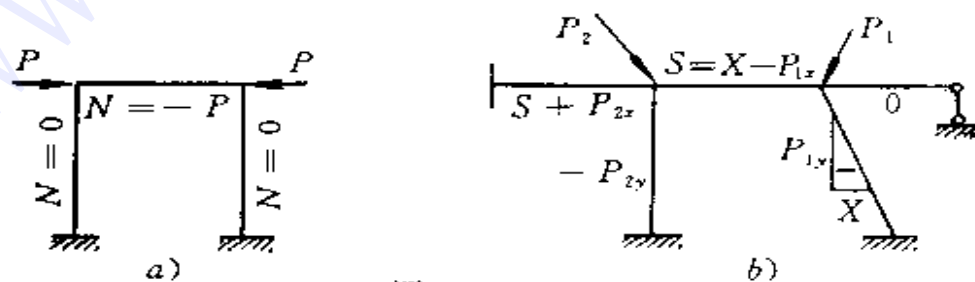


图 5-20

关，故弯矩仍为零(图 5-19)。

第二点注意是，当刚架在结点集中荷载作用下 M 为零时，弯矩即可不用解算，从而大大节省了计算工作量。然而此时刚架不是不受力，而是各杆还承受轴力。至于轴力的确定，有时可根据平衡条件求得，如图 5-20a、b 所示情况；有时却根据平衡条件尚不能确定，如图 5-21 所示情况。此时各杆轴

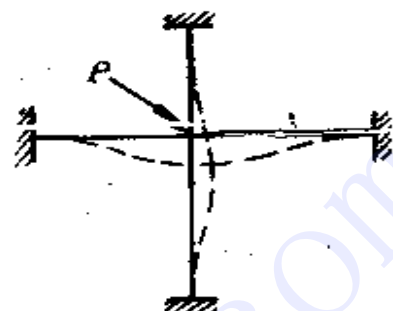


图 5-21

力仍是超静定的，要确定它们，必须考虑轴向变形，否则各杆轴力将是不定的。然而，当考虑轴向变形时，各杆又必将发生弯曲，因而又将产生弯曲内力即弯矩和剪力。所以，此时要想确定各杆轴力，实际上应当同时考虑弯曲变形和轴向变形，连同弯矩、剪力一起求解。如果只孤立地考虑轴向变形去求出各杆轴力，其结果将只是近似的，可能会由于误差太大而没有实际意义。

§ 5-5 无剪力分配法可直接应用于对称空腹梁

关于无剪力力矩分配法应用于空腹梁(亦称空腹桁架)，文 [17]199 页有一段论述如下：

例题 12-6 图 5-22(注：原书图 12-7)a 中的空腹梁带有相等刚度的顶板和底板，承受所示竖直荷载。如果轴向变形略去不计，实际荷载可用图 12-7b 中的荷载来代替。另外，如果 EH 的水平平动受到阻止，那末该框架对连接诸竖直板中点的水平线成为反对称，可按例题 12-4 中多层框架那样的途径借无剪力力矩分配法进行分析。在计算中加一附加步骤来考虑 EH 的实际平移效应，但是

这对所考虑的结构类型和荷载类型影响很小，本例不管它。

以上论述中，显然有一概念上的错误。实际上，不论 EH 的水平平动是否存在及其大小如何，均可直接应用无剪力分配法来求解，而不需要任何“附加步骤”来考虑 EH 的平移效应。这并不是因为它“影响很小”而可“不管它”，而是从原理上讲根本就不应加任何附加修正，若真的加了附加修正，反到得不出正确的内力解答了。

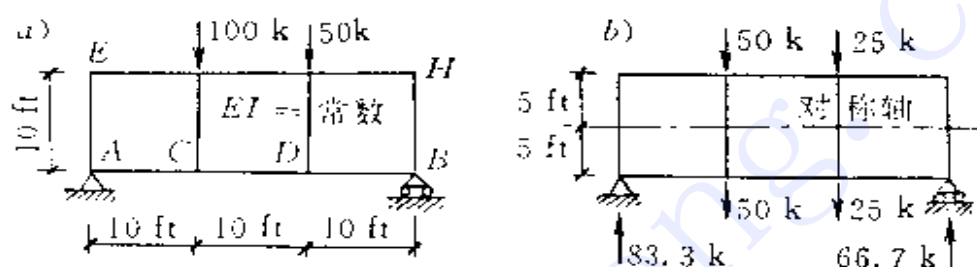


图 5-22(文[17]原书图 12-7)

结构的两个状态若位移相同，则变形亦相同，因而内力亦相同（当没有温度变化时）；但内力、变形相同，位移却不一定相同，因为还可以有不同的刚体位移。现在我们是求解空腹梁的弯曲内力，只要保证弯曲内力和弯曲变形不变，便可以不仅变换结构的荷载，而且可以变换结构的刚体位移。为此，我们可以干脆去掉支座，用反力代替其作用，并将荷载和反力均对水平轴 x 分解为正、反对称的两组。在正对称外力作用下结构的弯矩为零（忽略轴向变形时）；反对称外力作用下如图 5-23a 所示。此时，结构虽无支座，但本身为几何不变且承受平衡力系作用，故完全有确定的内力解答。内力一定，变形随之而定，但位移却不定，因为还可以有任意刚体位移。然而，不论给以什么样的刚体位移，都不会影响内力的解答。例如，我们可假设 A 点不动， B 点无竖直位移，这便与原支承条件符合。我们也可以假设 A 点不动， B 点无水平位移，这便如图 5-23b 所示

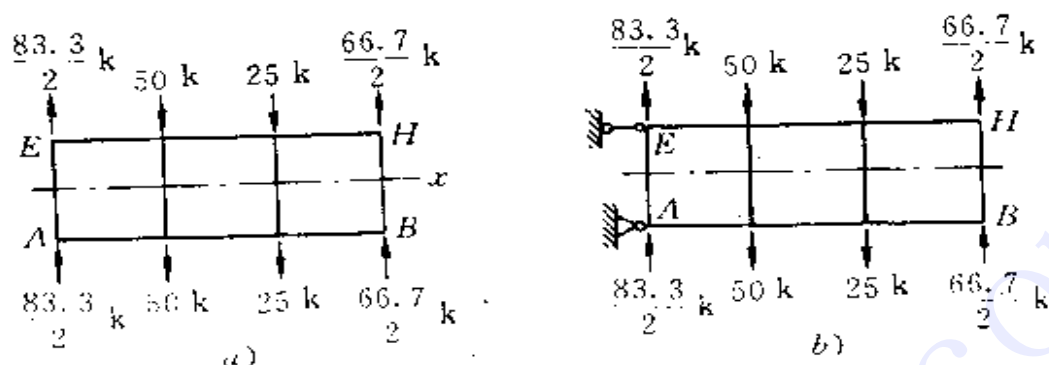


图 5-23

(注意此时 B 点的竖直位移便不为零), 相当于在 A 、 E 处加上了支座链杆。此时荷载为平衡力系, 所加支座的反力均为零, 足见结构的受力情况仍与原来相同。由于受力反对称, 再取其一半计算时, 则所有竖直杆件均为“无侧移杆”, 所有水平杆件均为“剪力静定杆”, 完全符合无剪力分配法所要求的条件, 故可按无剪力分配法进行计算。这样得出的弯曲内力解答也正是上面引文中图 12-7a 或 b 的弯曲内力解答, 不存在需要作任何附加修正的问题。

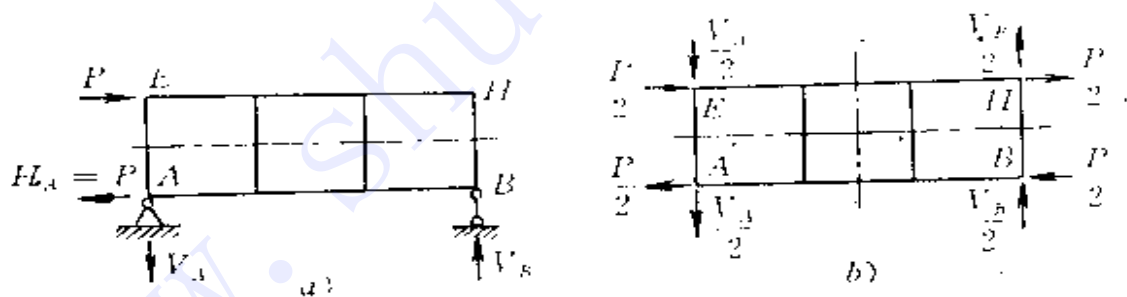


图 5-24

不仅竖向荷载, 就是水平荷载作用下也同样可行。例如图 5-24a 所示情形, 只需将反力 V_A 、 V_B 分别分一半到 E 、 H 点, 便可取一半按无剪力分配法计算。若结构左右又是对称的, 则还可将 P 、 H_L 分别分一半到 H 、 B 点(图 b), 可只取结构的四分之一来计算。此时, EH 的水平平动可谓“大”矣, 但仍应“不管它”。

§ 5-6 三三制反弯点法 —— 简化 D 值法

多层多跨刚架在水平荷载作用下的计算, 由于有侧移带来的计算困难和工程中的广泛应用, 是几十年来一直受到关注的问题。在手算方面, 已有许多行之有效的渐近法和近似法。在渐近法中, 较好的有卡尼的迭代法, 无剪力分配法(借助合成半刚架)与力矩分配法的交替应用, 广义无剪力分配法 —— 修正 D 值法(以下简称文[33]法)等。近年来, 由于矩阵位移法计算机程序的迅速普及, 渐近法的应用已日渐减少。而近似法则仍有其重要地位, 因为它不仅可用手算迅速取得近似结果, 在初拟尺寸和方案比较时特别方便, 而且可以核对电算结果有无大的差错; 尤其是, 它物理概念简明, 使工程技术人员易于了解一些主要物理量的变化规律和记住一些大致的数字, 这是很有益处的。在近似法中, 以反弯点法[19]最为简便, 但精度太差。 D 值法(广义反弯点法)较反弯点法精度提高了许多, 而计算工作量增加不太多, 故较受欢迎。然而 D 值法有四个表两千多个数据及一些公式, 这些都不便记忆, 因此离开了表格公式便无法进行计算, 此外, 文[33]法若只进行一轮计算, 即可获得较好结果, 故可作为精度更高的一种近似法, 当然工作量又比 D 值法更大一些。

本节建议一种介于反弯点法与 D 值法之间的方法, 它不需要任何表格公式, 仅记住几个最基本的数据就能进行全部计算。为了既保持一定的精度又要简单易记, 本法的参数选取和范围划分均尽量与数字 3 挂钩, 故名“三三制反弯点法”或简化 D 值法。

1 方法的要点

- 1) 柱的反弯点高度比 y_0 将 D 值法的 2000 多个数据减少为

9个,如表1所列。这可以按如下规律记忆:当 $\bar{i} \geq 1$ 时,顶、中、底柱之 y_0 分别为0.4、0.5、0.6(这是易记的), \bar{i} 每小(约)三倍,中间一层柱之 y_0 递减0.1;顶柱递减0.3,0.4;底柱则递增0.3,0.4。

表1 柱的反弯点高度比 y_0

梁柱线刚度比 \bar{i}	0.1	0.3	≥ 1
顶柱	-0.3	0.1	0.4
中间一层柱	0.3	0.4	0.5
底柱	1.3	0.9	0.6

这样,计算者可随时自行写出表1,而且掌握了 y_0 变化的大致规律。

表列参数之间的情况则可内插,由于 y_0 只需精确到0.1,故内插实际上只需心算直接写出。但须注意, y_0 不是按直线规律均匀变化的,而是 \bar{i} 愈小变化愈快;对于多层刚架则是靠中间几层柱 y_0 变化不大,愈靠顶底层变化愈剧烈。因此内插时应取比按直线变化更靠中间一些的 y_0 值,这可简称为“内插靠中”的原则。

2) y_0 的修正 上下梁刚度不等时的修正: $\bar{i} \geq 1$ 时不必修正。 $\bar{i} < 1$ 且上下梁刚度相差1/3以上时, y_0 向梁弱的一头移0.1~0.2; $\bar{i} < 0.3$ 且上下梁刚度相差一倍以上时, y_0 向梁弱的一头移0.3~0.4。

邻层柱高不等时的修正: $\bar{i} \geq 1$ 时不修正。 $\bar{i} < 1$ 且邻层比本层高(或低)1/3以上时, y_0 向邻层方向(或反方向)移0.1~0.2。

3) 修正侧移刚度 D 值 柱的修正侧移刚度(即 D 值),等于其侧移刚度 $\frac{12i_0}{h^2}$ 乘以折减系数 α ,见表1。此表按三三制规律很易记

表 2 修正侧移刚度折减系数 α

		\bar{i}	0.3	1	3	≥ 10
α	其余柱		0.1	0.3	0.6	0.9
	底柱		0.3	0.5	0.7	

注：当 \bar{i} 很大即 ≥ 10 时， α 取 0.9； \bar{i} 每小（约）三倍，除底层外各层柱的 α 递减（约）0.3，底柱递减 0.2。其间则可内插， α 值只精确至 0.05 即可，故内插易由心算写出。

同层剪力按各柱的修正侧移刚度 D 值（可按其相对值）分配到各柱，然后即可确定各柱端弯矩并由结点平衡推求梁端弯矩，无需赘述。在估算水平位移值时，须使用 D 的绝对值。

2 简化合理性的论证

1) 关于 y_0 的简化 表 1 没有反映刚架总层数不同的情况。与 D 值法详细的 y_0 值表 [19] 对照可见，当 \bar{i} 较小时，表 1 对于层数较多的情况能与之很好地符合，层数较少时则误差较大。然而，较小的 \bar{i} 值（即梁弱柱强）一般只出现在层数很多的情况，层数较少时 \bar{i} 值不会很小（且通常都大于 1），故表 1 的简化符合绝大多数刚架的实际情况，因而是可行的。

此外，表 1 也不区分均布荷载与倒三角形荷载两种情形，这是因为 y_0 取值的精度只达到 0.1，并已兼顾了两种荷载情况，因而表 1 具有通用性，对其他荷载情况（例如倒梯形）亦能适合。

2) 关于 y_0 的修正 以上 y_0 是由“规则半刚架”（所有层高相同，所有柱线刚度相同，所有梁线刚度相同）得出的，对一般多跨刚架可近似应用，但按 D 值法应作以下两种修正：

一是上下梁刚度不相等时的修正。此时 y_0 的修正量与 \bar{i} 及上下梁线刚度的比值有关，其变化规律较复杂， D 值法的表共列 84 个

数据。然而这种修正通常只需在个别层中进行，而且修正量多数情况下不大，甚至可不作修正。为此去记住一些数据是不值得的，因此只作了前面最简化的处理。

二是上下层柱高不相等时的修正， D 值法表列有 154 个数据，但情况与上类似，且修正量更小，故同样只作了最简化的处理。

3) 关于修正侧移刚度 一般说来这是必须进行的，这牵涉到同层剪力在各柱间的合理分配。若简单地按侧移刚度 $12i_c/k^2$ 分配，便是未考虑同层结点转角可能不相等的情况，这在各柱的 \bar{i} 值相差较远时会导致较大的误差。此外，在估算水平位移值时，若不对侧移刚度进行折减，便是没有考虑到柱两端转角的影响，这在 \bar{i} 值较小时将会导致很大的误差。

表 2 所给 α 值，不仅简单易记，而且能与 D 值法的公式较好符合。但需说明的是，当 $\bar{i} < 0.3$ 时，即使按 D 值法给出的公式计算 α 值也是很很不准确的，故表 2 中未列此种情况。

3 算 例

某 10 层刚架如图 5-25 所示，小圆圈内为各杆线刚度相对值。

计算详见表 3。由于对称，左右边柱只列其一。在计算各柱的梁柱线刚度比 \bar{i} 时，若上下梁线刚度不相等则应取其平均值；对于中柱，梁的线刚度应为左右二梁之和。有了 \bar{i} ，便可按前述方法心算估出各柱之 y_0 及 α 。本例因同层各柱线刚度及柱高均相同，故 α 值

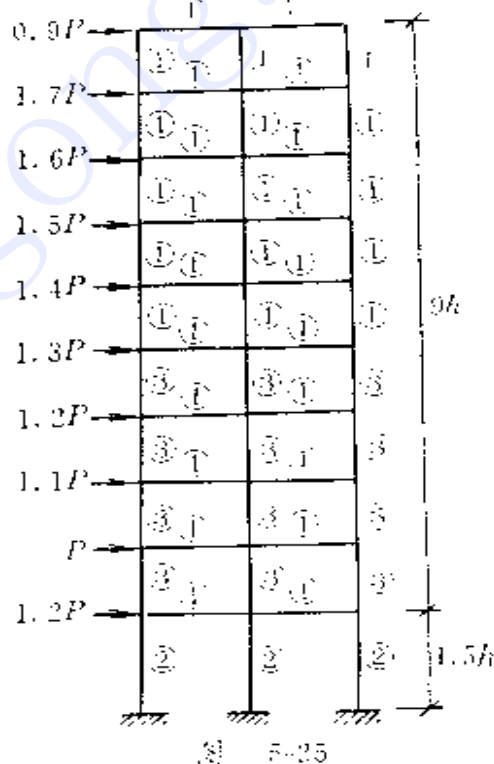


表 3 柱端弯矩计算

层	总剪力 P	边 柱					中 柱				
		\bar{i}	y_0	α	端弯矩(Ph)		\bar{i}	y_0	α	端弯矩(Ph)	
					本文法	精确值				本文法	精确值
10	0.9	1	0.4	0.3	上 0.15 下 0.10	0.17 0.05	2	0.4	0.5	0.24 0.16	0.28 0.19
9	2.6	1	0.4	0.3	上 0.43 下 0.28	0.43 0.27	2	0.4	0.5	0.71 0.47	0.66 0.55
8	4.2	1	0.5	0.3	上 0.57 下 0.57	0.64 0.49	2	0.5	0.5	0.96 0.95	1.03 0.92
7	5.7	1	0.5	0.3	上 0.78 下 0.78	0.83 0.68	2	0.5	0.5	1.29 1.29	1.39 1.30
6	7.1	1	0.5	0.3	上 0.97 下 0.97	1.04 0.95	2	0.5	0.5	1.61 1.61	1.65 1.48
5	8.4	0.33	0.4	0.1	上 1.26 下 0.84	1.12 0.92	0.67	0.5	0.2	2.10 2.10	2.34 1.99
4	9.6	0.33	0.4	0.1	上 1.44 下 0.96	1.40 1.08	0.67	0.5	0.2	2.40 2.40	2.43 2.21
3	10.7	0.33	0.5	0.1	上 1.34 下 1.34	1.52 1.26	0.67	0.5	0.2	2.68 2.68	2.71 2.43
2	11.7	0.33	0.5	0.1	上 1.46 下 1.46	1.60 1.24	0.67	0.5	0.2	2.93 2.93	3.04 2.99
1	12.9	0.5	0.7	0.4	上 1.79 下 4.17	1.88 4.11	1	0.6	0.5	2.98 4.47	2.79 4.57

即可作为相对 D 值。其余计算无需说明。

本文方法所算得的柱端弯矩值与 D 值法的结果很接近，与精确值亦相差不远(见表 3)，故可作初步设计之用。

§ 5-7 合成刚架无剪力分配 D 值分摊法

本节建议一种介于 D 值法与精确法之间的方法, 即将多层多跨刚架用合成刚架(亦称合成半刚架)代替, 在水平结点荷载作用下用无剪力分配法进行计算, 然后将柱端弯矩按 D 值分摊到原刚架各柱。由于合成刚架是单跨的, 故计算量较小, 尤其当原刚架跨数较多时, 比精确的渐近法减少的工作量是很可观的。这是一种近似法, 其精度虽逊于精确法, 但高于 D 值法。因为 D 值法系按查表确定反弯点高度, 在水平荷载沿高度不是均匀分布或倒三角分布时, 误差较大。本法则按实际荷载对合成刚架进行无剪力分配, 其精度自然优于 D 值法, 故不失为一种有实用价值的方法。

1 原理及步骤

1) 合成刚架 将多层多跨刚架(图 5-26a)折合为一个合成刚架(图 5-26b), 合成刚架的某一层柱的线刚度为原刚架同层各柱线刚度之和, 梁的线刚度为原刚架同层各梁线刚度之和的 4 倍。将原水平荷载加于此合成刚架进行无剪力分配计算。

2) 计算各柱的 D 值 首先计算各柱的“梁柱线刚度比” \bar{i} 。

$$\text{边柱(图 5-27a)} \quad \bar{i} = \frac{i_2 + i_4}{2i_c} \quad (1)$$

$$\text{中柱(图 5-27b)} \quad \bar{i} = \frac{i_1 + i_2 + i_3 + i_4}{2i_c} \quad (2)$$

$$\text{底柱(图 5-27c)} \quad \bar{i} = \frac{i_1 + i_2}{i_c} \quad (3)$$

然后计算系数 α :

$$\text{除底层外各层柱} \quad \alpha = \frac{\bar{i}}{2 + \bar{i}} \quad (4)$$

底层柱
$$\alpha = \frac{0.5 + \bar{i}}{2 + \bar{i}} \quad (5)$$

再求得各柱的修正侧移刚度 D 值：

$$D = \alpha \frac{12i_c}{h_2} \quad (6)$$

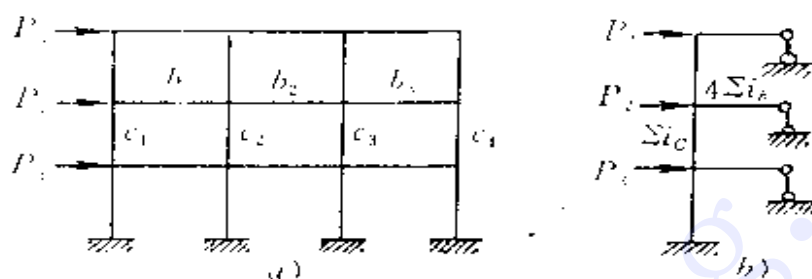


图 5-26

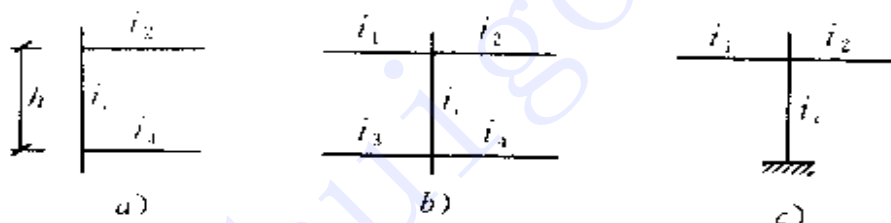


图 5-27

3) 分摊 若将合成刚架柱端弯矩按线刚度比例分给原刚架同层各柱端，便未考虑同层各结点转角可能不相等的影响。现在改用按考虑了这一因素的修正侧移刚度 D 值的大小来分摊，则精度必然提高。分摊可采取乘以侧移分配系数 μ 的方式进行， μ 值为

$$\mu = \frac{D}{\sum_{同层} D} \quad (7)$$

可见，计算 μ 时只需各柱 D 的相对值即可。

至于各梁端弯矩，不再由合成刚架分摊而得，而是根据柱端弯矩由结点力矩平衡条件推得。一个结点处有两个横梁杆端时，按其线刚度比例分配。

2 算 例

图 5-28 所示刚架，各杆线刚度写于圆圈内，合成刚架及其无剪力分配见图 5-29a 和 b。按式 (1) 至 (7) 计算的 \bar{i} , α , D , μ 见图 5-28, 分摊结果见图 5-30。

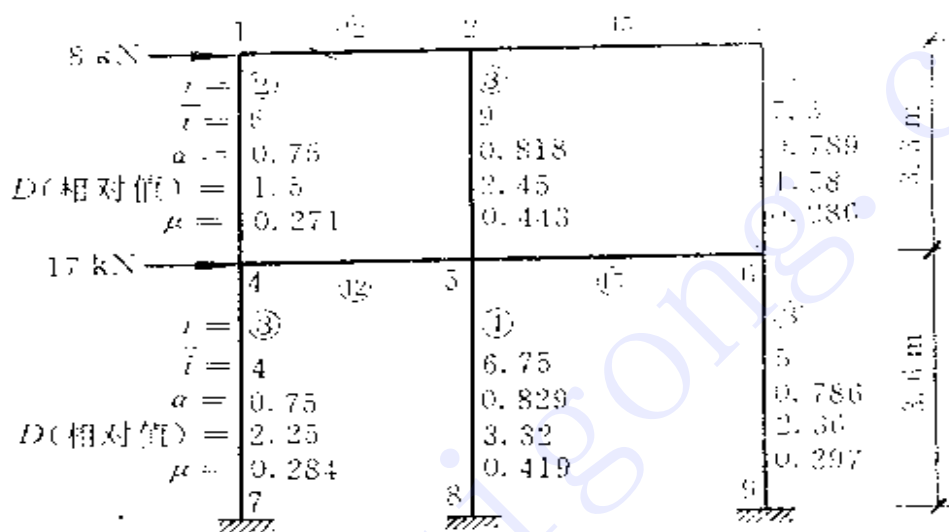


图 5-28

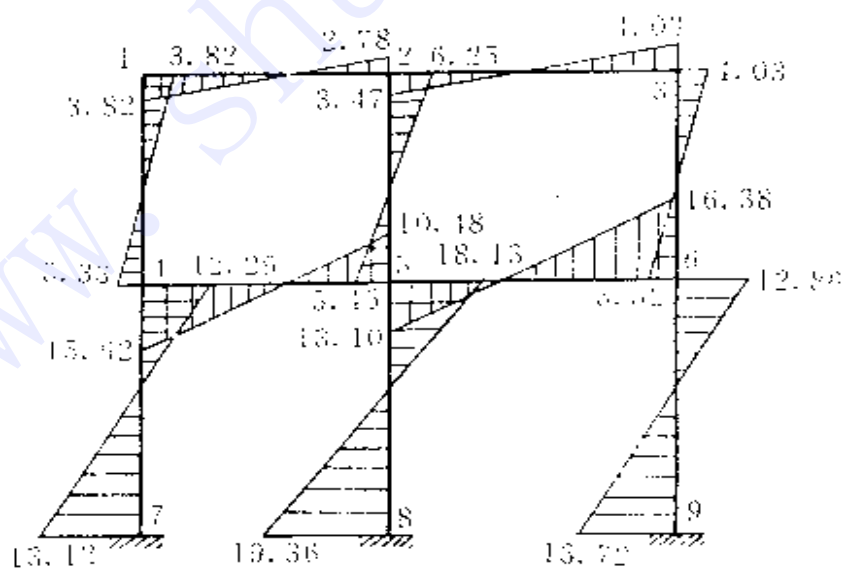


图 5-30

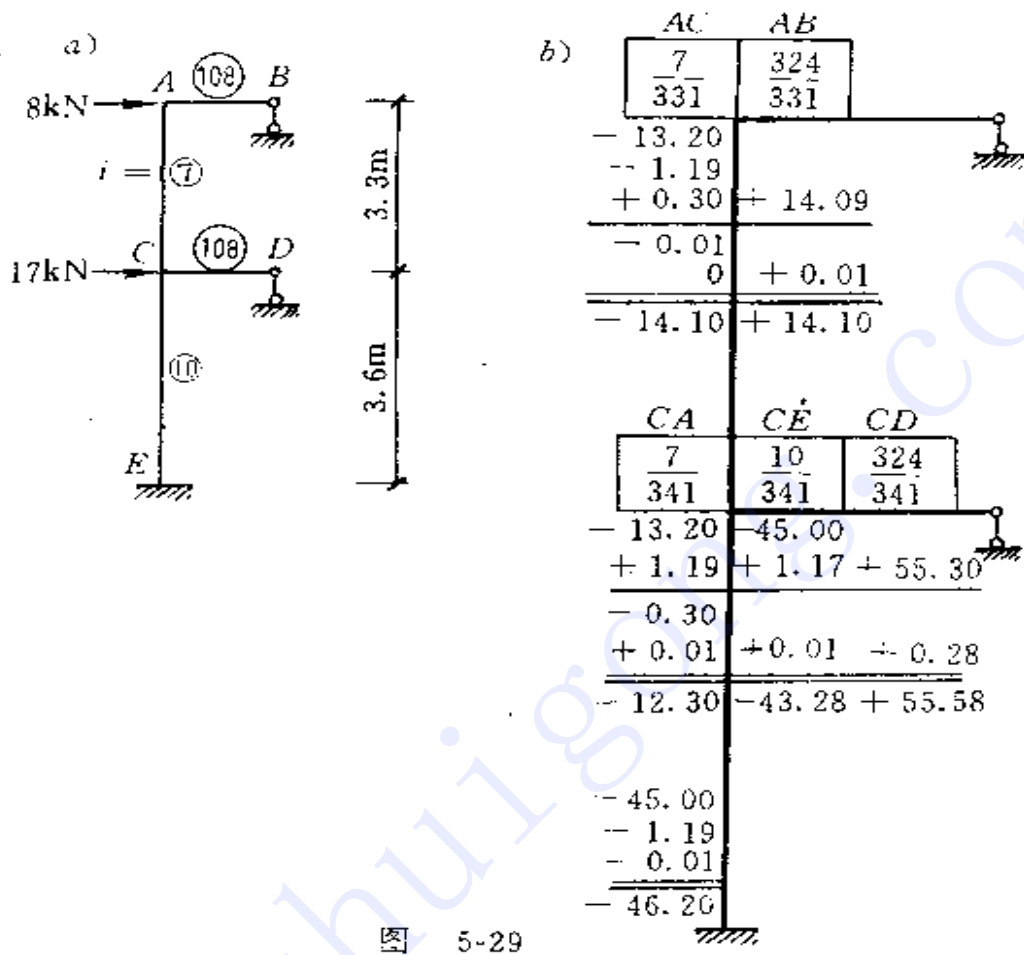


图 5-29

3 关于评价精度的建议

衡量一个近似方法的精度，通常用各杆端弯矩对各自精确解的相对误差来表示。当同一杆件两端弯矩的绝对值大小不等尤其是相差较远时，这样来衡量精度是很不合理的。例如设某杆两端弯矩的精确解如图 5-31a 所示，两种不同近似法所得结果如图 b 和图 c 所示。显然图 b 大大优于图 c。但

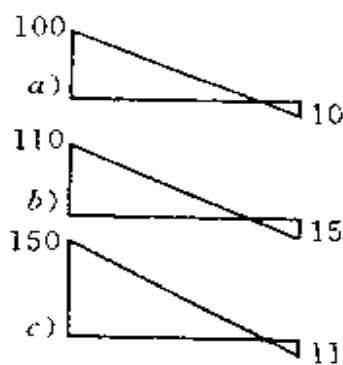


图 5-31

若用上述标准衡量, 两者相对误差均同样为 10% 和 50%。同样的情况还存在于不同杆件之间的比较。一根受力很小的杆件, 其截面设计往往由构造控制, 或由其他工况下内力较大时控制, 而此时其弯矩误差 20% 是无足轻重的。而另一根受力很大的杆件, 弯矩若差 20% 则可能对安全或经济产生影响。因此, 对于杆系结构, 建议

表 1 误差比较表

杆件	杆端	弯矩 精确解	D 值法		本文方法	
			弯矩	误差	弯矩	误差
12	12	3.64	3.94	0.30	3.82	0.18
	21	3.08	2.85	-0.23	2.78	-0.30
23	23	3.52	3.57	0.05	3.47	-0.05
	32	3.91	4.16	0.25	4.03	0.12
14	14	3.64	3.94	0.30	3.82	0.18
	41	2.85	3.22	0.37	3.33	0.48
25	25	6.60	6.42	-0.18	6.25	-0.35
	52	9.13	5.26	-0.87	5.45	-0.68
36	36	3.91	4.16	0.25	4.03	0.12
	63	3.27	3.40	0.13	3.52	0.25
45	45	14.95	14.72	-0.23	15.62	0.67
	54	11.52	9.86	-1.66	10.48	-1.04
56	56	13.02	12.33	-0.69	13.11	0.09
	65	15.92	15.47	-0.45	16.38	0.46
47	47	12.10	11.50	-0.60	12.29	0.19
	74	13.63	14.06	0.43	13.12	-0.51
58	58	18.41	16.93	-1.48	18.13	-0.28
	85	19.31	20.69	1.38	19.36	0.05
69	69	12.66	12.07	-0.58	12.86	0.21
	96	13.90	14.75	0.85	13.72	-0.18
误差绝对值的平均值			0.56		0.32	
均方差			0.72		0.40	

用杆端弯矩的绝对误差来衡量方法的精度。对于整个结构的总精度则可用所有各杆端弯矩误差绝对值的平均值或均方差来表示。

根据上述建议，上述算例的误差比较详见表 1。由表列数据证实，本文方法精度优于 D 值法。

§ 5-8 难题选解

本节题目大多选自各高等院校硕士研究生入学考试试题(有的稍有改动)，少数为自编或参考书目中之习题。

例 1 用力法求作图 5-32a 所示梁的弯矩图。 $EI =$ 常数，各弹簧的刚度均为 $k = EI/l^3$ 。

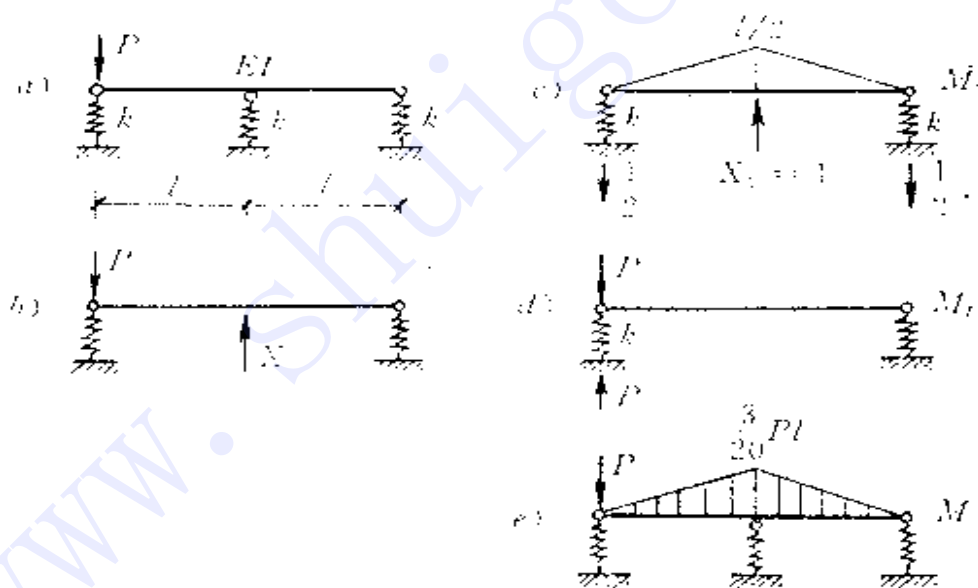


图 5-32

解 此题不过是一次超静定，只是在建立典型方程和求系数自由项时须注意弹性支座位移的影响。取基本结构如图 b，典型方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = -\frac{X_1}{k}$$

绘出 M_1 图并求出反力(图 c), 有

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \Sigma \int \frac{M_1^2 ds}{EI} - \Sigma R_1 c_1 \\ &= \frac{2}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right] - \left(2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2k} \right) \\ &= \frac{l^3}{6EI} + \frac{1}{2k} \end{aligned}$$

绘出 M_P 图(目前为零)并求出反力(图 d), 有

$$\Delta_{1P} = -\Sigma R_1 c_P = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{P}{k} \right) = -\frac{P}{2k}$$

代入典型方程即可得

$$X_1 = \frac{P}{\frac{l^3}{6EI} + \frac{1}{2k}} = \frac{3}{10} P$$

最后弯矩图 $M = M_1 X_1$, 如图 e 所示。

例 2 试求图 5-33a 所示等截面连续梁在图示移动荷载作用下支座 B 的最大负弯矩值。

解 1) 首先作出 M_B 的影响线 根据力法及位移互等定理有

$$M_B = -\frac{\delta_{BP}}{\delta_{BB}} = -\frac{\delta_{PB}}{\delta_{BB}}$$

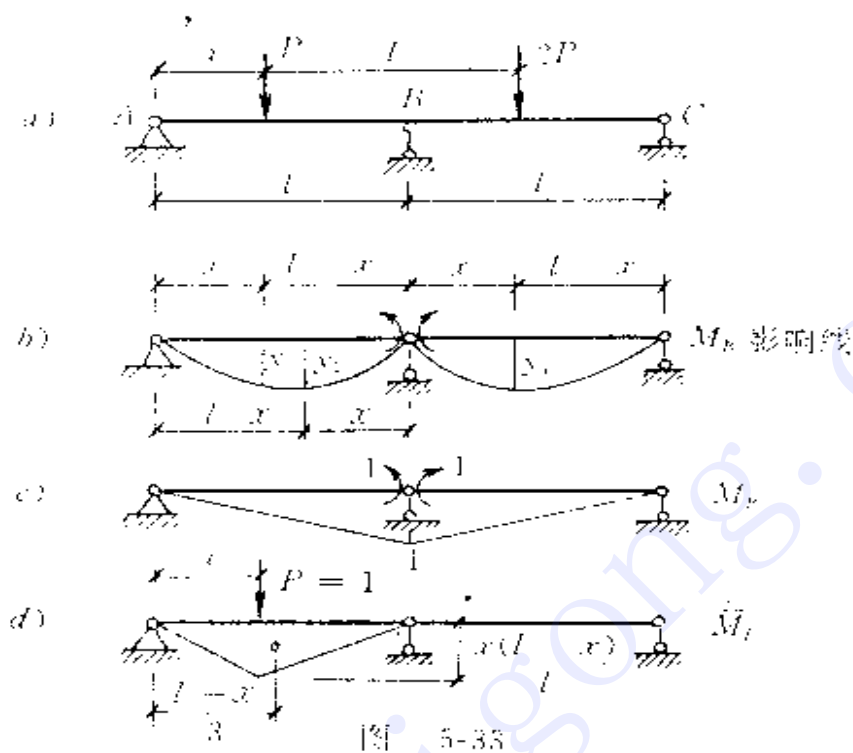
M_B 影响线形状即与 δ_{PB} 相同, 而 δ_{PB} 为 $M_B = 1$ 作用下基本结构的竖向位移图(图 5-33b)。

作出基本结构的 M_B 及 M_P 图(见图 c、d)后, 由图乘法有

$$EI \delta_{BB} = \frac{2l}{3}$$

$$EI \delta_{PB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x(l-x)}{l} \cdot l \cdot \frac{l+x}{3l} = \frac{1}{6l} (xl^2 - x^3)$$

于是 M_B 影响线在 AB 段的竖标为



$$y = -\frac{\delta_{PB}}{\delta_{BB}} = -\frac{1}{4l^2}(xl^2 - x^3)$$

由对称可知，将 x 换为 $l-x$ ，可得 BC 段的方程为

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{4l^2}[(l-x)l^2 - (l-x)^3] \\ &= -\frac{1}{4l^2}(2l^2x - 3lx^2 + x^3) \end{aligned}$$

2) 求 M_B 的最大负值 由影响线定义及叠加原理

$$\begin{aligned} M_B &= Py + 2Py_1 \\ &= \frac{P}{4l^2}(5l^2x - 6lx^2 + x^3) \end{aligned}$$

由
$$\frac{dM_B}{dx} = \frac{P}{4l^2}(5l^2 - 12lx + 3x^2) = 0$$

可解得
$$x = (2 - \frac{\sqrt{21}}{3})l = 0.472l$$

故得 $M_{B(\min)} = -\frac{Pl}{4}(-6 + \frac{14}{9}\sqrt{21}) = -0.282Pl$

例3 试求图 5-34a 等截面连续梁在所示汽车荷载通过时支座 B 右侧截面的最大剪力值。

解 此题可灵活运用多种方法以寻求简捷的途径。

1) 用机动法草绘 $Q_{B右}$ 影响线的形状如图 c 所示。至于为什么是这样的形状，则可由其相应的弯矩图 M_0 来推断，而 M_0 图是静定的，故应容易绘出（见图 b）。

2) 判断最不利荷载位置
显然应是汽车调头行驶，80 kN 作用于截面 B 右之右时为最不利（图 d）。

3) 荷载位置既定，内力计算即可按固定荷载下的计算来处理。由于此时 80 kN 在支座处并不引起弯矩，仅 40 kN 引起弯矩，用力矩分配法极易绘出其 M 图如图 e 所示。

4) 从 B 右处切开，取 BC 段为隔离体（图 f）求 B 右截面剪力，注意此时 80 kN 尚在隔离体上，故得

$$Q_{B右(\max)} = 80 + \frac{1}{2} \times 40 + \frac{30}{8} = 103.75 \text{ kN}$$

例4 图 5-35a 为一带拉杆的刚架，转动螺丝扣可以改变拉杆长度以调整刚架的内力。已知 $l = 4 \text{ m}$ ，梁和柱均为 20b 工字钢，截

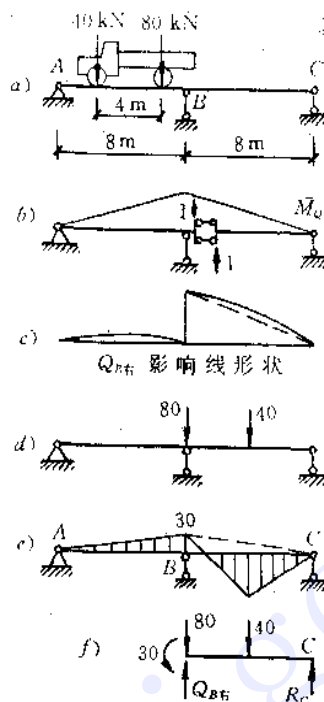


图 5-34

面的 $I = 2500 \text{ cm}^4, W = 250 \text{ cm}^3$, 拉杆为圆钢, 材料的 $E = 210 \text{ GPa}$, 容许应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$. 试求最大容许荷载 q 并设计拉杆直径 d 和确定螺丝扣调整量 Δ . 计算强度时对梁、柱只考虑弯矩影响。

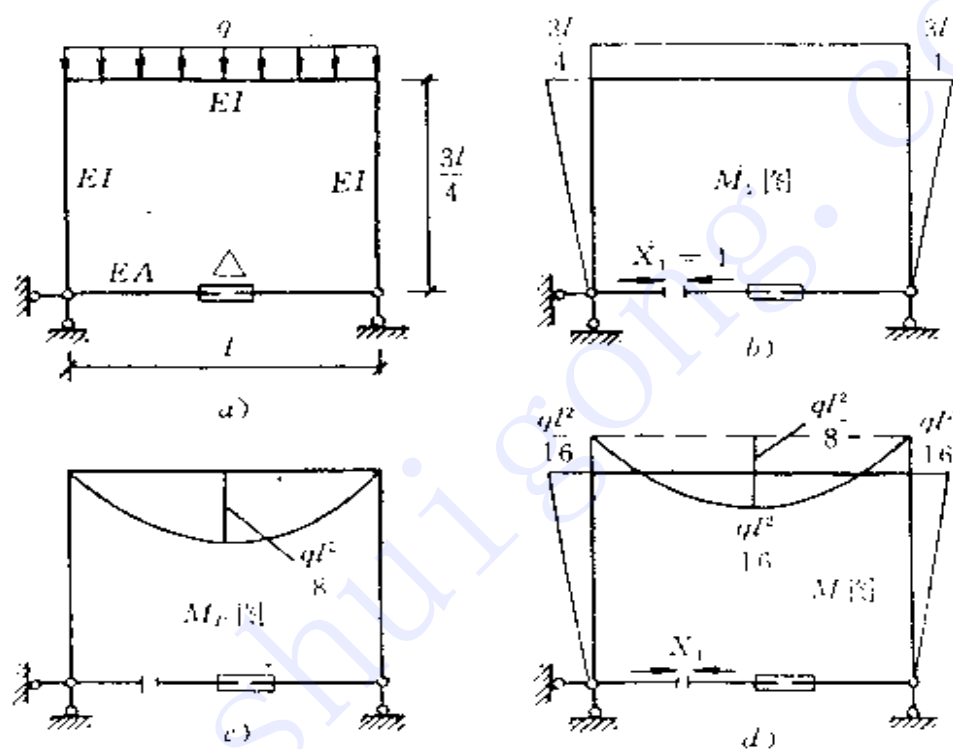


图 5.35

解 此题初看未知量很多, 似无从下手。其实它只不过是一次超静定, 因此只需抓住典型方程这一关键, 便头绪清楚了。

取基本结构时截断拉杆, 基本结构在荷载 q 、多余未知力 X_1 和螺丝扣调整量 Δ (相当于温度改变或制造误差) 的共同影响下, 典型方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} + \Delta = 0$$

作出 M_1 、 M_P 图(图 b、c), 有

$$\delta_{11} = \Sigma \int \frac{M_1^2 ds}{EI} + \frac{l}{EA} = \frac{27l^3}{32EI} + \frac{l}{EA}$$

$$\Delta_{1P} = \Sigma \int \frac{M_1 M_P ds}{EI} = -\frac{1}{16} \frac{ql^4}{EI}$$

代入典型方程有

$$\left(\frac{27}{32} \frac{l^3}{EI} + \frac{l}{EA} \right) X_1 - \frac{1}{16} \frac{ql^4}{EI} + \Delta = 0 \quad (1)$$

式中有 X_1 、 q 、 A 和 Δ 共 4 个未知量，故尚须再寻求三个条件。

要求 q 最大，必须是充分发挥刚架的弯曲强度，这便是最大正负弯矩绝对值相等时最有利，故可要求最后 M 图如图 d 所示，由此可推定

$$X_1 \frac{3l}{4} = \frac{ql^2}{16}$$

得
$$X_1 = \frac{ql}{12} \quad (2)$$

又由梁、柱的强度条件有

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{16} \leq W[\sigma]$$

可得能承担的 q 的最大值为

$$q = \frac{16W[\sigma]}{l^2} \quad (3)$$

将数字代入有

$$q = \frac{16 \times 250 \times 10^{-6} \times 160 \times 10^3}{4^2} = 40 \text{ kN/m}$$

再由拉杆的强度条件，有

$$X_1 = \frac{ql}{12} \leq A[\sigma]$$

故
$$A \geq \frac{ql}{12[\sigma]} \quad (4)$$

将式(3)代入得

$$A \geq \frac{16W[\sigma]}{l^2} \frac{l}{12[\sigma]} = \frac{4W}{3l} = \frac{4 \times 250}{3 \times 400} = 0.833 \text{ cm}^2$$

今选用直径 $d = 12 \text{ mm}$ 的圆钢，其截面积为

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 1.2^2}{4} = 1.13 \text{ cm}^2 \quad (5)$$

最后，将式(2)代入(1)，有

$$\left(\frac{27}{32} \frac{l^3}{EI} + \frac{l}{EA} \right) \frac{ql}{12} - \frac{1}{16} \frac{ql^4}{EI} + \Delta = 0$$

移项整理后有

$$\Delta = \frac{ql^4}{128EI} \left(1 + \frac{32}{3} \frac{l}{Al^2} \right)$$

再将数字代入得

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{40 \times 10^3 \times 4^4}{128 \times 210 \times 10^9 \times 2500 \times 10^{-8}} \left(1 + \frac{32}{3} \frac{2500}{1.13 \times 400^2} \right) \\ &= -0.0175 \text{ m} = -17.5 \text{ mm (缩短)} \end{aligned}$$

例5 试求图 5-36a 所示体系内弹簧 A 和 B 中的力。假设柱 EF 是刚性的，杆 GC 和 HD 具有常数弯曲刚度 EI ，弹簧 A 和 B 的刚度 k 为 EI/l^3 。注意当柱 EF 移动位置时，竖直力使柱绕铰 E 转动。

解 这只是个一次超静定结构。但因 P 远大于 Q ，故应考虑体系偏离后 P 产生之力矩，亦即纵向力效应，故叠加原理不再适用。然而，如果纵向力 P 始终作用着，则作用于柱上的各个横向荷载的效应是可以叠加的。因此，用方法求解时，求 δ_{11} 和 Δ_{1P} 都要考虑 P 的影响。

为了简化计算，可将弹簧 A 与 CG 杆、弹簧 B 与 DH 杆分别看作是一个串联弹簧，其柔度（刚度的倒数）为串联二弹簧柔度之和。即有

$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k} + \frac{l^3}{3EI} = \frac{l^3}{EI} + \frac{l^3}{3EI} = \frac{4l^3}{3EI}$$

故其刚度为 $k_1 = \frac{3EI}{4l^3}$

于是得到图 5-36b 所示的计算简图。并可知左右二弹簧内力大小相等符号相反（一拉一压）。

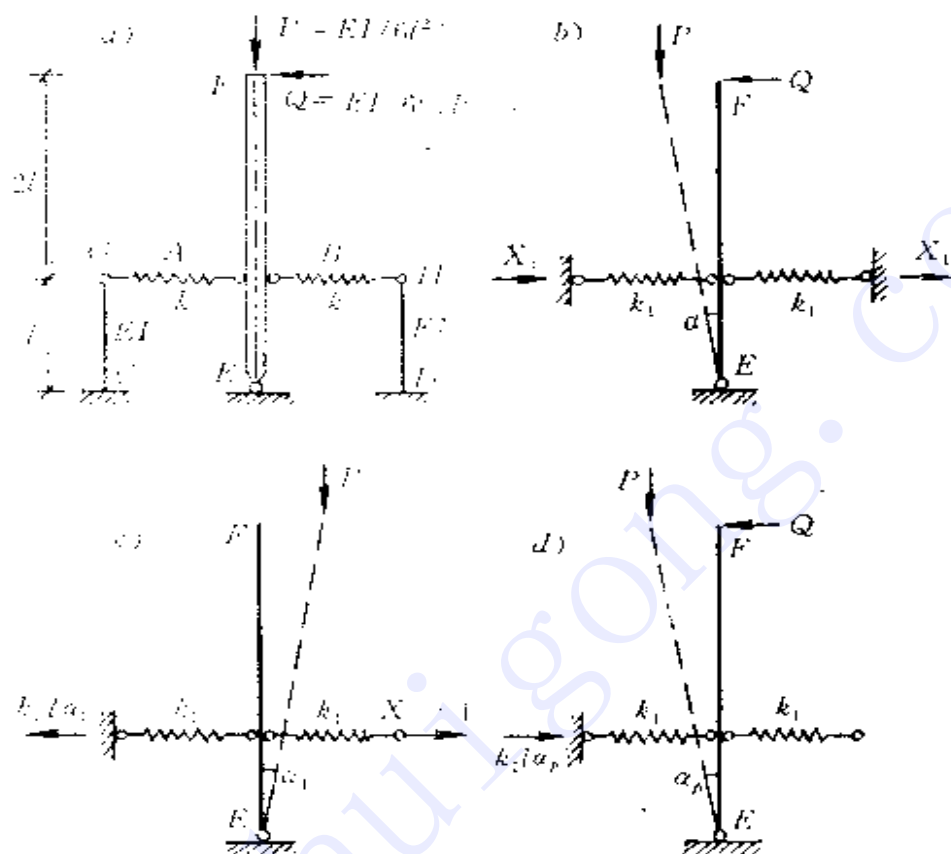


图 5-36

解法 1 通过力法基本结构求解。为了保持基本结构的几何不变性，只切断一根弹簧，今在右边弹簧的右端切开，典型方程仍为一般的形式：

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (a)$$

在 \$X_1 = 1\$ 作用下(同时须考虑有 \$P\$ 作用)，如图 5-36c 所示，\$\delta_{11}\$ 显然等于左右二弹簧伸长之和：

$$\delta_{11} = l\alpha_1 + \frac{1}{k_1} \quad (b)$$

又由平衡方程 \$\Sigma M = 0\$ 有

$$(k_1 l a_1 - 1)l - 3Pl a_1 = 0$$

得
$$l a_1 = \frac{l}{k_1 l - 3P} \quad (c)$$

故有
$$\delta_{11} = \frac{l}{k_1 l - 3P} + \frac{1}{k_1} = \frac{2k_1 l - 3P}{k_1(k_1 l - 3P)} \quad (d)$$

在 Q 作用下(亦须同时考虑有 P 作用), 见图 5-36d, 有

$$\Delta_{1P} = -l a_P \quad (e)$$

同理由 $\Sigma M_B = 0$ 有

$$k_1 l a_P l - 3Pl a_P - 3Ql = 0$$

得
$$l a_P = \frac{3Ql}{k_1 l - 3P} \quad (f)$$

故有
$$\Delta_{1P} = \frac{3Ql}{k_1 l - 3P} \quad (g)$$

代入典型方程(a)得

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{3Ql}{k_1 l - 3P} \cdot \frac{k_1(k_1 l - 3P)}{2k_1 l - 3P} = \frac{3k_1 l Q}{2k_1 l - 3P} \quad (h)$$

将 $k_1 = \frac{3EI}{4l^3}$, $Q = \frac{EI}{600l^2}$ 及 $P = \frac{EI}{6l^2}$ 代入, 化简后即得

$$X_1 = \frac{9EI}{2400l^2} = \frac{9}{400}P \quad (i)$$

解法 2 直接由原结构(图 5-36b)的平衡条件和位移协调条件求解, 考虑所有的力均同时作用。

因此时二弹簧的伸长和缩短相等, 均为 $l\alpha$, 故其内力相等, 均为 X_1 (一拉一压)。位移条件为

$$\frac{X_1}{k_1} = l\alpha \quad (j)$$

又由平衡条件 $\Sigma M_B = 0$ 有

$$2X_1 l - 3Pl\alpha - 3Ql = 0$$

得
$$l\alpha = \frac{2X_1 l - 3Ql}{3P} \quad (k)$$

代入式(j)即可解得

$$X_1 = \frac{3k_1 l Q}{2k_1 l - 3P}$$

这与上面结果式(b)相同。

例6 求图5-37a所示结构结点D的角位移。各杆轴向变形忽略不计, $EI = \text{常数}$ 。

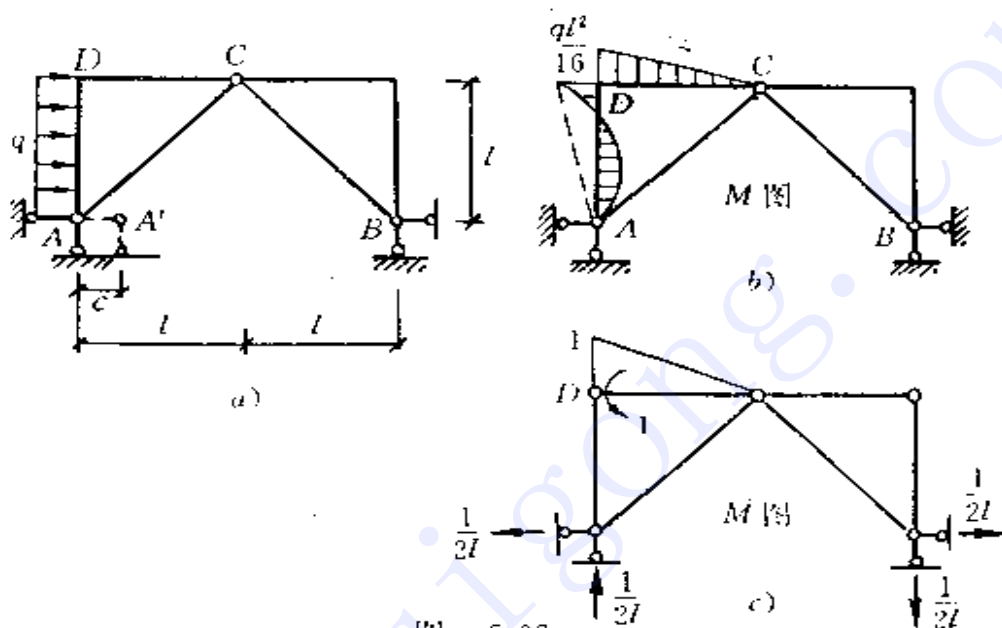


图 5-37

解 此结构反力是静定的,故支座位移 c 并不引起任何内力。因此求解内力时可以不考虑支座位移,于是各结点均无线位移,为无侧移刚架。显然,右部三杆弯矩均为零。左部 AC 杆弯矩为零;左边仅一个刚结点 D ,故其内力用力矩分配法求解最为简便,由心算即可绘出 M 图(图 b)。

求角位移 φ_D 时,可选取图 c 的静定基本结构,并将单位力偶加在 D 铰右侧(这样图乘较简便),注意此时则勿遗漏支座位移 c 对 φ_D 的影响,于是有

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \sum \int \frac{M \bar{M} ds}{EI} & \Sigma R_c &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{16} l \times \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2l} c\right) \\ &= \frac{ql^3}{48EI} + \frac{c}{2l} \quad (\text{逆时针}) \end{aligned}$$

例7 图 5-38a 所示刚架的中柱刚度为无穷大，其余各杆 EI 相同，试作其 M 图(略去剪切和轴向变形影响)。

解 此题首先应考虑利用对称性，将荷载 $2P$ 分为正、反对称两组。正对称时 M 为零不必求解；反对称时取一半如图 5-38b 所示，用力法求解并不难(二次超静定)，用位移法求解则有些难度，今主要就位移法加以讨论。

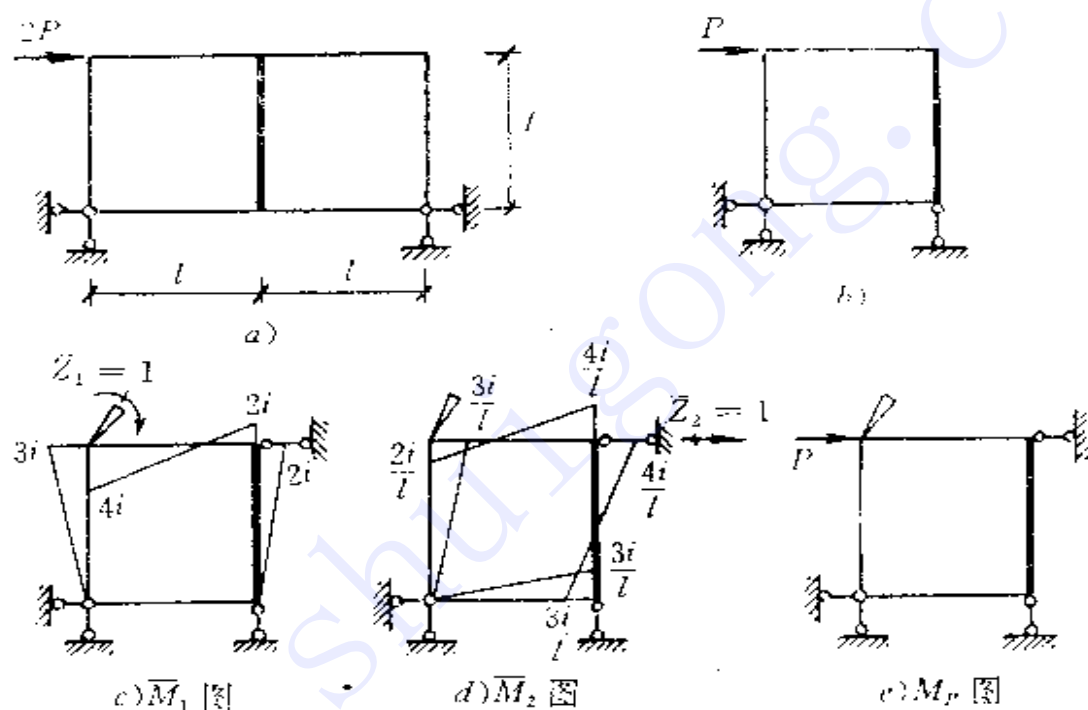


图 5-38

对图 5-38b 确定位移法基本未知量数目时，注意到刚性杆本身不变形，两端线位移确定之后，其刚体转角即随之而定，故其两端结点转角均不作为独立未知量。于是只有左上刚结点转角 Z_1 和上横梁两端结点的水平位移 Z_2 两个未知量。

基本结构的 M_1 图如图 5-38c 所示，左柱和上横梁与一般杆件无异，但上横梁右端刚结点并未加刚臂，故由刚结点力矩平衡，刚性杆上端必有弯矩 $2i$ 。下横梁无任何变形故弯矩为零，因而刚性杆

下端弯矩亦为零。作 M_2 图时注意，当 $Z_2 = 1$ 时，刚性杆随之产生顺时针转角 $1/l$ ，故其上、下两端刚结点亦发生同样转角！故可绘出上、下横梁之 M_2 图，而刚性杆本身之弯矩图则可由上、下刚结点之力矩平衡推定。至于左柱则与通常无异。于是可绘出 M_2 图如图5-38d所示。 M_p 图则为零(图5-38e)。

根据各图之平衡条件不难求得

$$r_{11} = 7i, \quad r_{22} = \frac{10i}{l^2}, \quad r_{12} = r_{21} = -\frac{i}{l}$$

$$R_{1P} = 0, \quad R_{2P} = -P$$

典型方程为

$$7iZ_1 - \frac{i}{l}Z_2 = 0$$

$$-\frac{i}{l}Z_1 + \frac{10i}{l^2}Z_2 - P = 0$$

可解得

$$Z_1 = \frac{Pl}{69i}, \quad Z_2 = \frac{7Pl^2}{69i}$$

最后弯矩图可由 $M = Z_1 M_1 + Z_2 M_2 + M_p$ 绘出，见图5-39a。整个结构 M 图如图5-39b。

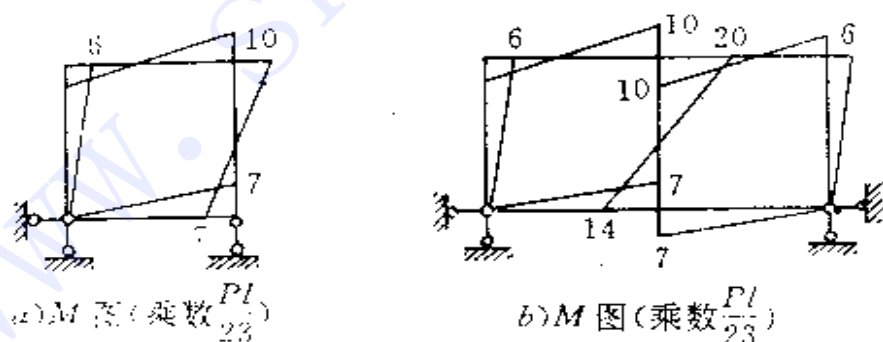


图 5-39

此题如果用力法求解，取图5-40之基本结构较简便。注意刚性杆之 EI 为 ∞ ，用图乘法求系数自由项时该杆之影响为零。可解

得(过程略)：

$$X_1 = \frac{6P}{23}, \quad X_2 = -\frac{16P}{23}$$

可绘出 M 图仍如图 5-39a。

例 8 图 5-41a 刚架 $EI = \text{常数}$ ，各杆长均为 l ，不计轴变，试求中央结点 C 的转角。

解 不计轴变时，此刚架四角点均无线位移，故可改绘成图 b 的形式，对通过 C 的水平轴和竖直轴均对称，而承受反对称荷载，因此可取其 $1/4$ 部分来计算，得到图 c。图 c 对 45° 对角线 AC 又是对称的，承受反对称荷载，故再取

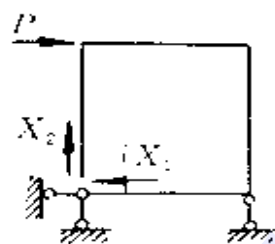


图 5-40

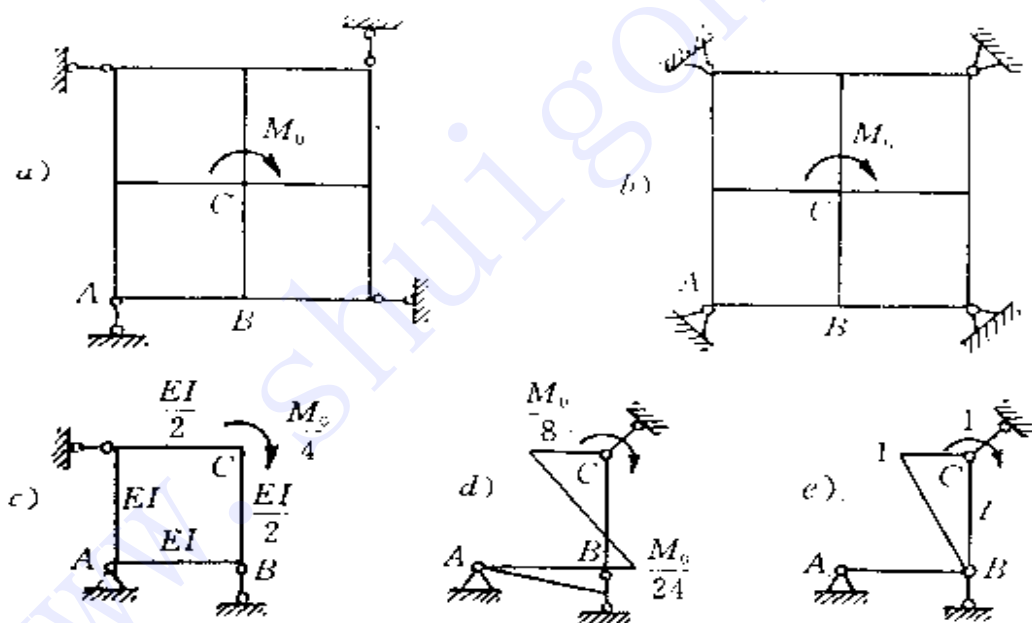


图 5-41

半得到图 d，注意此时 A 、 C 均为铰结点，仅 B 为刚结点，且各结点均无线位移，故其弯矩极易由力矩分配法求出如图。

求 φ_c 时，取图 e 之静定基本结构(将结点 B 改为铰)作虚拟状

态,绘出其单位弯矩图。由图乘法可得

$$\varphi_c = \frac{1}{EI/2} \cdot \frac{l}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{M_c}{8} - \frac{1}{3} \frac{M_c}{24} \right) - \frac{5}{72} \frac{M_c l}{EI} \quad (\text{顺时针})$$

例 9 求图 5-42a 所示结构 K 点水平位移。A = 10I/l²。

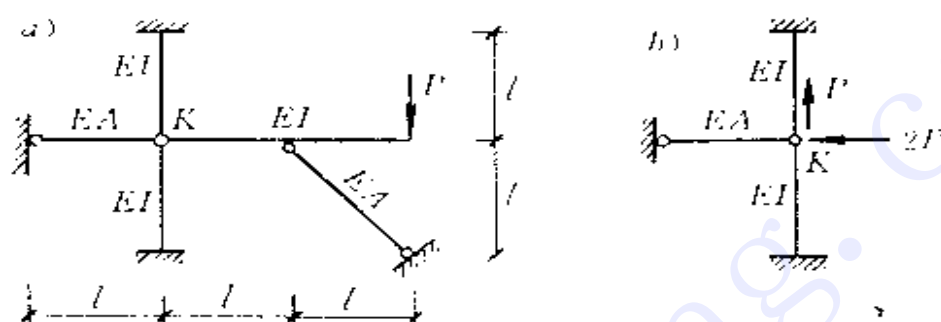


图 5-42

解 首先注意到 K 以右部分是静定的,故可将其去掉而以截断处的内力代替其作用,只分析剩下部分(图 5-42b)。受弯杆轴变不计时,K 点只有水平位移,由位移法可得

$$\Delta_{KH} = Z_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}} = -\frac{2P}{\frac{6EI}{l^3} + \frac{EA}{l}} = \frac{Pl^3}{8EI} \quad (\text{向左})$$

例 10 求作图 5-43a 所示结构的 M 图。

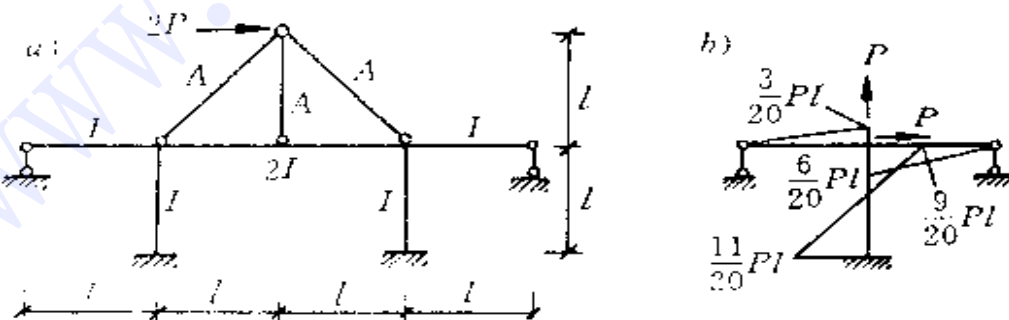


图 5-43

解 这是对称结构承受反对称荷载，故中间竖直链杆内力为零，可将其撤去。二斜向链杆内力已静定，求出后亦将其撤去而以其内力代替。再取左半部得到图 *b*，此时用无剪力分配法计算最为简便，仅一个刚结点，可绘出弯矩图如图 5-43*b*，读者可自行校核。

例 11 图 5-44*a* 所示刚架 $EI = \text{常数}$ ，已知结点 *A* 的转角为 $1/1000$ 弧度，试求 *A* 点水平位移。

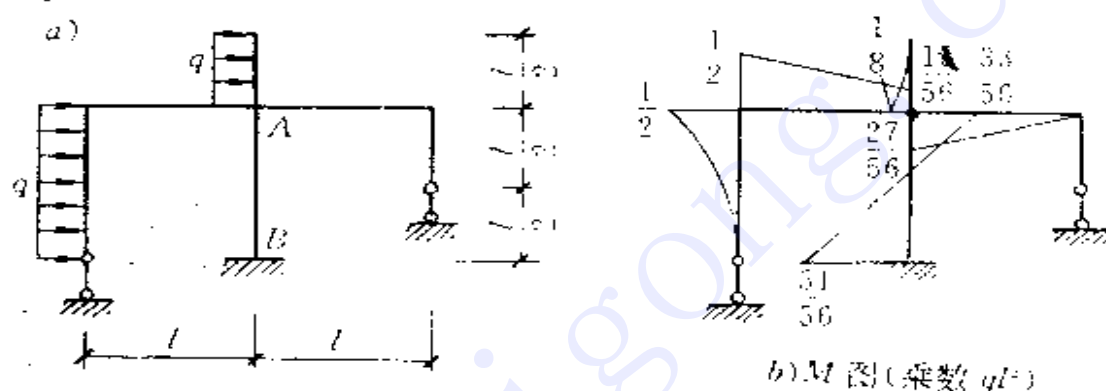


图 5-44

解 首先注意到此题可用无剪力分配法求解，上边悬臂和左右两柱的弯矩已为静定，故仅需在一个刚结点 *A* 进行分配，不难求出其弯矩图如图 *b* 所示。再去掉左右支杆而取静定的基本结构为虚拟状态，分别作单位弯矩图（很简单，只有 *AB* 杆受力）而用图乘法求 φ_A 和 Δ_{AH} ，并利用题给 φ_A 的已知条件，便可求得

$$\Delta_{AH} = \frac{23}{18000}l \rightarrow$$

读者可自行校核。

第六章 专题部分

§ 6-1 平面刚架程序的扩大应用

矩阵位移法的主要价值在于利用计算机进行计算，而计算机程序的价值主要在于通用性。简单的平面刚架程序一般不具有直接处理斜向支座、弹性支座以及铰结点等功能。遇到这些情况时，可以修改程序扩大其功能，但修改和调试需花较大工作量，如租用或引进已有软件，可能需较高费用。但若对输入数据加以适当处理，则仍可用简单的平面刚架程序来计算。这对于仅是偶尔遇到上述情况而结构又不太复杂时，不失为简便易行之举。今列举以下七个方面来说明平面刚架程序的扩大应用。

1 不计轴变影响

无论在理论分析或工程实际计算中，都常需要忽略（或排除）轴向变形的影响。为此，可将欲忽略轴变的杆件的截面面积 A 输为一个很大的数，理论上是 A 值愈大愈精确，但实际上过大会使总刚中元素相差过于悬殊而造成病态，严重影响求解精度。由于一般杆件的轴向刚度本来就比其侧移刚度大得多，例如 EA/l 常比 $12EI/l^3$ 大 $10 \sim 10^8$ 倍，因此在未采用双精度计算时，将 A 之值输为比其实际值大 $10^2 \sim 10^5$ 倍即可，可望得到较满意的近似解答，再大则可能反而使误差增大甚至完全失真。当然采用双精度求解时 A 值可输得更大一些，例如比真实值大 10^6 倍（一般无必要更大），已可获得很精确的解答。

2 斜向支座

对于斜向链杆支座(图 6-1a), 可用一根平行于该支座链杆的杆件来代替(图 6-1b), 此杆件的长度适当选取, 近端刚结远端固定, 其截面面积 A 很大(不能过大, 同上), 而截面惯性矩 I 很小(可以输零)。对于斜向滑动支座(图 6-2a), 则可用其滑动方向的一根杆件来代替(图 6-2b), 此杆件长度 l 适当任取, 截面惯性矩 I 很大(不能过大) 而截面面积 A 很小(可以输零)。

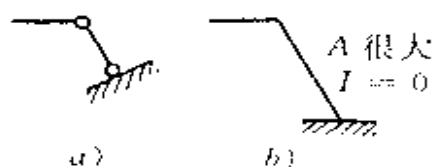


图 6-1

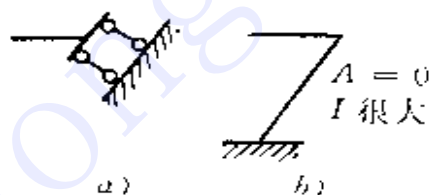


图 6-2

3 弹性支座

对于抗移弹性支座(图 6-3a), 设其弹簧刚度为 k (产生单位位移所需之力, 量纲为[力]·[长度]⁻¹), 可用沿其移动方向的一根杆件代替(图 6-3b), 杆件长度 l 适当选取, 弹性模量 E 可与结构材料的相同, 截面惯性矩 I 取得很小(可以取零), 截面面积 A 则按 $k = EA/l$ 确定, 得 $A = kl/E$ 。

对于抗转弹性支座, 设其抗转刚度为 k (转动单位角所需力矩, 量纲为[力]·[长度]), 则不论该处抗移支承条件如何(或为固定铰支座或为一支承链杆, 或如图 6-4a 那样无任何抗移支承), 抗转弹簧均可用一根杆件来代替。此杆方向可任取(为方便一般取为水平或竖直方向), 长度适当, 近端刚结而远端为滑动支承(图 6-4b), 截面惯性矩 I 按 $k = EI/l$ 确定, 得 $I = kl/E$, 截面面积 A 应很

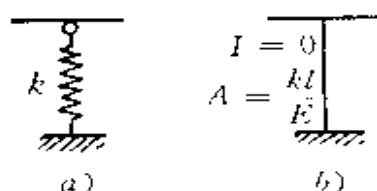


图 6-3

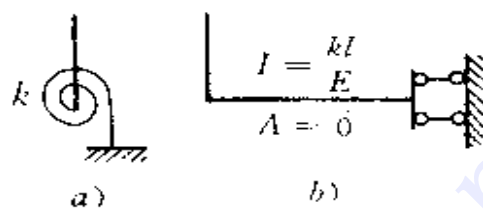


图 6-4

小(可以取零)。这样就不会干扰原有的抗移支承条件。

当某结点处同时有抗移和抗转弹性支座,或者还有斜向支座时,可综合以上各条处理,兹不一一赘述。

4 弹性地基

图 6-5a 为管状结构部分埋于地基中。设采用文克尔假定,地基的基床系数为 k (产生单位位移时之应力值,量纲为 [力] · [长度]⁻³), 又设沿结构纵向取单位长度来计算。将结构划分为足够多段,每段当作直线,并设置许多支杆来代替地基,便得到一个平面刚架计算简图(图 6-5b)。各支杆的方向垂直于结构杆轴线,长度适

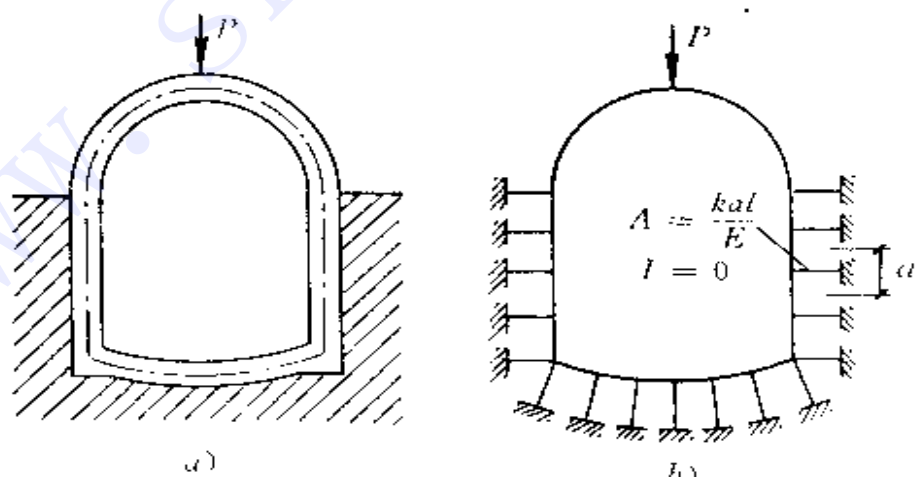


图 6-5

当选取，弹模 E 可与结构材料的相同，截面惯性矩 I 很小（可以取零），截面面积则按 $ka \cdot l = EA/l$ 推定，得 $A = kal/E$ ，这里 a 是某一支杆与相邻两侧支杆间距之半之和。

5 平面桁架

桁架的计算简图是所有结点均为铰结点，当成平面刚架计算时则所有结点都成了刚结点。输入数据时，各杆截面面积 A 按实际值输入（静定桁架则可输任意值）。各杆截面惯性矩 I 则可以有两种处理方法：一种是取为一个很小的数，例如为实际值的 $10^{-3} \sim 10^{-6}$ 倍（但不可为零，否则总刚中会出现为零的主元素，作除数时导致溢出停机）。另一种作法是将各杆截面惯性矩都取为零但同时必须将所有结点的转角都取为零作为支承条件输入（因而总刚中为零的主元素将被置大数所取代而不会造成溢出）。

6 组合体系

所有受弯杆件（梁式杆）的 A, I 值均按实际值输入；各链杆的 A 按实际值输入， I 则取为很小的数（但不能为零，同上）。

7 有铰结点的刚架

这是指受弯杆件上有铰结点的情况，这是一个不易处理得当的问题。铰结点处各杆端弯矩为零而线位移必须相等，既要尽量如实反映铰结点处的受力位移特点，又要尽量降低总刚的病态程度（尤其是采用单精度求解时），需设置恰当的杆件—刚结点替代模型，并对输入数据的大小掌握适宜的分寸，方可得到较满意的近似解答，否则将可能使结果误差过大甚至完全失真。为此，兹提出两种模拟铰结点的方法，分述如下。

1) 小三角形法 如图 6-6a 所示刚架 A 为铰结点，处理时可在该处设置三根短杆组成一个小三角形 ABA' 如图 6-6b 所示。 A, B 和

A' 均为刚结点，三点不得共线。三短杆的长度理论上是愈短愈好，但太短易造成总刚病态。采用单精度求解时，根据计算经验，取原杆长 $1/100$ 左右即可，不宜再短。采用双精度求解时可取原杆长的 $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 倍左右，不宜（也无必要）更短。三短杆的截面面积 A

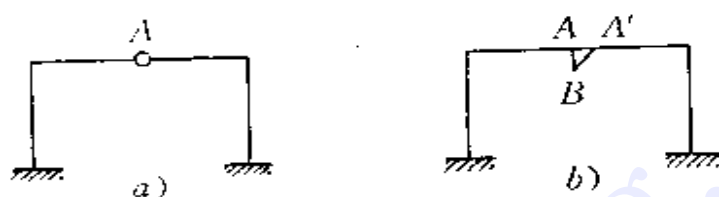


图 6-6

理论上愈大愈好，以免因轴向变形影响使三点位移不相等，但 A 值过大将造成病态。鉴于轴向变形影响本来就不大，杆又已经很短，此项影响十分微小，因此三短杆之 A 值取与原杆之 A 值差不多大即可。三短杆中，不直接联结两长杆的二短杆之一，即 AB 杆和 $A'B$ 杆中任取一杆，其截面惯性矩 I 值应取较大，以免其弯曲变形影响两端线位移；而另二短杆之 I 值则应取很小（可以是零），以使不能传递弯矩。但 I 值取较大之短杆由于其杆长 l 已经很小， I 值再大，则其 $12EI/l^3$ 将十分巨大而很易造成总刚病态，故此杆之 I 值宜取与原杆之 I 值差不多大。综上所述就是：三杆适当短， A 值取适中，不直接联两长杆的二短杆之一的 I 值取适中，另二短杆 I 值取零。

用这一方法模拟铰结点，除了上述对 A, I 值的处理总会带来一些微小误差外，还存在两点无法克服的误差：一是 A 点和 A' 无法重合（否则 AA' 杆长度将为零），造成结点坐标位置的误差。二是设 AB 杆为 I 值较大杆，则由于结点 A 的转角（尽管一般很小）将造成小三角形整体的微小转动，从而使 A 和 A' 的线位移有微小的差别。虽然如此，计算经验表明，只要输入数据处理得当，还是能获得可用的近似解答。

2) 双三角形法 以上小三角形法数据大小设置较难把握且有两项无法排除之缺点,为此作者又提出以下双三角形法。如图 6-7a 之刚架 A 处为铰结点,可将结点 A 断开成为 A 和 A' 两点,再增设 B、C 两点并用五杆联成两个三角形 ABC 和 A'BC,如图 6-7b 所示。A、A'、B 和 C 均为刚结点,所增设五杆的长度可适当选取(可与原各杆长度同数量级),五杆的截面面积 A 应取较大的值(但在单精度求解时为避免总刚病态,比原各杆的大 10 ~ 100 倍左右为宜,不可过大),截面惯性矩 I 则应取很小的值,例如为原各杆的 $10^{-3} \sim 10^{-6}$ 倍(但不可为零,否则结点 B、C 转角方向上对应的总刚主元素将为零,矩阵分解作为除数时会导致溢出停机)。

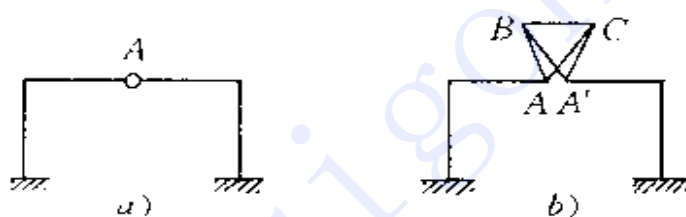


图 6-7

这一方法虽然增设的杆件较多,但输入数据的大小易于掌握,且实际上 A 点和 A' 点可取在同一位置,这就完全避免了结点坐标的误差,同时结点 A 和 A' 的转角也完全不影响两点的线位移相等,因此有较好的计算结果。

以上两法均以单铰为例,对于复铰,可多增设杆件仿照处理。此外,两法均可推广应用于空间刚架。

3) 算 例 一具有铰结点的刚架承受水平荷载如图 6-8a 所示,各杆的长度材料截面均相同。由于工程实际中大多数杆件的 AE^2/I 值在 $10^2 \sim 10^4$ 之间,今取中间值 10^3 ,本例取各杆长 $l = 1$,又取 $I = 1$,故取 $A = 10^3$ (记为 1E3)。

采用小三角形法和双三角形法时,取各短杆及增设杆的长度

分别见图 6-8b 和 c, 截面面积 A 及惯性矩 I 之取值详见表 1。今用简单的平面刚架程序进行计算, 总刚采用一维变带宽存储, 方程组的求解采用 LDL^T 法, 并仅采用单精度计算。计算结果及与精确解的比较见表 2, 其中杆端弯矩以反时针方向为正, 轴力以拉力为正。由表列结果可见, 小三角形法已能满足一般工程上的精度要求, 双三角形法则已非常接近精确解。

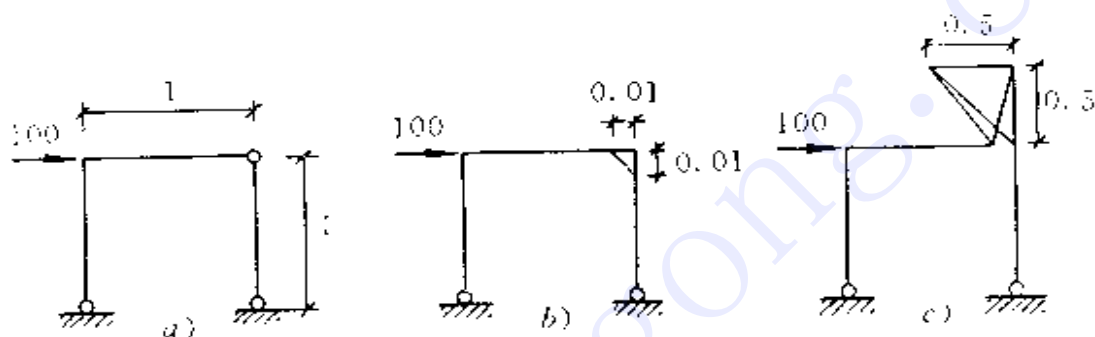


图 6-8

表 1 截面输入数据

方 法	截面面积 A		截面惯性矩 I		
	原各杆	三短杆	原各杆	水平短杆	另二短杆
小三角形法	$1E3$	$1E3$	1	1	0
双三角形法	原各杆	五增设杆	原各杆	五增设杆	
	$1E3$	$1E5$	1	$1E-6$	

表 2 计算结果比较

方 法	横 梁 弯 矩		右柱轴力
	左 端	右 端	
小三角形法	- 100.491	1.003	- 100.159
双三角开法	- 100.189	0.001	- 99.978
精 确 解	- 100	0	- 100

§ 6-2 刚架稳定简化为单根压杆稳定问题

先从一道习题说起。对图 6-9 所示各体系，文[34]中题 14-2 要求指出“哪个可以(或不可以)简化为具有弹性支座的单个压杆来进行稳定计算”。

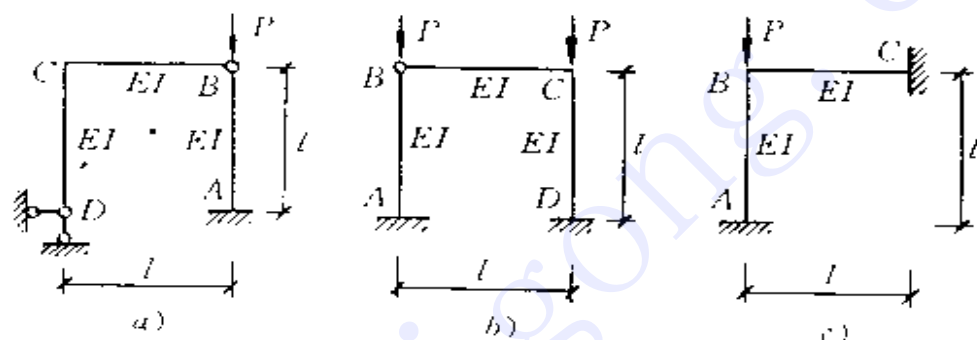


图 6-9

这里，说“不可以”似欠恰当，应说“不宜于”较妥。因为从理论上讲，任何刚架的稳定问题都可以简化为单根压杆的稳定问题，而把其余部分的作用化为某种弹性支承(即将其余部分作为一个子结构)，问题只是在于这些弹性支承的弹簧刚度有时容易确定因而宜于这样简化，有时则不容易确定(也能定但计算复杂)因而不宜这样简化，但不能说不可以。

那末，刚架的稳定问题在什么情况下，才宜于简化为单根弹性支承压杆的稳定问题呢？标准就是弹簧刚度(或柔度)要很容易求得。具体说，除所选压杆外，结构的其余部分须同时满足两条原则，即无压杆原则和不重复原则(组成各弹簧的杆件互不重复)，弹簧刚度方易于求得。现分别讨论如下。

1 无压杆原则 除所选压杆外，结构的其余杆件中无压杆。

例如图 6-9a, 除压杆 AB 外, 其余无压杆, B 端为铰, 故应简化为一个抗移弹簧, 刚度为 $\frac{3EI}{2l^3}$ (用力矩分配法极易求得)。又如图 6-9c, 除压杆 AB 外, 其余部分无压杆, 因 B 端为刚结点且无线位移, 故该处相当于一个抗转弹簧, 刚度为 $\frac{4EI}{l}$ 。然而图 6-9b 所示刚架, 无论选压杆 AB 或 CD , 其余部分均尚有压杆, 若简化为弹性支承, 则其刚度不再是已知常数而必须考虑压杆上纵向荷载 P 的弯曲效应, 将是 P 的复杂的超越函数, 计算颇为不便。故此时不宜简化为单根压杆, 而宜采用位移法或矩阵位移法分析。

这里所说的“无压杆原则”, 包括对称结构取一半之后除所选压杆外其余部分无压杆。例如图 6-10a 之对称刚架, 虽有两根压

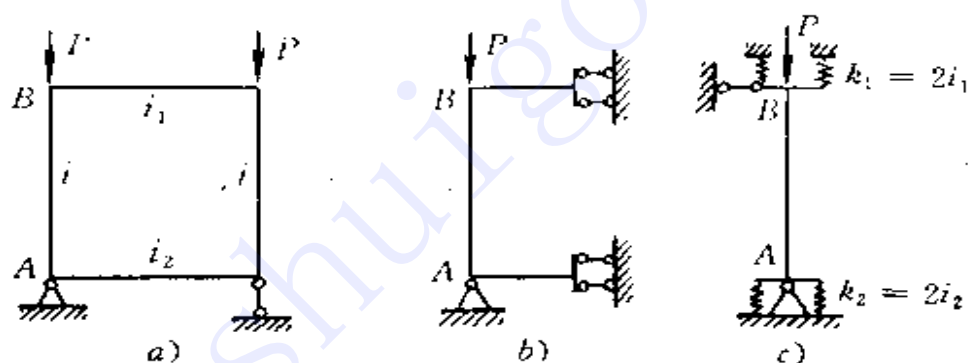


图 6-10

杆, 但考虑其正对称失稳形式时, 取一半如图 6-10b, 除 AB 外其余部分无压杆, 故可简化为图 6-10c。又如, 考虑其反对称失稳形式时, 取一半如图 6-11a, 除 AB 外其余部分亦无压杆, 因而可简化为图 6-11b。

需要指出, 无压杆原则可以有一种特殊情况例外, 这就是其余部分虽有压杆, 但为两端铰结压杆时, 仍可方便地简化为单根压杆的稳定问题。例如图 6-12a 所示刚架, 若选 AB 压杆考虑, 则其余部

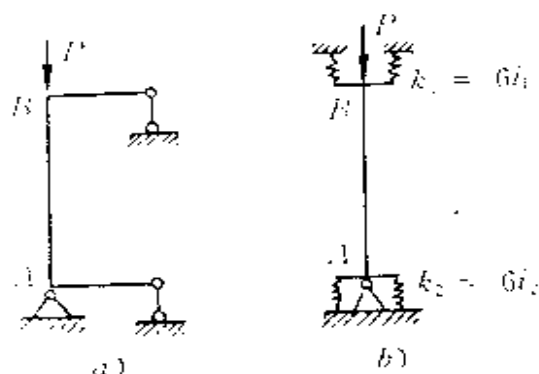


图 6-11

分尚有压杆 CD 。然而 CD 为两端铰结压杆，当刚架失稳偏离 δ 时，由 CD 杆平衡条件极易确定（不论 CD 杆弯曲与否）， CD 杆上端所受水平力为 $\frac{\delta}{l}P_2$ ，因此 AB 杆上端所受水平力亦为 $\frac{\delta}{l}P_2$ （注意方向为向右，即与 δ 相同），故可简化为单根压杆 AB 的稳定问题（图 6-12b）。如果也将压杆 CD 的作用看作是一个抗移弹簧，（图 6-12c），则必须注意，当此弹簧变形 δ 时，它不仅不提供抵抗反力，反而产生与 δ 方向一致的力而加剧偏离的发生，故其弹簧刚度应为负值即 $k = -P_2/l$ ，这可称之为“负弹簧”。

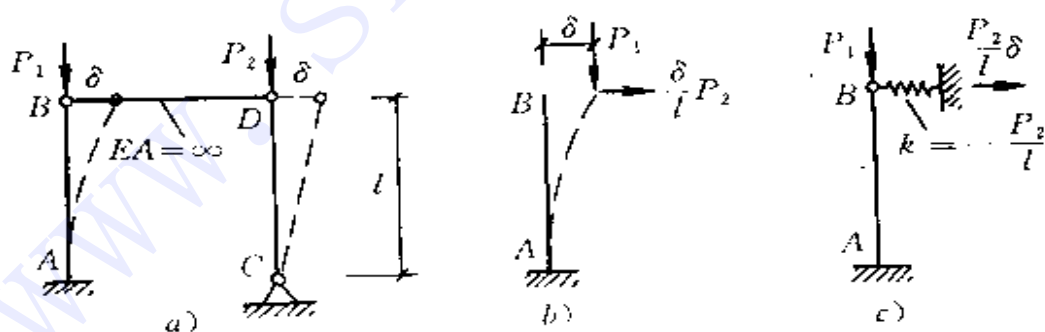


图 6-12

2 不重复原则 组成各弹性支座的杆件互不重复，否则各弹簧间将相互影响，计算不方便，而且不能用相互独立的弹簧刚度

来表示。

当简化为单根压杆后，只有一个弹性支座时，不存在重复问题，弹簧刚度容易确定。例如图 6-13a 之刚架，B 点无线位移，故简

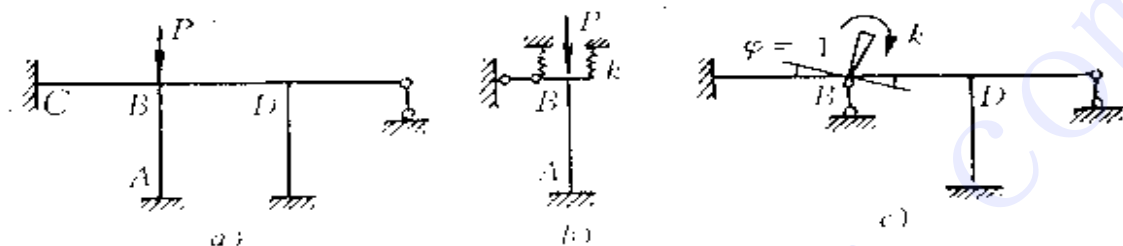


图 6-13

化为单根压杆后，B 点水平方向应为刚性链杆支座，只有转动方向为一弹性支座(图 6-13b)。此抗转弹簧由其余 4 杆组成，其刚度 k 可由图 6-13c 使结点 B 转动单位角 $\varphi = 1$ 时所需加之力矩得到(注意此时结点 D 并未固定，可先将其固定再放松而用力矩分配法解决)。

当弹性支座不止一个，但组成它们的杆件不相重复时，各自的弹簧刚度仍容易求得。例如图 6-14a 所示刚架，简化为单根压杆 AB 时，B 端原为刚结点且有水平位移，故应有一抗转弹簧和一抗移弹簧(图 6-14b)。这里，抗转弹簧只是 BC 杆的作用，故其刚度 $k_1 = 3i_1$ ；

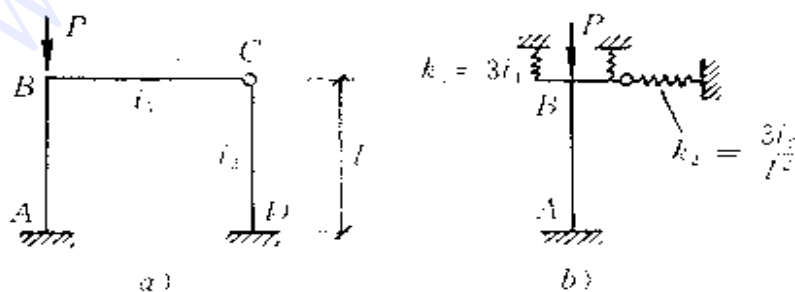


图 6-14

而抗移弹簧只是 CD 杆的作用，故其刚度为 $k_2 = 3i_2/l^2$ 。又如图 6-15a 所示刚架，简化为单根压杆 AB 时，其下端有一抗转弹簧，它只是 CA 杆所构成；其上端有一抗移弹簧，则只由 BD 、 DE 杆组成。二弹簧所涉及的杆件互不重复，故各自刚度分别容易求得。再如图 6-15b 所示刚架，简化时压杆 AB 上端既有抗移又有抗转弹簧。但抗移弹簧仅由左部 DC 、 CB 两杆组成；抗转弹簧则仅由右部 BE 、 EF 两杆构成，二者互不干扰，故其刚度容易分别确定。

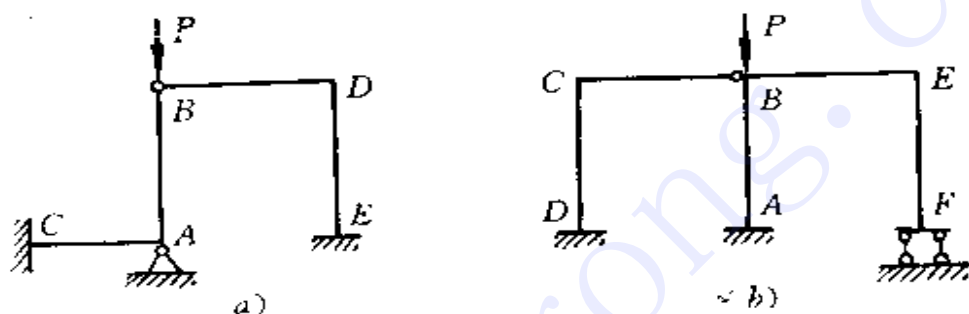


图 6-15

图 6-16a 所示情况则有所不同。压杆 AB 的上端简化时既有抗转弹簧的作用，又有抗移弹簧的作用，而两者都同时是 BC 、 CD 两杆所构成，因而两者的弹性反力（或反力矩）将同时受到两者位移的共同影响，相互干扰，因此不能用两个相互独立的弹簧来表示。当然，这种情况仍然可以简化为单根在某种弹性支承上的压杆来

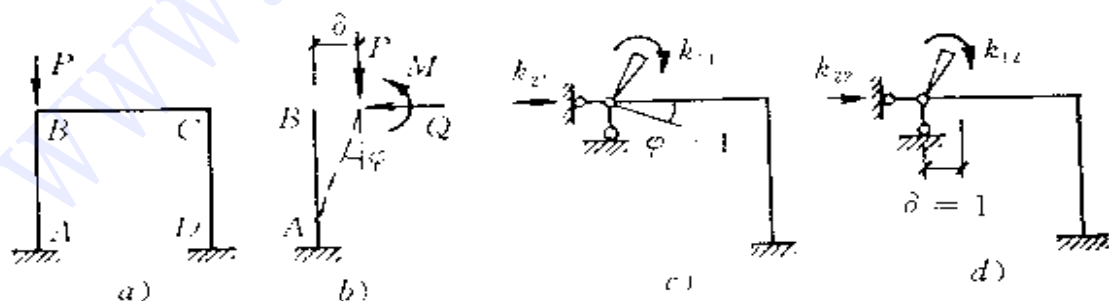


图 6-16

计算(图 6-16b),其上端的弹性反力矩 M 和弹性反力 Q 为

$$M = k_{11}\varphi + k_{12}\delta$$

$$Q = k_{21}\varphi + k_{22}\delta$$

其中刚度系数可由图 6-16c 和 d 求得并有 $k_{12} = k_{21}$ 。不过,这样处理较为麻烦,不如采用位移法(或矩阵位移法),因此不宜简化为单根压杆来计算。

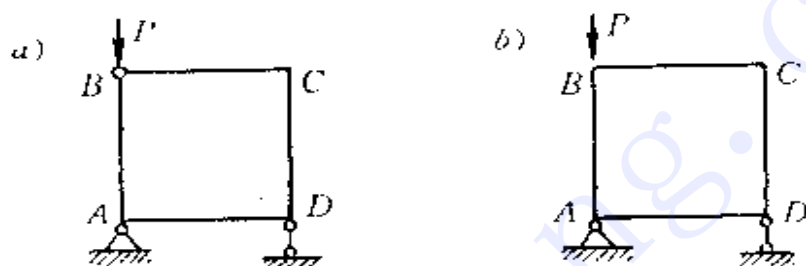


图 6-17

又如,图 6-17a 所示情况,压杆 AB 上端的抗移弹簧和下端的抗转弹簧均同时由其余三杆构成。再如图 6-17b 的刚架,压杆 AB 上端应有抗移和抗转弹性支承,下端还有抗转弹性支承,而三者均与其余三杆有关。故以上情况均不宜简化为单根弹性支承上的压杆来处理。

§ 6-3 不经计算勾绘主振型形状

在自由度 n 不很多时,具体说 $n = 2$,对称结构 $n \leq 4$ 时,凭直观可以判定各阶振型的大致形状,主要是判定各质点位移的方向,从而勾绘出结构的变形曲线。依据的主要规律如下:

1) 一般说,振型愈低,形状愈简单,变形曲线上的反弯点愈少;振型愈高则形状愈复杂,反弯点愈多。

2) 主振型之间的正交性 采用对质量矩阵的正交关系较为

直观。

3) 对称结构的振型必定是正对称的或反对称的。

4) 第一振型(最低振型)各质量运动的方向可以这样简单的判定:在任一质点处沿其自由度方向加一个力,此时各质点的位移方向(通常可直观判定)就是第一振型的运动方向。这在一般情况下都是对的。

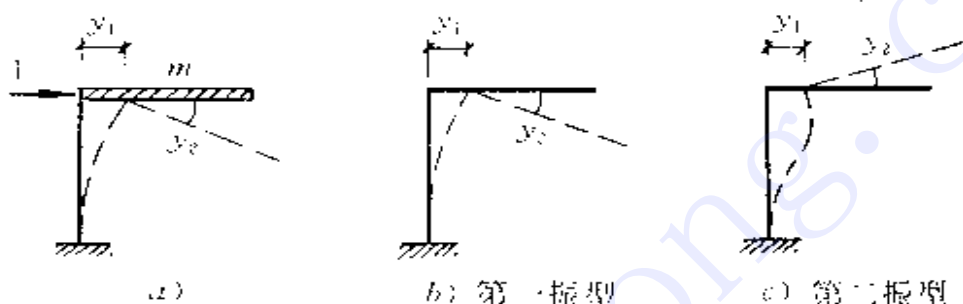


图 6-18

例如图 6-18a 所示结构,自由度 $n = 2$,即刚杆质量的水平位移 y_1 和转角 y_2 。设沿 y_1 作用一方向右,则由直观易知 y_1 向右, y_2 为顺时针方向,这便是第一振型的运动方向。据此可绘出第一振型形状(图 b),此时柱上无反弯点。再由振型的正交性可推断第二振型形状,即若 y_1 仍向右,则 y_2 必定反时针,如图 c,此时柱上有一反变点。

又如图 6-19a 为一对称结构,有三个自由度。假设沿 y_2 方向作用一力,可看出 y_2 向下, y_1 向右而 y_3 向上,这就是第一振型的方向。又由对称性知, y_1 不为零时为反对称变形,故应有 $y_2 = y_3$ (图 b),此时各杆上无反弯点(这从各惯性力均沿其位移方向,继而勾出弯矩图亦可证实)。正对称的振型则只能有一种,如图 c 所示,各杆亦无反弯点。另一个反对称振型则可根据第一振型和正交性推定如图 d 所示,此时 y_1 若仍向右,则 y_2 向上而 y_3 向下,此时柱上必有一反弯点。至于图 c 和 d 谁是第二振型谁是第三振型,还与梁柱刚度比有关,未经计算尚难判定。

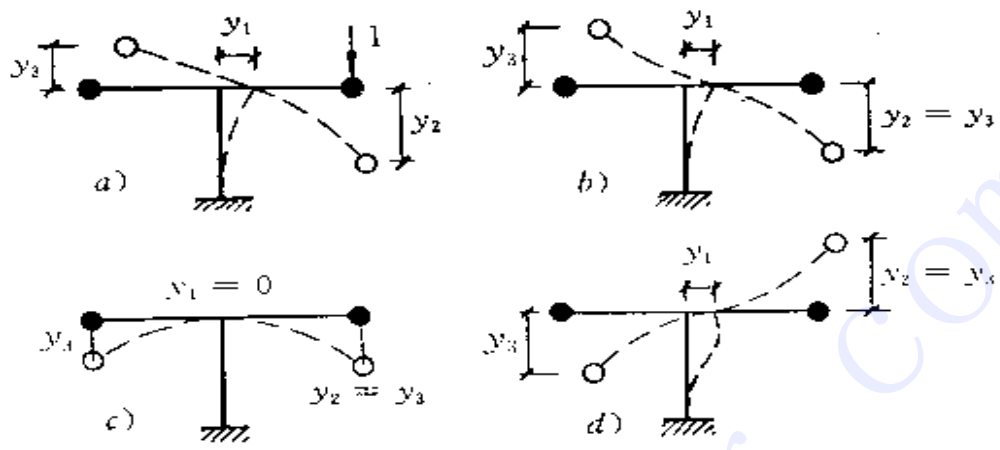


图 6-19

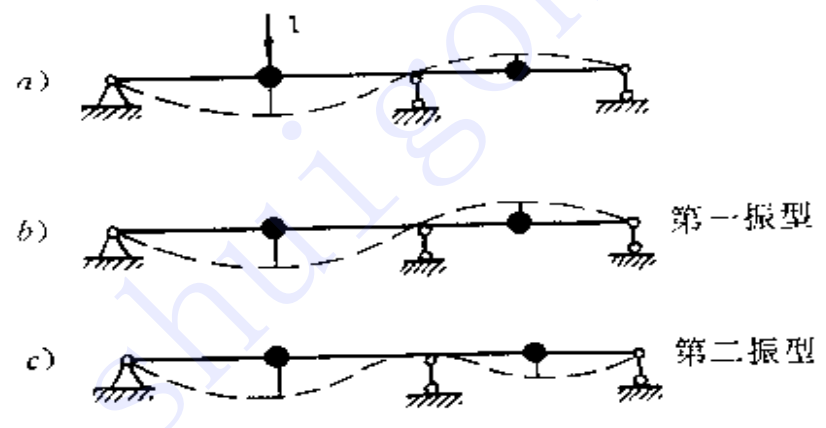


图 6-20

再如图 6-20a 所示连续梁，在任一质点作用一个力时两质点处位移方向是相反的，故知第一振型两质点反向振动(图 b)，梁上只有一个反弯点；第二振型两质点则必定同向振动(图 c)，梁上有两个反弯点。

图 6-21a 所示刚架为对称结构，自由度为 4。考虑正对称振型时，两边结点上之四个质点均无任何位移，若设下层横梁中点之质量受一力而向下位移时，上横梁中点之质量必向上位移，这便是低

振型(图 *a*)；上横梁中点质量也向下位移则为高振型(图 *b*)。反对称时中间两质点则无竖直位移，其低振型和高振型分别如图 *c* 和 *d* 所示。在一般情况下，反对称的低振型为第一振型(最低振型)，正对称的高振型为第四振型(最高振型)，至于第二、第三如何排队，则需由计算结果才能确定。

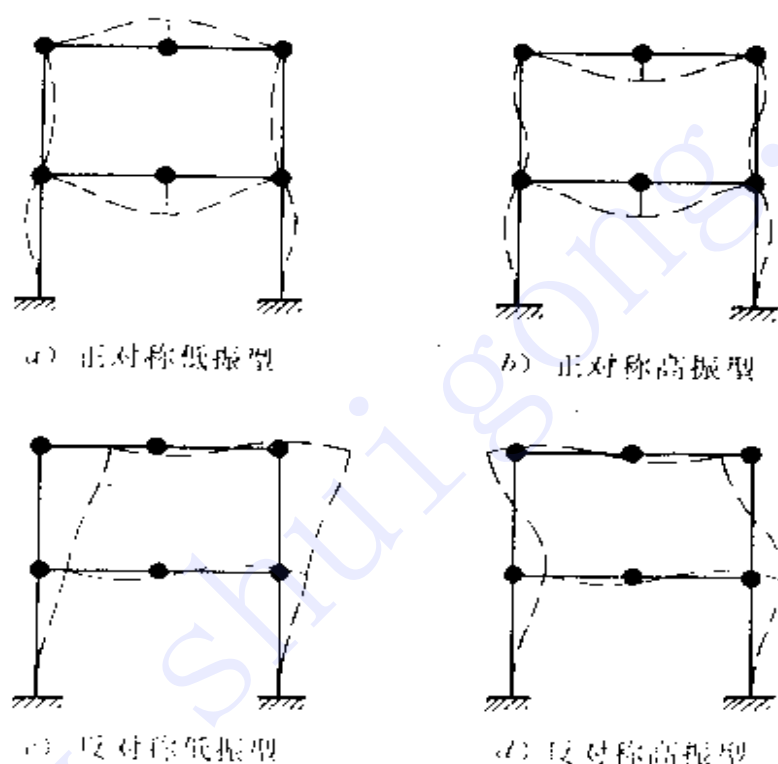


图 6-21

图 6-22a 所示悬臂梁上有三个质点，第一振型显然三质点均同向振动(图 *a*)，梁上无反弯点。第二振型梁上有一个反弯点，至于质点位移方向则有图 *b* 和 *c* 两种可能，不过一般情况多为图 *b*，只有质量 m_1 远大于 m_2 和 m_3 时才有可能为图 *c*。第三振型梁上有两个反弯点，各质点位移方向可能如图 *d*，也可能如图 *e*，可由第一振型及正交关系估计(但难于确切判定)。但若第二振型为图 *c*，则第三

振型不可能是图 e, 因为不能满足正交关系。

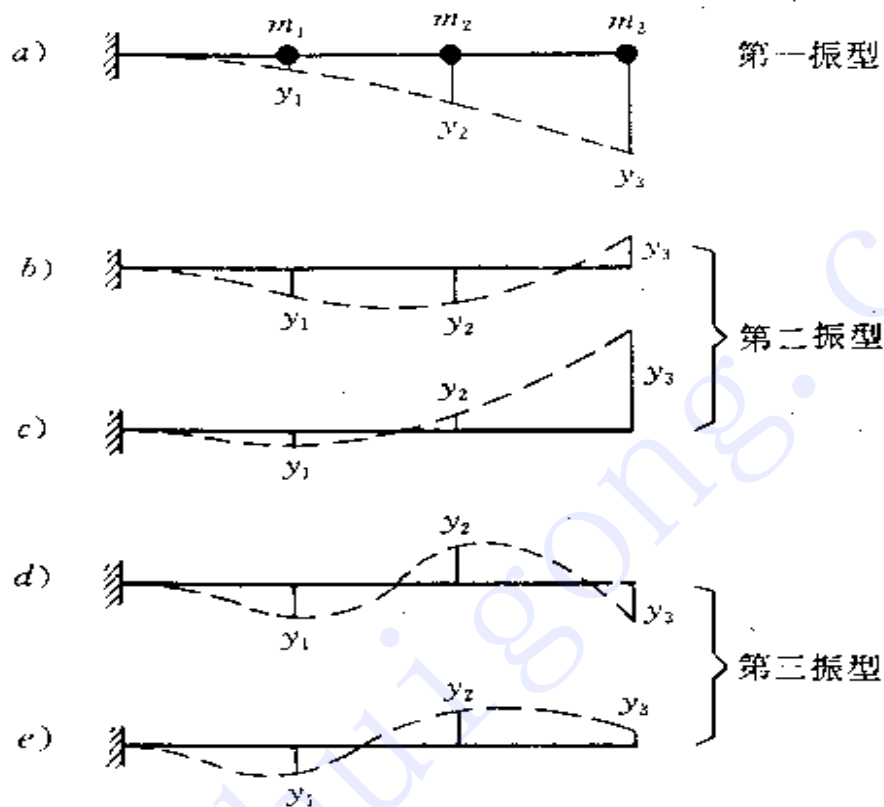


图 6-22

§ 6-1 静力分析程序与动力计算的一种衔接方式

刚架的静力分析与动力计算的模型(计算简图)往往很不相同。例如图 6-23a 所示三跨六层刚架静力计算时的简图,用矩阵位移法求解,采用支承条件后处理法时总刚阶数 n 为 $3 \times 28 = 84$,采用先处理法亦为 $n = 72$;而在动力计算中则一般简化为图 b 的形式(规范允许这样作),自由度仅为 $n_D = 6$ 。

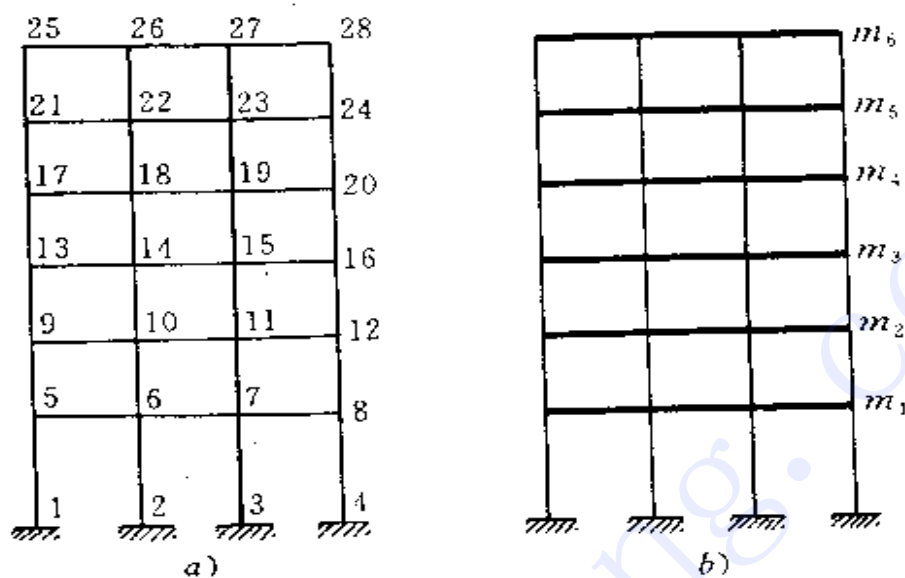


图 6-23

如果在动力计算中也采用图 6-23a 的简图,则计算量太大,耗费机时过多且并无必要,此外与之匹配的质量矩阵中在结点转动自由度上的转动惯量亦不易确定(尽管不大)。采用图 b 的简图,刚度矩阵阶数成十倍地降低,其计算量将成千倍地减少(方程组求解的计算量约与其阶数 n 的三次方即 n^3 成正相关^[35]),而精度亦为工程应用所允许。

为了将这两种简图有机结合起来,互相利用,在计算过程中可采取如下一种衔接方式:

1) 用刚架静力分析程序,建立图 a 之总刚 K ,阶数为 n ,引入支承条件并进行矩阵三角化分解。

2) 确定动力计算的自由度 n_D ,并输入图 a 中相应的结点位移分量编号。对本例来说, $n_D = 6$,并可选结点 5、9、13、17、21、25 的水平位移。

3) 依次在上述各结点加水平荷载 $P = 1$,求解结点位移(不必求出内力),共求解 n_D 轮,每轮抽取上述 n_D 个结点的水平位移,这

样便可得到图 b 体系的柔度矩阵 δ_b 。这是关键的一步。

由于前面已进行了总刚分解，此步只需进行 n_b 轮回代求解，故计算量不很大；而且因采用图 a 模型，显然比用图 b 建立的刚度矩阵（或柔度矩阵）精确。

4) 输入图 b 的质量矩阵（或由图 a 数据设法由计算机自动形成）。

5) 用迭代法（柔度法，并逐阶滤型）求出前几个（一般最多求三个）自振频率及振型。

6) 输入动力荷载（或地震数据）。

7) 用振型分解法求广义荷载，最大惯性力（地震力），一般最多求前三个振型。

8) 回到图 a ，求各振型的最大内力。

9) 按规范，可用“平方和开方法”求得综合最大动内力。

§ 6-5 难题选解

和 § 4-7 及 § 5-8 一样，本节题目亦大多选自各高校硕士研究生入学考试试题，有些作了稍许改动。

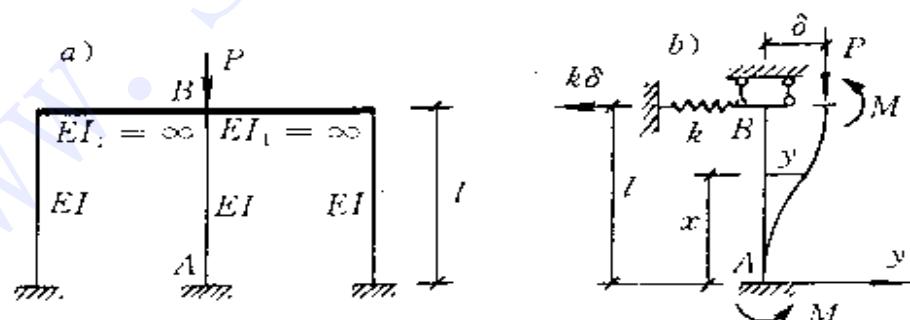


图 6-24

例 1 列出图 6-24a 所示刚架的稳定方程。

解 可简化为中柱单根压杆的稳定问题（图 b），上端不能转

动而有一水平抗移弹簧，其刚度 $k = \frac{24EI}{l^3}$ 。由两端的支承情况和受力情况可判定，失稳时挠曲线是上下反对称的，反弯点在中间，上下端反力矩相等均为 M ，故由平衡条件 $\Sigma M_A = 0$ 可得

$$M = \frac{P\delta - k\delta l}{2}$$

挠曲线近似(平衡)微分方程为

$$EIy'' = P(\delta - y) - k\delta(l - x) - \frac{P\delta - k\delta l}{2}$$

即
$$EIy'' + Py = \frac{P\delta}{2} - \frac{k\delta l}{2} + k\delta x$$

令
$$\alpha^2 = \frac{P}{EI}$$

失稳曲线的通解为

$$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x + \frac{\delta}{2} - \frac{k\delta l}{2P} + \frac{k\delta x}{P} \quad (a)$$

由边界条件

$$x = 0, y = 0, \quad \text{得 } A = \frac{k\delta l}{2P} - \frac{\delta}{2}$$

$$x = 0, y' = 0, \quad \text{得 } B = -\frac{k\delta}{\alpha P}$$

代入式(a)有

$$y = \left(\frac{k\delta l}{2P} - \frac{\delta}{2}\right)\cos\alpha x - \frac{k\delta}{\alpha P}\sin\alpha x + \frac{\delta}{2} - \frac{k\delta l}{2P} + \frac{k\delta x}{P} \quad (b)$$

再由 $x = l, y' = 0$, 有

$$-\alpha\left(\frac{k\delta l}{2P} - \frac{\delta}{2}\right)\sin\alpha l - \frac{k\delta}{P}\cos\alpha l + \frac{k\delta}{P} = 0$$

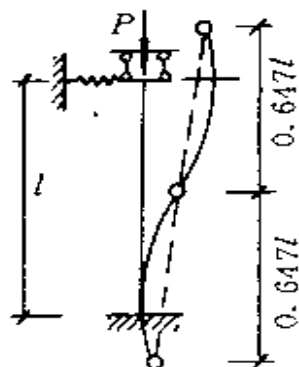


图 6-25

因 $\delta \neq 0$, 故应有

$$-\alpha\left(\frac{k l}{2P} - \frac{1}{2}\right)\sin\alpha l - \frac{k}{P}\cos\alpha l + \frac{k}{P} = 0$$

即
$$\left(\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha P}{2k}\right)\sin \alpha l + \cos \alpha l - 1 = 0 \quad (c)$$

将 $P = \alpha^2 EI$ 及 $k = \frac{24EI}{l^3}$ 代入有

$$\alpha l \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^2 l^2}{48}\right)\sin \alpha l + \cos \alpha l - 1 = 0 \quad (d)$$

这便是稳定方程。解毕。

此题若继续做到底，则由试算法可解得式(d)的最小正根为

$$\alpha l = 4.856$$

故临界荷载为

$$\begin{aligned} P_c &= \alpha^2 EI = \frac{23.58EI}{l^2} \\ &= \frac{\pi^2 EI}{(0.647l)^2} \end{aligned} \quad (e)$$

最后，讨论一下失稳曲线的形式。由式(e)可见，半波长为 $0.647l$ ，如图6-25所示。若将式(e)代入式(b)，可将其化为一斜直线(图中虚线)叠加一正弦曲线的形式，但运算较繁，从略。

例2 试求图6-26a所示刚架的临界荷载。 $EI = \text{常数}$ 。

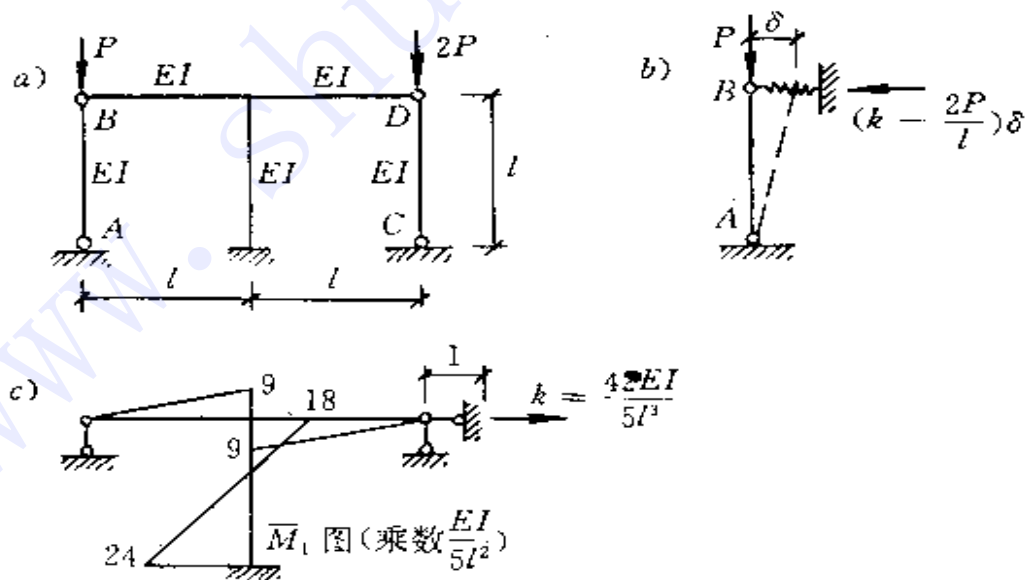


图 6-26

解 此题有三种可能的失稳形式：

1) 左柱弯而不偏 $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{9.87 EI}{l^2}$

2) 右柱弯而不偏 $2P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, 即 $P = \frac{\pi^2 EI}{2l^2} = \frac{4.93 EI}{l^2}$

3) 刚架侧移(不论左右两柱弯否), 此时可简化为单根压杆的侧移失稳问题。比如取左柱(图 b), 上端有一抗移弹簧, 其刚度包括两部分: 一部分为中间 T 字形刚架的作用, 其刚度为 k , 可由图 c 按力矩分配法求得 M_1 图后由剪力平衡算得; 另一部分为 CD 柱的作用, 它是一个“负弹簧”(见 § 6-2), 刚度系数为 $-2P/l$ 。故由图 b, $\Sigma M_A = 0$, 有

$$P\delta - (k - \frac{2P}{l})\delta l = 0$$

得 $P = \frac{kl}{3} - \frac{42EI}{15l^2} = \frac{2.8EI}{l^2}$

在以上三种情况中选最小 P 值, 得临界荷载为

$$P_c = \frac{2.8EI}{l^2}$$

并可知此时左右两柱均未弯曲, 而整个刚架发生侧移。

例 3 求图 6-27a 所示刚架的临界荷载。

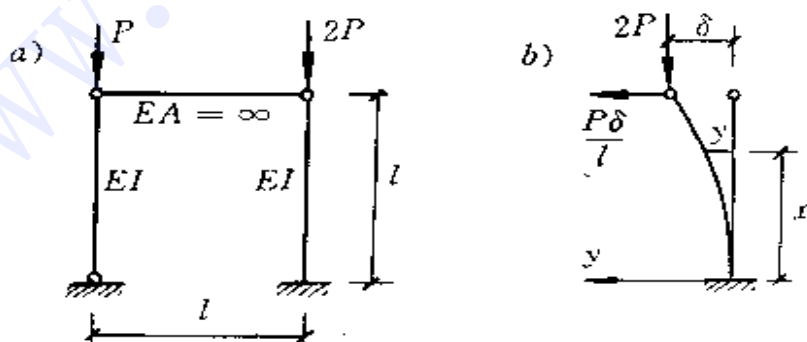


图 6-27

解 1) 左柱弯而不偏时 $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ 。

2) 刚架侧移时，左柱一般偏而不弯，右柱则必定弯曲。此时可简化成单根压杆稳定问题。如果取左柱，则上端抗移弹簧之刚度将受右柱上的纵向力 $2P$ 之影响，计算颇不方便。现改取右柱(图 b)，因左柱是两端铰支压杆，为一“负弹簧”(见 § 6-2)，刚度系数为 $-P/l$ ，故右柱上端所受水平力即为 $P\delta/l$ ，方向与 δ 一致。于是可建立平衡微分方程为

$$EIy'' = 2P(\delta - y) + P \frac{\delta}{l}(l - x)$$

即 $EIy'' + 2Py = P\delta(3 - \frac{x}{l})$

令 $\alpha^2 = \frac{2P}{EI}$

有 $y'' + \alpha^2 y = \frac{\alpha^2 \delta}{2}(3 - \frac{x}{l})$

通解为

$$y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x + \frac{\delta}{2}(3 - \frac{x}{l})$$

由边界条件

$x = 0, y = 0$, 有 $A = -\frac{3}{2}\delta$

$x = 0, y' = 0$, 有 $B = \frac{\delta}{2\alpha l}$

$x = l, y = \delta$, 有

$$-\frac{3}{2}\delta\cos\alpha l + \frac{\delta}{2\alpha l}\sin\alpha l + \frac{\delta}{2}(3 - 1) = \delta$$

即 $\frac{\sin\alpha l}{\alpha l} = 3$

此即稳定方程。由试算法解得其最小正根为

$$\alpha l = 1.3242$$

故

$$2P = \frac{(\alpha l)^2 EI}{l^2} = \frac{1.754 EI}{l^2}$$

得
$$P = \frac{0.877EI}{l^2}$$

3) 取小者 显然第二种情况(刚架侧移)之荷载远小于第一种情况(其实这在计算之前由直观即可判定,因为若无左柱,右柱之临界力参数 P 为 $\frac{1}{2} \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$, 现左柱为“负弹簧”, 加速其失稳, 故临界力必定更小)。故有

$$P_c = \frac{0.877EI}{l^2}$$

例 4 求图 6-28 体系之自振频率, 各杆 $EI = \infty$ 。

解 初看质点、杆件甚多, 但仅右柱为弹性链杆, 其余均为刚性杆, 故仅为一个自由度的体系。设左边质点位移为 y , 则其余各

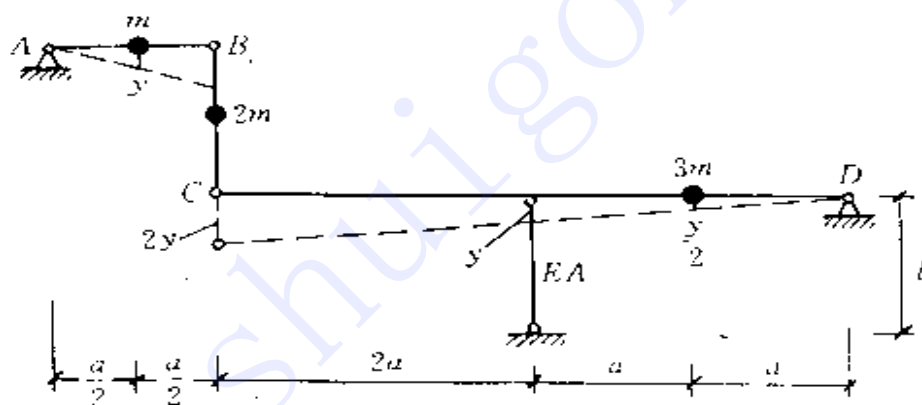


图 6-28

处位移可推定如图所示。建立振动微分方程时, 取 BCD 为隔离体, 由动力平衡方程 $\Sigma M_o = 0$ 有

$$-\frac{m\ddot{y}}{2}4a - 2m(2\ddot{y})4a - 3m\frac{\ddot{y}}{2}a - \frac{EAy}{l}2a = 0$$

即
$$\frac{39}{4}m\ddot{y} + \frac{EA}{l}y = 0$$

或由虚功原理有

$$-m\ddot{y} - 2m(2\ddot{y})2y - 3m \frac{\ddot{y}}{2} \frac{y}{2} - \frac{EAy}{l}y = 0$$

同样得
$$\frac{39}{4}m\ddot{y} + \frac{EA}{l}y = 0$$

故知自振频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{1EA}{39ml}} = 0.32 \sqrt{\frac{EA}{ml}}$$

例 5 图 6-29 所示梁上有集中质量 m_1 ，受简谐干扰力 $P\sin\theta t$ 作用，为了减振，在该处悬挂一弹簧和重物，欲使减振效果最佳，试设计弹簧刚度 k_2 和重物质量 m_2 。不计阻尼。

解 初看似难着手，其实这只不过是两自由度的强迫振动问题。设梁在质量 m_1 处的竖向刚度为 k_1 ，则刚度矩阵中各系数为

$$k_{11} = k_1 + k_2$$

$$k_{22} = k_2$$

$$k_{12} = k_{21} = -k_2$$

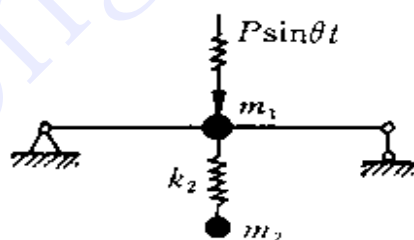


图 6-29

体系在简谐荷载作用下，两质点的振幅方程为

$$(k_{11} - m_1\theta^2)A_1 + k_{12}A_2 = P_1$$

$$k_{21}A_1 + (k_{22} - m_2\theta^2)A_2 = P_2$$

今有 $P_1 = P$ 和 $P_2 = 0$ ，由上式可解得

$$A_1 = \frac{(k_{22} - m_2\theta^2)P}{(k_{11} - m_1\theta^2)(k_{22} - m_2\theta^2) - k_{12}^2}$$

$$A_2 = \frac{-k_{21}P}{(k_{11} - m_1\theta^2)(k_{22} - m_2\theta^2) - k_{12}^2}$$

减振效果最佳自然是 $A_1 = 0$ ，于是有

$$k_{22} - m_2\theta^2 = 0$$

又因 $k_{22} = k_2$ ，故得

$$k_2 = m_2\theta^2$$

选定了 m_2 ，则可由上式确定 k_2 。

注意，此时 A_2 并不等于零，由上面解答之第 2 式有

$$A_2 = -\frac{P}{k_2}$$

即 A_2 与 P 反向。实际上此时 m_2 的惯性力恒与荷载平衡， m_1 处于静止和不受力状态（静平衡受力除外）。

例 6 用能量法求图 6-30a 所示结构的最低频率。

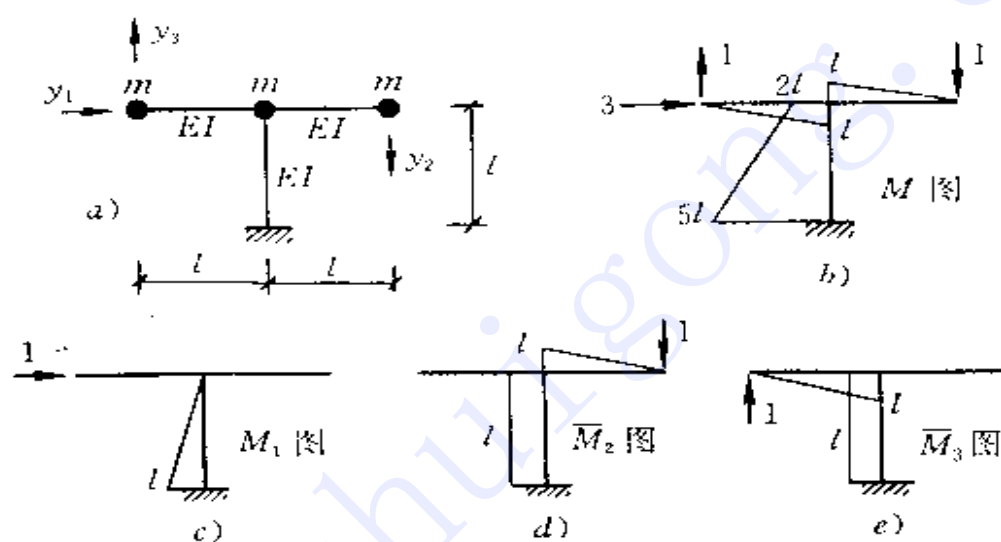


图 6-30

解 通常可选自重作用下的位移为第一振型，但须注意，所谓“自重”并非都是竖直向下的，而应是沿第一振型各质点的位移方向。此题为对称结构，显然在第一振型中若三质点水平位移 y_1 向右，则右边质点的竖直位移 y_2 向下而左边质点的 y_3 向上，故“重力”就应分别沿这些方向施加。此外，求振型只是求各质点位移之相对比值，故加力时与各重力成比例即可，不一定加重力的量纲。注意到 y_1 方向相应之质量为 $3m$ ，故可在上述三个方向分别加 3 、 1 、 1 的力，如图 b 所示，绘出其 M 图。再绘出各单位弯矩 M_i 图（图 c 、 d 、 e ），由图乘法不难求得

$$y_1 = 2 \frac{l^3}{EI}$$

$$y_2 = y_3 = \frac{23}{6} \frac{l^3}{EI} = 3.833 \frac{l^3}{EI}$$

于是由能量法求自振频率公式有

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{\sum P y_i}{\sum m_i y_i^2} \\ &= \frac{3 \times 2 + 1 \times 3.833 + 1 \times 3.833}{3 \times 2^2 + 1 \times 3.833^2 + 1 \times 3.833^2} \frac{EI}{ml^3} \\ &= 0.3302 \frac{EI}{ml^3}\end{aligned}$$

得
$$\omega = 0.575 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

精确解为 $0.572 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$ ，能量法结果只比其大 0.5%，精度很好。可见前面关于加“重力”的方向及大小的讨论是值得注意的。

参 考 文 献

- [1] 李廉锟主编. 结构力学(第二版). 上册. 高等教育出版社, 1983
- [2] 同[1], 下册, 1984
- [3] И. М. 拉宾诺维奇. 建筑力学教程, 第一卷第二分册. 清华大学译. 高等教育出版社, 1954
- [4] 同[3], 第二卷第一分册
- [5] И. П. 普罗柯菲耶夫. 结构理论, 第一卷. 陈英俊译. 商务印书馆, 1954
- [6] И. Л. Кузьмин 等. 结构力学习题集. 王光远译. 商务印书馆, 1953
- [7] 钟朋主编. 结构力学习题集. 人民教育出版社, 1965
- [8] 杨耀乾. 结构力学(增订版). 上册. 高等教育出版社, 1960
- [9] 金宝楨主编. 结构力学. 人民教育出版社, 1964
- [10] 铁路工程技术规范. 第二篇. 桥涵. 人民铁道出版社, 1975
- [11] 吉赫诺夫. 桥梁标准载重研究的介绍. 人民铁道, 第三卷第五、第十二期, 1951
- [12] 中载重制的来源应用及换算. 铁路勘测设计技术资料汇编. 大型建筑部分. 上册. 铁道部设计总局编, 1955
- [13] 铁道部专业设计院. 铁路桥涵设计规范学习记录汇编. 1963
- [14] 铁道部第三设计院. 桥规学习参考资料. 1975
- [15] 缪加玉. 结构力学问题五则. 长沙铁道学院学报, 1983(3)
- [16] 徐芝纶. 弹性力学简明教程. 人民教育出版社, 1980
- [17] А. 格哈利, 等. 结构分析. 胡人礼译. 人民铁道出版社, 1978
- [18] 龙驭球, 等主编. 结构力学. 上册第一分册. 人民教育出版社, 1979
- [19] 同[18], 上册第二分册
- [20] 数学手册. 煤炭工业出版社. 1975
- [21] 钟万勰, 等. 计算杆系结构力学. 水利电力出版社, 1982
- [22] 湖南大学. 结构力学(第三版). 上册. 高等教育出版社, 1983
- [23] И. М. 拉宾诺维奇. 建筑力学教程. 第一卷第一分册. 商务印书馆, 1953
- [24] 力学词典. 中国大百科全书出版社, 1990. 413

- [25] 汤家旭. 判断结构几何可变性的算法. 结构力学及弹性力学教学与教材研究. 天津大学编. 1991(1, 总第7期): 105
- [26] 李慰萱. 结构几何不变性的判定. 湖南数学年刊. 1981
- [27] 庞德海. 无穷远元素在几何组成分析中的应用. 同[25]: 96
- [28] 缪加玉. 三刚片用三对平行等长链杆相联时的四连杆机构分析法. 长沙铁道学院学报, 1986(1)
- [29] 缪加玉. 再论瞬变体系. 海南大学学报自然科学版, 1992(4)
- [30] 缪加玉. 三三制反弯点法. 长沙铁道学院学报, 1989(2)
- [31] 缪加玉. 平面刚架程序的扩大应用. 琼湘力学研讨会论文集, 1990
- [32] 缪加玉. 使用平面刚架程序时的铰结点模拟. 海南大学学报自然科学版, 1990(4)
- [33] 杨弗康. 广义剪力分配法·修正D值法. 湖南大学学报, 1982(4)
- [34] 西安冶金建筑学院, 等. 结构力学解题指导及习题集. 高等教育出版社, 1987: 465
- [35] 武汉大学, 等. 计算方法. 人民教育出版社, 1979: 82